This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

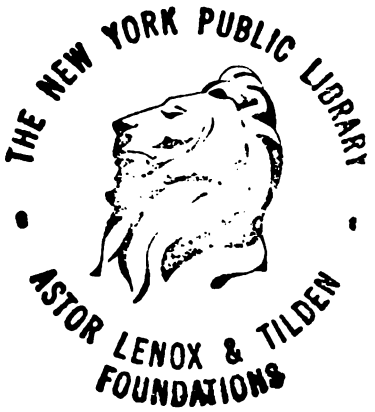
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

RESEARCH LIBRARIES
3 06641337 2

No. 249. 60.-

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX & TILDEN
FOUNDATIONS

65 | 106
2 Bch

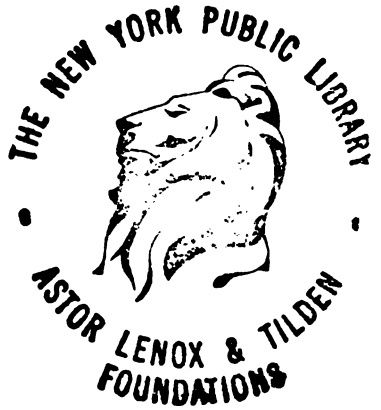


No. 249. 60.-

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX & TILDEN
FOUNDATIONS

65 | 106
2 Bch

OG-E
Nett



No. 249. 60.-

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
ASTOR LENOX & TILDEN
FOUNDATIONS

65 | 106
2 Bch

IX. 249

VORLESUNGEN

ÜBER

ALGEBRA

VON

DR. EUGEN NETTO,

O. Ö. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT ZU GIESSEN.

IN ZWEI BÄNDEN.

ERSTER BAND.

MIT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1896.

ALLE RECHTE,
EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Die „Vorlesungen über Algebra", deren erster Band hier vorliegt, sollen eine auf algebraische Methoden gegründete Einführung in die Untersuchungsgebiete liefern, welche den Hauptbereich der höheren Algebra bilden. Sie sollen mit den elementarsten Theilen dieser mathematischen Disciplin beginnen und bis zu den neueren, tiefer gehenden Fragen und Forschungen hinführen, indem sie die allgemeine Theorie der einzelnen algebraischen Gleichung sowie diejenige mehrerer algebraischer Gleichungen und so insbesondere auch die Elimination behandeln. Von dem umfangreichen, bisher angesammelten Stoffe hoffe ich nichts Wesentliches bei Seite gelassen und das Gebotene durchsichtig und übersichtlich angeordnet zu haben; dass mancherlei eigene Arbeiten in den Vorlesungen Platz gefunden haben, mag, wenn nicht anerkannt, dann doch entschuldigt werden.

Unter die algebraischen Hülfsmittel der Untersuchung rechne ich die Theorie der Determinanten in weitestem Umfange und setze eine vollkommene Beherrschung ihrer Methoden für die Benutzung dieser Vorlesungen voraus. Es wäre ja leicht gewesen, einer scheinbaren theoretischen Vollständigkeit zu Liebe auf wenige Seiten die Principien dieser Lehre zusammenzudrängen; in der Sache würde aber meiner Meinung nach doch nichts geändert worden sein, und deshalb verzichtete ich lieber darauf. Das Gleiche gilt von dem Wenigen, was aus den Elementen der Zahlentheorie benutzt wird; auch das habe ich einfach als bekannt vorausgesetzt.

Bei dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft war es noch nicht möglich, die Darstellung lediglich auf arithmetische Grundlagen zu stützen, wie das wohl erstrebenswerth sein möchte. Deshalb habe ich davon abgesehen, die nach dieser Seite hin gerichteten Untersuchungen systematisch vorzutragen und bin nur gelegentlich, wo es ohne Mühe geschehen konnte, darauf eingegangen.

Eine Behandlung der algebraischen Formen und der Theorie der Invarianten war nicht beabsichtigt; sie lag um so weniger in dem

Plane des Buches, als für dieses Gebiet bereits ausgezeichnete Darstellungen vorhanden sind, denen kaum etwas hinzuzufügen wäre. Dass aber dort und hier kleinere Gebiete gemeinsam durchforscht werden mussten, ist natürlich. Auch das Heranziehen der Gruppen- und der Substitutionen-Theorie habe ich vermieden; einmal um die algebraischen Methoden in möglichster Reinheit und möglichstem Umfange zu verwenden, und dann, um gerade für diese Forschungen den Boden erst zuzubereiten.

Das folgende ausführliche Inhaltsverzeichniss wird hinlängliche Auskunft über die Auswahl und die Gliederung des Stoffes geben, so dass ich hier nicht darauf einzugehen brauche. Ich will nur erwähnen, dass der zweite Band der Vorlesungen in erster Linie auf die algebraische Lösbarkeit der Gleichungen und auf die Theorie der Elimination eingehen wird.

Die Literaturangaben habe ich so vollständig, als es mir möglich war, dem Texte beigefügt.

Giessen.

Eugen Netto.

Inhaltsverzeichniss.

Einleitung.

Das Operationsgebiet (Vorlesung 1).

Erste Vorlesung. Die complexen Grössen. S. 1—15.

§ 1. Gesetze der Addition. § 2. Gesetze der Multiplication. § 3. Subtraction und Division. § 4. Zwei Einheiten. § 5. Bestimmung sämmtlicher Systeme. § 6. Beschränkung auf zwei Einheiten. § 7. Geometrische Darstellung complexer Grössen. Modul; Amplitude. § 8. Addition. § 9. Multiplication. § 10. Elementare Eigenschaften.

Erster Abschnitt.

Ganze Functionen und algebraische Gleichungen (Vorlesung 2—16).

Zweite Vorlesung. Ganze Functionen und algebraische Gleichungen. S. 15—25.

§ 12. Ganze Function. Algebraische Gleichung. Grad. § 13. Abbildung. § 14. Wurzeln, einfache und mehrfache. Fundamentalfrage. § 16. Stetigkeitssätze. § 17. Grenze für die Wurzeln. § 19. Ableitung. § 20. Aenderung der Function mit dem Argumente.

Dritte Vorlesung. Existenz von Wurzeln algebraischer Gleichungen. S. 25—38.

§ 23. Gleichungen ungeraden Grades. § 24. Cauchy'scher Existenzbeweis. § 26. Geometrische Darstellung. § 27. Gauss'scher Beweis. § 29. Zweiter Cauchy'scher Beweis. § 30. Punkte mehrfacher Wurzeln. § 32. Cauchy'scher Umkreisungssatz. § 35. Umschlingung.

Vierte Vorlesung. Zerlegung; Interpolation. S. 38—50.

§ 36. Zerlegung in Linearfactoren. § 37. Lagrange's Interpolationsformel. § 38. Euler'sche Formeln. § 39. Zerlegung in Partialbrüche. § 40. Directer Nachweis der Euler'schen Formeln. § 41. Cauchy's Interpolationsformel. § 44. Versagen derselben. § 45. Analoga zu den Euler'schen Formeln. § 46. Newton'sche Interpolationsformel.

Fünfte Vorlesung. Reductibilität und Irreductibilität. S. 51—64.

§ 47. Rationalitätsbereiche. Zerlegung. § 48. Zerlegung im Bereiche der rationalen Zahlen. § 50. Aufsuchung irreductibler Factoren. Kronecker'sche Methode. § 51. Vereinfachung. § 52. Eisenstein'scher Satz. § 53. Erweiterungen. § 58. Königsberger'sche Sätze.

Sechste Vorlesung. Grösster gemeinsamer Theiler zweier Functionen. Vielfache Wurzeln algebraischer Gleichungen. S. 64—75.

§ 61. Euklid'scher Algorithmus. § 62. Darstellung der Zwischenfunctionen. § 64. Gradbestimmung. § 67. Beispiel. § 68. Fundamentalsätze über den grössten gemeinsamen Theiler. § 69. Eindeutigkeit der Zerlegung. § 70. Vielfache Wurzeln. § 71. Zerlegung in Partialbrüche.

Siebente Vorlesung. Reihenentwickelung einer rationalen Function. S. 75—86.

§ 72. Problem über Zwischenfunctionen des Euklid'schen Algorithmus. § 73. Lösung. § 74. Determination. § 75. Unbestimmtheit. § 76. Darstellung. § 77. Recursionsformeln. § 78. Darstellung durch die Coefficienten der Functionen.

Achte Vorlesung. Recurrirende Reihen. S. 86—95.

§ 80. Ordnung recurrirender Reihen. § 81. Entwickelung rationaler Functionen nach fallenden Potenzen. § 82. Verschiedene Recursionsformeln. § 83. Recursionsformel bestimmend für den gemeinsamen Theiler von Zähler und Nenner. § 84. Charakteristische Bedingungen für einen Theiler ν^{ten} Grades. § 85. Geometrische Reihe. § 86. Vereinigung recurrirender Reihen. § 87. Independente Darstellung der Coefficienten. § 89. Entwickelung nach steigenden Potenzen.

Neunte Vorlesung. Die symmetrischen Functionen. S. 96—113.

§ 90. Elementare symmetrische Functionen. § 91. Potenzsummen. Newton'sche Gleichungen. § 92. Independente Darstellung; Waring'sche Formel. § 94. Umkehrung. § 96. Darstellung jeder symmetrischen durch die elementaren Functionen. § 97. Gauss' Beweis. § 99. Ausscheidung von Gliedern. Gewicht; isobarische Function. § 100. Beispiel. § 101. Cauchy's Beweis. § 103. Eindeutigkeit der Darstellung. § 104. Gebrochene symmetrische Functionen. § 105. Symmetrische Functionen gegebener rationaler Functionen. § 106. Cauchy's Darstellung.

Zehnte Vorlesung. Transformation von Gleichungen vermittels der symmetrischen Functionen. S. 113—133.

§ 107. Problem und Lösung. § 108. Gebrochene Function der Gleichungswurzeln als ganze Function dargestellt. § 109. Die Wurzeln werden um eine Constante vermehrt. § 110. Die Wurzeln werden mit einer Constanten multiplicirt. § 111. Die Wurzeln werden potenzirt. § 112. Reciproke Werthe der Wurzeln. § 113. Reciproke Gleichungen. § 114. Tschirnhausen'sche Transformation. § 115. Ihre Benutzung zur Wegschaffung von Gliedern. Gleichung dritten und vierten Grades. § 116. Gleichung fünften Grades. § 118. Function mehrerer Wurzeln. § 119. Summe je zweier Wurzeln. § 120. Wurzeldifferenzquadrate. § 121. Product aller Wurzeldifferenzen. § 122. Producte je einer Wurzel zweier gegebenen Gleichungen.

Elfte Vorlesung. Partielle Differentialgleichungen für die symmetrischen Functionen. S. 133—149.

§ 123. Methoden zur Aufstellung partieller Differentialgleichungen. § 124. Ableitung der Gleichungen. § 125. Sind sie charakteristisch? § 127. Ihre allgemeine Integration. § 128. Umwandlung der verschiedenen Formen in einander. § 133. Benutzung bei der Berechnung symmetrischer Functionen. § 134. Sie reichen dazu aus. § 135. Andere Methode der Berechnung.

Zwölfte Vorlesung. Die Resultanten und ihre Darstellung. S. 149—161.

§ 136. Resultanten als Functionen der Wurzeln. § 137. Elementare Eigenschaften. § 139. Darstellung als Determinanten $(m+n)^{\text{ten}}$ Grades. § 140. Euler'sche Methode. § 141. Bedingungen für die Existenz eines gemeinsamen Theilers. § 142. Bézout'sche reducirte Form. Cayley'sche Form. § 144. Reduction der Formen auf einander. § 145. Zweiter Nachweis dafür.

Dreizehnte Vorlesung. Eigenschaften der Resultanten. — Wurzelexistenzbeweis. S. 162—177.

§ 146. Elementare Eigenschaften. § 147. Lineare, gebrochene Substitution. § 148. Partielle Differentialgleichungen. § 149. Darstellung der gemeinsamen Wurzeln durch Resultanten. § 150. Die Eigenschaften werden unabhängig von der Wurzelexistenz bewiesen. § 153. Irreductibilität. § 154. Resultante von $f(z+u)$ und $g(z+u)$. § 156. Gordan's Beweis der Wurzelexistenz.

Vierzehnte Vorlesung. Die Discriminanten. S. 177—182.

§ 158. Definition, als Specialfall der Resultanten. § 159. Ausdruck als Determinante $(2n-1)^{\text{ten}}$ Grades. § 160. Ausdruck als Determinante $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. § 161. Darstellung durch die Wurzelpotenzsummen. § 162. Differentialgleichungen. § 163. Darstellung der vielfachen Wurzeln durch die Discriminanten. § 164. Discriminante eines Products.

Fünfzehnte Vorlesung. Die quadratischen Formen. S. 182—200.

§ 165. Quadratische Formen. Adjungirte, reciproke Form. Determinante. § 166. Transformation. Subdeterminanten. Rang. § 167. Reduction der Formen geringeren Ranges. § 168. Elementare Transformation. § 169. Reciproke Form und Analogon zu ihr. § 170. Adjuncte als Quadrat. § 171. Gleichzeitige Transformation der Form und der Reciproken. § 172. Aggregat von Quadraten. § 173. Vieldeutigkeit der Darstellung. § 174. Sylvester'sches Trägheitsgesetz. Arithmetischer Beweis. § 175. Jacobi's Beweis. § 176. Species; Signatur; definite und indefinite Form. § 177. Orthogonale Substitutionen. § 178. Gleichung mit reellen Wurzeln.

Zweiter Abschnitt.

Numerische Auflösung der Gleichungen (Vorlesung 16—25).

I. Trennung der Wurzeln (Vorlesung 16—21).

Sechzehnte Vorlesung. Grenzen für die Wurzeln. Das Rolle'sche Theorem. S. 201—216.

§ 180. Grenzen für den absoluten Betrag der Wurzeln. § 181. Grenzen für die positiven Wurzeln. § 183. Cauchy'sche Regel. § 185. Newton'sche Regel. Laguerre's Abänderung. § 186. Beispiel. § 187. Rolle'scher Satz. § 188. Herstellung von Gleichungen mit vorgeschriebenen Realitätsverhältnissen der Wurzeln. § 189. Legendre'sche Polynome. § 190. Weitere Anwendungen. § 193. Der Mittelwerthsatz.

Siebzehnte Vorlesung. Das Budan-Fourier'sche Theorem. S. 216—225.

§ 195. Zeichenfolgen und Zeichenwechsel. § 196. Das Budan-Fourier'sche Theorem. § 197. Descartes'scher Satz. § 198. Einfluss fehlender Glieder des Polynoms. § 199. Directer Beweis des Descartes'schen Satzes. § 200. Vermehrung der Wechsel bei Multiplication mit $(x - c)$. § 201. Anwendungen.

Achtzehnte Vorlesung. Das Sylvester'sche Theorem. — Biehler'sche Sätze. S. 225—237.

§ 202. Hülfsreihe. § 203. Folgen-Folge u. s. w. Beweis des Satzes. § 204. Grenzfälle. § 205. Prüfung der Bedingungen. § 207. Newton'scher Satz. Vervollständigter Satz. § 208. Aeusserste Grenzen. § 209. Biehler's Herstellung von Gleichungen mit reellen Wurzeln.

Neunzehnte Vorlesung. Das Sturm'sche Theorem. S. 238—261.

§ 210. Verallgemeinerte Sturm'sche Reihe. § 211. Beispiel. § 212. Sturm'sche Reihe. § 213. Vielfache Wurzeln. Prüfung der Bedingungen. § 214. Numerisches Beispiel. § 215. Gleichung zweiten Grades. § 216. Gleichung dritten Grades. § 217. Gleichung vierten Grades. § 218. Darstellung der Functionen der Sturm'schen Reihe. § 219. Vereinfachung der Ausdrücke. § 220. Regulärer Fall. § 221. Darstellung durch die Potenzsummen und durch die Coefficienten. § 222. Sylvester'sches Theorem. § 223. Excess. § 224. Ausdruck desselben. § 225. Sturm'scher Satz als Specialfall des Cauchy'schen Umkreisungssatzes. § 226. Analytische Darstellung. § 227. Darboux' Theorem.

Zwanzigste Vorlesung. Das Hermite'sche Theorem. S. 261—270.

§ 228. Einführung quadratischer Formen. § 229. Signatur zur Bestimmung der Anzahl reeller Wurzeln. § 231. Besondere Fälle. § 233. Geometrische Deutung. § 234. Hermite's Satz. § 235. Bézoutiante. § 236. Jacobi's Bemerkung.

Einundzwanzigste Vorlesung. Trennung der Wurzeln. — Rationale Wurzeln. S. 271—281.

§ 237. Trennung der reellen Wurzeln. § 238. Kleinste Differenz zweier reellen Wurzeln. Waring's und Cauchy's Methode. § 239. Kronecker'sche Untersuchungen. § 240. Newton's Methode zur Aufsuchung rationaler Wurzeln. § 241. Algorithmus. Zahlenbeispiel. § 242. Theorem über Gleichungen mit rationalen Wurzeln.

II. Näherungsweise Berechnung der Wurzeln (Vorlesung 22—25).

Zweiundzwanzigste Vorlesung. Die Newton'sche und die Bernoulli'sche Näherungsmethode. S. 281—300.

§ 243. Jede Trennungsmethode giebt Näherung. § 244. Newton'sche Methode. § 246. Beschränkung der Voraussetzungen. § 247. Newton'sche Formeln. § 248. Schema zur numerischen Berechnung. § 249. Beispiel. § 250. Grösse des Fehlers. § 251. Bernoulli'sche Methode; zwei Arten. § 252. $\sqrt[k]{s_k}$; reelle ungleiche Wurzeln. § 253. Reelle gleiche Wurzeln. § 254. Complexe Wurzeln. § 255. $s_{k+1} : s_k$; reelle Wurzeln; complexe Wurzeln. Berechnung der Amplitude. § 256. Gleichung für die ν Wurzeln höchsten Moduls. § 257. Berechnung der s_k; Willkür in den Anfangswerthen.

Dreiundzwanzigste Vorlesung. Algorithmen zur Berechnung der Wurzeln. S. 300—314.

§ 258. Herstellung von Algorithmen. § 259. Bedingungen der Convergenz. § 261. Inverse Algorithmen ergänzen sich. § 262. Grenzpunkte der Convergenz. § 264. Algorithmen, die zu allen Wurzeln führen. § 265. Newton'sche Näherung. § 266. Mehrfache Wurzeln. § 267. Algorithmus für quadratische Gleichungen. § 268. Algorithmen für allgemeine Gleichungen. § 269. Complexe Wurzeln.

Vierundzwanzigste Vorlesung. Iteration. S. 314—323.

§ 270. Begriff der Iteration. § 271. Eigenschaften iterirter Functionen. § 272. Iterirung gebrochener linearer Functionen. § 273. Iterirung gebrochener rationaler Functionen.

Fünfundzwanzigste Vorlesung. Die Untersuchungen von Lagrange. S. 323—333.

§ 274. Gleichung der Wurzeldifferenzquadrate. § 275. Satz von Waring. § 276. Berechnung complexer Wurzeln. § 277. Polynom der Wurzeldifferenzquadrate als Resultante. § 278. Lösung der Gleichungen durch Kettenbrüche. § 279. Numerisches Beispiel. § 280. Zeichenwechsel in der transformirten Gleichung. § 281. Berechnung des Theilnenners.

Dritter Abschnitt.

Algebraische Lösung der Gleichungen (Vorlesung 26—29).

Sechsundzwanzigste Vorlesung. Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades. S. 334—345.

§ 282. Gleichungen zweiten Grades. § 283. Gleichungen dritten Grades. Tschirnhausen'sche Methode. § 284. Euler'sche Methode. § 285. Discussion der Lösung. § 287. Der irreducible Fall. Goniometrische Lösung. § 288. Lagrange'sche Methode. Innerste Wurzel. § 289. Gleichungen vierten Grades. Euler'sche Methode. § 290. Descartes'sche Methode. § 291. Lagrange'sche Methode. § 292. Discussion der Lösung.

Siebenundzwanzigste Vorlesung. Einheitswurzeln. S. 345—358.

§ 294. Einheitswurzeln. § 295. Eigenschaften. Primitive und nichtprimitive Wurzeln. § 296. Primitive Wurzeln bei Primzahlen und Primzahlpotenzen. § 297. Allgemeiner Fall. Bestimmung von $\varphi(m)$. § 298. Wurzeln zu gegebenen Exponenten gehörig. § 299. Kennzeichen durch die Exponenten. § 300. Goniometrische Lösung. § 301. $z^m + 1 = 0$. § 302. Gleichung der primitiven Wurzeln. § 303. Specialfall $m = p \cdot q$. § 304. Eigenthümlichkeiten der Kreistheilungsgleichung. § 305. $F_m(+1)$ und $F_m(-1)$. § 306. Reductionsformeln. § 307. Kronecker'scher Satz.

Achtundzwanzigste Vorlesung. Kreistheilungsgleichung. Methode von Gauss. S. 359—378.

§ 308. Verschiedene Formen der Gleichung. Kreistheilungsgleichung. § 309. Eisenstein's Irreductibilitätsbeweis. § 310. Kronecker's Beweis. § 311. Arndt's Beweis. § 312. Kronecker's allgemeinerer Irreductibilitätssatz. § 313. Reduction durch reciproke Gleichungen. § 314. Perioden und ihre Eigenschaften. § 315. Elemente der Lösung. § 316. Zerfällung von $(p-1)$ in drei Factoren. § 317. Gauss'sche Lösung. § 318. Beispiel $p = 17$. § 319. Bemerkungen.

Neunundzwanzigste Vorlesung. Kreistheilungsgleichung. Methode von Lagrange und Jacobi. S. 378—385.

§ 320. Lagrange'sche Resolvente. § 321. Eigenschaften. § 322. Lagrange'sche Lösung. § 323. Elemente der Lösung. § 324. Directe Lösung. § 325. Gleichung für zwei Perioden. § 326. Kreistheilungspolynom als Aggregat zweier Quadrate.

Namen- und Sachregister. S. 386—388.

Erste Vorlesung.

Die complexen Grössen.

§ 1. Wir betrachten zunächst nur das Gebiet der reellen Zahlen. Dieses reproducirt sich durch die elementaren Rechnungsoperationen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division, so dass, wenn $a, b, c, \cdots$ beliebige Grössen des reellen Zahlenbereiches sind, die Resultate

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}$$

ebenfalls dem Gebiete angehören. Nur ist hierbei festzuhalten, dass in dem Quotienten $\frac{a}{b}$ der Nenner den Werth 0 nicht annehmen darf, da sonst $\frac{a}{b}$ keinen Sinn hat.

Für die Addition bestehen zwei Gesetze, aus denen geschlossen werden kann, dass bei der Bildung einer Summe aus einer beliebigen endlichen Anzahl von Summanden die Reihenfolge der Operationen ohne Einfluss auf den Werth der Summe ist. Das erste, das commutative Gesetz, wird durch die Gleichung

$$a + b = b + a, \tag{1}$$

das zweite, das associative, durch die Gleichung

$$(a + b) + c = (a + c) + b \tag{2}$$

ausgedrückt.

Drei Grössen a, b, c lassen sich auf die folgenden zwölf verschiedenen Arten zu einer Summe vereinigen:

$(a+b)+c$, $(a+c)+b$, $(b+a)+c$, $(b+c)+a$, $(c+a)+b$, $(c+b)+a$,
$a+(b+c)$, $a+(c+b)$, $b+(a+c)$, $b+(c+a)$, $c+(a+b)$, $c+(b+a)$,

so dass die Möglichkeit besteht, je nach der Ausführung der Summation auch zwölf verschiedene Werthe zu erhalten. Nun gehen aber die 6 Resultate der unteren Zeile aus denen der oberen durch die Anwendung von (1) auf die beiden vorhandenen Summanden hervor; wegen (2) stimmen ferner die beiden ersten Summen der oberen Zeile,

ebenso die beiden mittleren und auch die beiden letzten unter einander überein. Da endlich, wiederum wegen (1), auch noch

$$(a + b) + c = (b + a) + c, \quad (a + c) + b = (c + a) + b$$

ist, so folgt bei drei Summanden die Unabhängigkeit des Summenwerthes von der Art der Ausführung der Summation. Man ist daher berechtigt, die Summe kurz und unzweideutig

$$a + b + c$$

zu schreiben.

Bei n Summanden giebt es

$$2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n - 6)$$

Möglichkeiten, die Summe zu bilden*). Auch hier gilt derselbe Satz über die Unabhängigkeit des Resultates von der Operationenfolge. Wir nehmen an, er wäre wie für 3 so auch für $4, 5, \cdots (n - 1)$ Summanden bereits bewiesen, so dass in diesen Fällen die Summe

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_\varkappa \qquad (\varkappa = 4, 5, \cdots n - 1)$$

einen bestimmten von der Ausführung der Operation unabhängigen Sinn hat. Dann stellt sich jede Summe aus n Summanden vor der Ausführung der letzten Operation als Resultat einer Addition zweier Grössen dar, etwa $A_1 + A_2$, wobei jeder Summand A_1, A_2 eine Summe von weniger als n Summanden ist. Nach (1) können wir diejenige der beiden Grössen, etwa A_2, welche a_n enthält, an die zweite Stelle gesetzt denken; dann innerhalb A_1 und A_2 die etwa vorhandenen Klammern weglassen und in A_2 das Element a_n als letztes nehmen, so dass $A_2 = A_2' + a_n$ entsteht; endlich können wir auf Grund der Voraussetzung über $(n - 1)$ Summanden

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= (A_1 + A_2') + a_n = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}) + a_n \\ &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

schreiben.

Hiermit ist die behauptete Unabhängigkeit dargethan.

---

*) Dies erkennt man leicht: Zunächst können die $n!$ Permutationen der n Summanden aufgeschrieben werden; jede derselben giebt eine der Folgen der hinzuschreibenden Summanden an, und es kommt nur noch auf die Vertheilung der Klammern in dieser Folge an; in jeder Klammer dürfen dabei immer nur zwei Summanden, d. h. einzelne Grössen oder andere Klammern stehen. Durch strenge Induction findet man die Anzahl der Vertheilungsmöglichkeiten mittels der Borchardt'schen erzeugenden Function gleich dem Coefficienten von x^n in der Entwickelung von

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4x})$$

nach steigenden Potenzen von x. Dadurch ergiebt sich dann das oben angeführte Resultat.

§ 2. Die beiden für die Multiplication entsprechend gebildeten und benannten Gesetze werden durch die Gleichungen

$$ab = ba, \tag{3}$$

$$(ab)c = (ac)b \tag{4}$$

gegeben, und aus ihnen folgt wieder nach der eben auseinandergesetzten Schlussweise die Einwerthigkeit des Productes mehrerer Factoren bei beliebiger Anordnung der Operationen. Nimmt man zu (3) und (4) noch das neu auftretende distributive Gesetz

$$(a + b)c = ac + bc \tag{5}$$

hinzu, welches die Multiplication mit der Addition verbindet, so sind durch diese 5 Gesetze die Eigenschaften der Summen- und der Productbildung festgelegt.

§ 3. Für die Subtraction und die Division gelten die Definitionsgleichungen

$$(a - b) + b = a, \qquad \frac{a}{b} \cdot b = a. \tag{6}$$

Bei der Division ist die bereits oben erwähnte Einschränkung festzuhalten, dass der Divisor b von Null verschieden sein muss.

Da übrigens in unserem Gebiete die negativen und die gebrochenen Zahlen, nämlich $(-b)$ sowie $\frac{1}{b}$ vorkommen, so können wir von der Betrachtung der Subtraction und der Division ganz absehen, indem durch

$$a - b = a + (-b), \qquad \frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

beide Operationen vermieden werden können.

§ 4. Beschränkt man sich auf das Gebiet der reellen Zahlen, dann erleidet eine grosse Anzahl von fundamentalen algebraischen Sätzen Ausnahmen, so z. B. der Satz, dass zu jeder Grösse a eine andere gehört, deren Quadrat jenes a ist; dieser Satz gilt in dem bisher besprochenen Bereiche nur, wenn a positiv oder Null ist. Diese Sätze bekommen dagegen durchgängig Geltung, sobald man das Gebiet der Grössen in passender Art erweitert. Das soll jetzt durchgeführt werden.

Die bisher betrachteten Zahlen können durch die Anwendung einer endlichen oder einer unendlichen Anzahl der fundamentalen Operationen aus der 1 abgeleitet werden. Wir führen neben dieser eine neue Einheit j ein und betrachten das Gebiet aller Zahlen

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 j,$$

in denen α_1, α_2 beliebige reelle Grössen bedeuten. Eine derartige Erweiterung ist nur dann von Werth, wenn das neue Gebiet wirklich umfassender wird, als das frühere, d. h. wenn j nicht schon unter den

reellen Zahlen enthalten ist; wenn ferner auch dieses Gebiet sich durch die elementaren Rechnungsoperationen reproducirt; und wenn endlich auch in dem neuen, erweiterten Bereiche die besprochenen Gesetze der elementaren Operationen gelten.

Es ist also zunächst nothwendig, dass mit

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 j, \quad b = \beta_1 + \beta_2 j$$

auch die Summe beider Grössen in dem neuen Gebiete vorkommt. Wir definiren nun die Summe von a und b durch die Gleichung

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1) + (\alpha_2 + \beta_2) j$$

und erkennen aus dieser naturgemässen Erweiterung der Addition, dass nicht nur unsere eben ausgesprochene Forderung befriedigt ist, sondern dass auch die Gesetze der Addition

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = (a + c) + b$$

bestehen bleiben, weil sie für die reellen Bestandtheile $\alpha, \beta, \cdots$ Geltung haben.

Bei der Multiplication erhalten wir unter der Voraussetzung, dass die formalen Gesetze der reellen Zahlen auch hier gelten,

$$ab = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) j + \alpha_2\beta_2 jj;$$

soll die Summe auf der rechten Seite wieder dem Gebiete angehören, so muss nothwendiger Weise

$$jj = u_1 + u_2 j \tag{7}$$

gesetzt werden, wobei u_1, u_2 reelle Zahlen bedeuten. Je nach der Wahl von u_1, u_2 können also verschiedene Productbildungen

$$ab = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 u_1) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_2\beta_2 u_2) j$$

auftreten.

Nun ändert sich aber unser erweitertes Zahlengebiet in seiner Gesammtheit und seinem Umfange nicht, wenn man statt der Einheit j die neue Einheit

$$j_1 = j - \tfrac{1}{2} u_2$$

einführt, da ja

$$\alpha_1 + \alpha_2 j = \left(\alpha_1 + \tfrac{1}{2}\alpha_2 u_2\right) + \alpha_2 j_1$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_2 j_1 = \left(\alpha_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_2 u_2\right) + \alpha_2 j$$

ist. Diese Abänderung hat den Vortheil im Gefolge, dass die Multiplicationsregel im neuen Gebiete

$$j_1 j_1 = j^2 - u_2 j + \tfrac{1}{4} u_2^2 = \tfrac{1}{4} u_2^2 + u_1$$

einfacher wird, als die für j aufgestellte. Sie zeigt, dass das Quadrat von j_1 eine reelle Zahl ist. Wäre diese Zahl positiv oder Null, so gehörte auch j_1 und folglich j dem reellen Zahlengebiete an, und es träte sonach keine Erweiterung desselben ein. Soll dies vermieden werden, so haben wir

$$j_1 j_1 = -k^2$$

zu setzen, indem wir dabei unter k eine reelle Zahl verstehen. Jetzt ändern wir die Einheit j_1 wiederum ab, indem wir ohne Eingriff in den Gebietsumfang

$$i = \frac{j_1}{k}$$

benutzen; der aus 1 und i gebildete Bereich ist wieder identisch mit dem aus 1 und j_1 oder dem aus 1 und j gebildeten. Dies ist deswegen geschehen, weil die Multiplicationsregel hier besonders einfach lautet, nämlich

$$ii = -1. \tag{8}$$

Da jede Gleichung (7) auf (8) führt, so ist dies ein Zeichen dafür, dass es verschiedene Gebiete dieser Art nicht giebt.

Das aus 1 und i gebildete Gebiet nennen wir das gewöhnliche complexe, oder kurz das complexe Gebiet. In ihm ist

$$\begin{aligned} ab &= (\alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1)i, \\ (ab)c &= (\alpha_1\beta_1\gamma_1 - \alpha_1\beta_2\gamma_2 - \alpha_2\beta_1\gamma_2 - \alpha_2\beta_2\gamma_1) \\ &\quad + (\alpha_1\beta_1\gamma_2 + \alpha_1\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_1\gamma_1 - \alpha_2\beta_2\gamma_2)i, \end{aligned}$$

und daraus erkennt man die Gültigkeit der Regeln (3) und (4).

Es handelt sich noch um die Ausführung der Division. Die Gleichung

$$\frac{1}{\alpha_1 + \alpha_2 i} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 i}{(\alpha_1 + \alpha_2 i)(\alpha_1 - \alpha_2 i)} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2 i}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

zeigt, dass auch die Division stets innerhalb des Gebietes vollzogen werden kann, sobald $\alpha_1^2 + \alpha_2^2$ von Null verschieden ist. Da nun α_1, α_2 reelle Grössen sind, so ist auch hier, wie im Gebiete der reellen Grössen, nur die Division durch die Null unausführbar; denn aus $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 0$ folgt auch $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$; $a = \alpha_1 + \alpha_2 i = 0$.

§ 5. Es könnte den Anschein haben, als ob unsere Untersuchung nicht allgemein durchgeführt wäre, da wir von vorn herein die 1 als zu unserem Gebiete gehörig benutzt haben. Man könnte also versuchen, zwei Einheiten e_1, e_2 einzuführen, von denen keine reell ist, und zwischen denen keine lineare Gleichung

$$\tau_1 e_1 + \tau_2 e_2 = 0 \tag{9}$$

mit von Null verschiedenen reellen Coefficienten τ besteht. In diesem Falle handelt es sich um den Bereich der Zahlen

$$\varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_2;$$

in ihm sollen die oben aufgestellten Gesetze Gültigkeit behalten. An erster Stelle ist eine Festsetzung hinsichtlich der Multiplication in der Form

$$\begin{aligned} e_1^2 &= a_1 e_1 + a_2 e_2, \\ e_1 e_2 &= b_1 e_1 + b_2 e_2, \quad e_2 e_1 = b_1' e_1 + b_2' e_2, \\ e_2^2 &= c_1 e_1 + c_2 e_2 \end{aligned} \tag{10}$$

erforderlich, damit alle Producte unseres Gebietes

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2)$$

wieder die gewünschte Form annehmen. Weiter müssen wir, um dem aus (3) folgenden besonderen Falle $e_1 e_2 = e_2 e_1$ Rechnung zu tragen, $b_1 = b_1'$, $b_2 = b_2'$ setzen; dadurch ist dann (3) auch gleich allgemein befriedigt, da jetzt

$$\begin{aligned} (\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2) &= \alpha_1\beta_1 e_1^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) e_1 e_2 + \alpha_2\beta_2 e_2^2 \\ &= \alpha_1\beta_1 e_1^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) e_2 e_1 + \alpha_2\beta_2 e_2^2 \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Die Bedingung (4) fordert, wie man auf dieselbe Art sieht, auch nur die Erfüllung der einen Gleichung

$$e_1(e_1 e_2) = (e_1 e_1) e_2,$$

welche in die beiden Forderungen zwischen den reellen Coefficienten

$$\begin{aligned} a_2 c_1 &= b_1 b_2, \\ a_1 b_2 + a_2 c_2 &= a_2 b_1 + b_2^2 \end{aligned}$$

zerfällt und allgemein durch die Annahme

$$\begin{aligned} a_1 &= \lambda\nu + \mu\varrho, \quad b_1 = \varkappa\mu, \quad c_1 = \varkappa\nu, \\ a_2 &= \lambda\mu, \qquad\quad b_2 = \lambda\nu, \quad c_2 = \varkappa\mu - \nu\varrho \end{aligned}$$

befriedigt wird. Somit erhält man an Stelle von (10) als Multiplicationsfestsetzungen, die unseren Bedingungen genügen,

$$\begin{aligned} e_1^2 &= (\lambda\nu + \mu\varrho) e_1 + \lambda\mu e_2, \\ e_1 e_2 &= \varkappa\mu e_1 + \lambda\nu e_2, \\ e_2^2 &= \varkappa\nu e_1 + (\varkappa\mu - \nu\varrho) e_2. \end{aligned} \tag{10a}$$

Hieraus kann man jedoch folgern

$$\frac{\mu}{\nu} = \frac{e_1 - (\lambda\nu + \mu\varrho)}{e_2 - \varkappa\mu} = \frac{e_1 - \lambda\nu}{e_2 - (\varkappa\mu - \nu\varrho)}, \tag{11}$$

d. h. die Existenz einer linearen Beziehung, welche zwischen e_1 und e_2 entgegen der in (9) gemachten Annahme besteht. Diesem Dilemma können wir nur durch die Annahme $\mu = 0$, oder $\nu = 0$, oder durch

$\varrho = 0$ ausweichen. Aus einer der beiden ersten Annahmen z. B. aus $\mu = 0$ würde

$$(e_1 - \lambda\nu)\, e_1 = 0$$

folgen, d. h. e_1 bezw. e_2 müsste eine reelle Zahl sein, sobald es, wie wir annehmen, aus dem Verschwinden eines Products folgt, dass einer der Factoren verschwindet. Der Annahme nach sollten aber e_1, e_2 nicht reell sein. Man hat deshalb $\varrho = 0$ zu setzen und findet

$$\begin{aligned} e_1^2 &= \lambda\nu e_1 + \lambda\mu e_2, \\ e_1 e_2 &= \varkappa\mu e_1 + \lambda\nu e_2, \\ e_2^2 &= \varkappa\nu e_1 + \varkappa\mu e_2. \end{aligned} \tag{10^b}$$

Hieraus ergiebt sich weiter

$$\varkappa e_1^2 = \lambda e_2^2;$$

hätten nun $\varkappa$ und λ das gleiche Vorzeichen, so könnte wieder eine Gleichung von der Form (9) mit reellen Coefficienten gefolgert werden; wir müssen deshalb als Zusatzbedingung die Ungleichung

$$\varkappa \cdot \lambda < 0 \tag{10^c}$$

aufstellen. (10^b) und (10^c) liefern dann alle gewünschten Systeme. Wir können jetzt leicht erkennen, dass wir nichts Neues erlangt haben. (10^b) liefert

$$\begin{aligned} (\lambda\nu - e_1)\, e_1 + \lambda\mu e_2 &= 0, \quad \text{bezw.} \quad (\varkappa\mu - e_2)\, e_1 + \lambda\nu e_2 = 0 \\ \varkappa\mu e_1 + (\lambda\nu - e_1)\, e_2 &= 0, \qquad\qquad \varkappa\nu e_1 + (\varkappa\mu - e_2)\, e_2 = 0; \end{aligned}$$

hieraus folgt

$$\begin{aligned} (e_1 - \lambda\nu)^2 &= \varkappa\lambda\mu^2, \quad \text{bezw.} \quad (e_2 - \varkappa\mu)^2 = \varkappa\lambda\nu^2, \\ e_1 &= \lambda\nu \pm \mu\sqrt{\varkappa\lambda}, \qquad\qquad e_2 = \varkappa\mu \pm \nu\sqrt{\varkappa\lambda}, \end{aligned}$$

so dass e_1 wie e_2 zu unseren gewöhnlichen complexen Zahlen gehören. Die Grösse 1, welche in unserem Gebiete durch $\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2$ dargestellt und durch die, für beliebige α_1, α_2 geltende Gleichung

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2)\,(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$$

definirt sei, lässt sich leicht berechnen. Man braucht nur zur Bestimmung von ε_1, ε_2 die besonderen Gleichungen

$$e_1\,(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2) = e_1, \qquad e_2\,(\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_2 e_2) = e_2$$

zu verwenden und erhält für die Coefficienten ε die Werthe

$$\varepsilon_1 = \frac{\nu}{\lambda\nu^2 - \varkappa\mu^2}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{-\mu}{\lambda\nu^2 - \varkappa\mu^2},$$

so dass man

$$1 = \frac{\nu e_1 - \mu e_2}{\lambda\nu^2 - \varkappa\mu^2}$$

erhält, wobei wegen (10^c) der Nenner nicht verschwinden kann.

§ 6. Die Frage nach den Eigenschaften und der Darstellung der aus drei unabhängigen Einheiten gebildeten Systeme

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

ist schwieriger zu beantworten. Die Herren Weierstrass und Dedekind haben dies Problem in den Gött. Nachr. von 1884, 1885, 1887 behandelt. Wir wollen hier nur eine Eigenthümlichkeit dieser Systeme herleiten, auf Grund deren wir dann von der Einführung solcher allgemeinen Zahlen absehen können.

Die Nothwendigkeit, den Producten $e_1 e_1$, $e_1 e_2$, $e_1 e_3$, $\cdots$ wieder die Form

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

zu geben, damit die Multiplication innerhalb unseres neuen Grössengebietes ausführbar sei, fordert die Existenz von sechs Gleichungen der Form

$$\begin{aligned}
e_1^2 &= a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3, \\
e_1 e_2 &= b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3 = c_2 e_1, \\
e_1 e_3 &= c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 = c_3 e_1, \\
e_2^2 &= d_1 e_1 + d_2 e_2 + d_3 e_3, \\
e_2 e_3 &= f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3 = e_3 e_2, \\
e_3^2 &= g_1 e_1 + g_2 e_2 + g_3 e_3,
\end{aligned}$$

bei deren Aufstellung wir sogleich dem commutativen Gesetze der Multiplication Rechnung getragen haben. Aus ihnen folgt

$$\begin{aligned}
(a_1 - e_1) e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 &= 0, \\
b_1 e_1 + (b_2 - e_1) e_2 + b_3 e_3 &= 0, \\
c_1 e_1 + c_2 e_2 + (c_3 - e_1) e_3 &= 0,
\end{aligned}$$

und es muss also die Determinante dieses Gleichungssystems

$$\begin{vmatrix} a_1 - e_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 - e_1 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 - e_1 \end{vmatrix} = -e_1^3 + c_1^2 (a_1 + b_2 + c_3) - e_1 (b_2 c_3 - b_3 c_2 + \cdots) + (a_1 b_2 e_3 - a_1 b_3 c_2 + \cdots)$$

den Werth Null haben. Aus der elementaren Algebra ist bekannt, dass das Polynom

$$-x^3 + x^2 (a_1 + b_2 + c_3) - x (b_2 c_3 - b_3 c_2 + \cdots) + (a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + \cdots)$$

mit reellen Coefficienten identisch in die Form

$$(x_1 - x)(x_2 - x)(x_3 - x)$$

gebracht werden kann, in welcher x_1, x_2, x_3 drei reelle oder auch eine reelle und zwei gewöhnliche complexe Grössen bedeuten. Daher kann man die Determinanten-Gleichung

$$(x_1 - e_1)(x_2 - e_1)(x_3 - e_1) = 0$$

schreiben und ebenso findet man

$$(y_1 - e_2)(y_2 - e_2)(y_3 - e_2) = 0,$$
$$(z_1 - e_3)(z_2 - e_3)(z_3 - e_3) = 0;$$

die x, y, z sind reelle oder gewöhnliche complexe Grössen. Lässt man nun auch in diesem Gebiete den Satz gelten, dass ein Product nur dann verschwinden kann, wenn einer seiner Factoren verschwindet, so folgt aus den letzten drei Gleichungen, dass e_1, e_2, e_3 gewöhnliche complexe Grössen bedeuten, und dass sonach das Gebiet

$$x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

mit dem durch die Einheiten 1 und i constituirten identisch ist. Will man umgekehrt neue Einheiten einführen, so muss jener Satz vom Verschwinden des Products fallen. Als Beispiel hierfür mag Folgendes dienen. Wir setzen als Multiplicationsgleichungen fest:

$$e_1^2 = e_2 + e_3, \quad e_1 e_2 = e_3,$$
$$e_2^2 = e_3 + e_1, \quad e_2 e_3 = e_1,$$
$$e_3^2 = e_1 + e_2, \quad e_3 e_1 = e_2;$$

dann gelten alle aufgestellten Multiplicationsregeln. Man findet in diesem Gebiete die Gültigkeit der Gleichungen

$$(e_1 + e_2 - e_3) e_3 = 0, \quad (e_1 - e_2 + e_3) e_2 = 0, \cdots,$$

trotzdem keiner der auftretenden Factoren gleich Null ist. Setzt man

$$\eta_1 = -e_1 + e_2 + e_3, \quad \eta_2 = e_1 - e_2 + e_3, \quad \eta_3 = e_1 + e_2 - e_3,$$

so erhält man für die Einheiten η die noch übersichtlicheren Multiplicationsgleichungen

$$\eta_1^2 = 2(-\eta_1 + \eta_2 + \eta_3), \quad \eta_1 \eta_2 = 0,$$
$$\eta_2^2 = 2(\eta_1 - \eta_2 + \eta_3), \quad \eta_2 \eta_3 = 0,$$
$$\eta_3^2 = 2(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3), \quad \eta_3 \eta_1 = 0.$$

Dieselben Betrachtungen hätten wir auch schon im vorigen Paragraphen bei der Behandlung von e_1 und e_2 anstellen können. Es wäre dann aus $\mu = 0$ oder $\nu = 0$ in (10^a), d. h. aus

$$e_1[e_1 - \lambda\nu] = 0 \quad \text{oder} \quad e_2[e_2 - \varkappa\mu] = 0$$

nicht nothwendig gefolgt, dass jede der Grössen e_1, e_2 reell ist, und wir hätten den Uebergang von (10^a) zu (10^b) nicht zu machen brauchen.

Wir wollen aber für unser Gebiet den Satz, dass ein Product nur verschwindet, wenn ein Factor verschwindet, durchaus allgemein gelten lassen und sind dann darauf angewiesen, im Gebiete der aus 1 und i gebildeten, gewöhnlichen complexen Zahlen zu bleiben.

§ 7. Es ist nunmehr angezeigt, auf die Theorie der gewöhnlichen complexen Zahlen genauer einzugehen, und zwar wollen wir zunächst die geometrische Darstellung derselben besprechen.

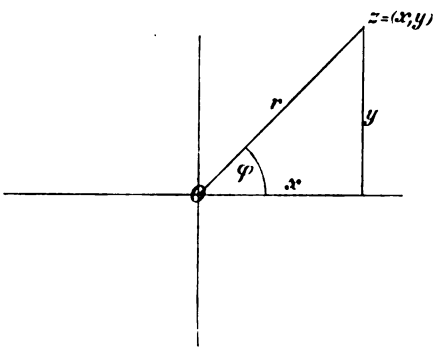
Wenn man in einer Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem einführt, die Abscissen mit x und die Ordinaten mit y bezeichnet, so kann man jeden Punkt dieser Ebene durch ein reelles Werthepaar (x, y) und umgekehrt durch jeden Punkt ein reelles Werthepaar darstellen. Die Strecke, welche den Nullpunkt mit dem Punkte (x, y) verbindet, wollen wir als geometrische Repräsentantin der Grösse

$$z = x + iy$$

ansehen. Die Darstellung reeller Grössen als Strecken einer geraden Linie mit demselben Anfangspunkte ist unter unserer Festsetzung als besonderer Fall enthalten. Die absolute Länge der von O nach (x, y) gehenden Strecke wollen wir den Modul von z oder den absoluten Betrag von z nennen und durch $|z|$ bezeichnen. Man hat daher

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

wobei der absolute Werth der Quadratwurzel zu nehmen ist. Für reelle Werthe x ist $|x|$ gleich dem absoluten Werthe von x. Hieraus ergiebt sich sofort durch Einführung von Polarcoordinaten eine neue Ausdrucksweise für z. Wir bezeichnen mit r die Länge des von O nach (x, y) gehenden Radius-Vectors und mit φ den Winkel, welchen dieser mit der positiven Richtung der Abscissenaxe bildet; dann ist



$$(12) \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi; \quad z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Um die Schreibweise abzukürzen möge durchgehends, wenn kein Missverständniss zu befürchten ist,

$$\cos\vartheta + i\sin\vartheta = \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\vartheta$$

geschrieben und also

$$(13) \qquad z = r\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\varphi$$

gesetzt werden. Hier ist r dem Modul $|z|$ gleich und daher stets eine absolute Grösse. φ wollen wir die Amplitude der complexen

Grösse z nennen und mit ampl. z bezeichnen. (13) möge die Normalform von $x + iy$ heissen.

(12) zeigt, dass durch r und φ die Werthe von x und y, und damit auch der Werth von z eindeutig bestimmt sind. Ebenso wird durch x und y

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

eindeutig gegeben, während die beiden Gleichungen

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

den Winkel φ nur bis auf additive Vielfache von $\pm 2\pi$ festlegen. Die Darstellung

$$\varphi = \text{arc tang}\,\frac{y}{x}$$

liefert die Amplitude sogar nur bis auf Vielfache von $\pm\pi$, also nicht in ausreichender Art.

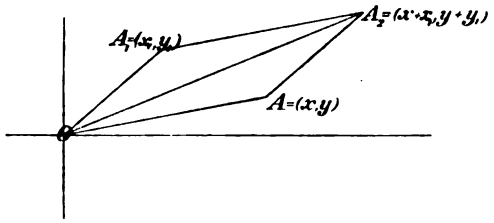
§ 8. Die geometrische Darstellung einer Summe stützt sich auf die Formel

$$z_2 = z + z_1 = (x + iy) + (x_1 + iy_1) = (x + x_1) + i\,(y + y_1)$$

und zeigt, dass die Abscisse (Ordinate) einer Summe gleich der Summe der Abscissen (Ordinaten) ihrer Summanden ist. Setzen wir

$z = OA, z_1 = OA_1, z_2 = OA_2$,

dann folgt, dass OAA_2A_1 ein Parallelogramm ist, bei dem die von O ausgehenden Seiten die Summanden, die von O ausgehende Diagonale die Summe darstellen. Die Erweiterung der Construction auf mehr Summanden ist einfach. Ebenso einfach ergiebt sich die Construction der Differenz $OA_1 = z_2 - z$ aus OA_2 und OA.



Aus elementaren geometrischen Dreieckssätzen wird es augenscheinlich, dass der Modul einer Summe von zwei Summanden kleiner oder höchstens gleich der Summe, und grösser oder mindestens gleich der Differenz der Summanden ist. Der erste Grenzfall tritt nur dann ein, wenn z und z_1 gleiche Amplituden besitzen; der zweite nur dann, wenn die Differenz der Amplituden von z und z_1 gleich $\pm\pi$ ist. Analytisch lässt sich dies so begründen. Es ist

$$(x^2+y^2)(x_1^2+y_1^2)-(xx_1+yy_1)^2=(xy_1-x_1y)^2\geqq 0,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}\geq xx_1+yy_1\geq -\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2},$$

$$(x^2+y^2)+2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}+(x_1^2+y_1^2)>(x^2+2xx_1+x_1^2)+(y^2+2yy_1+$$

$$\geq(x^2+y^2)-2\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x_1^2+y_1^2}+(x_1^2+y$$

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x_1^2+y_1^2}\geqq\sqrt{(x+x_1)^2+(y+y_1)^2}\geq\left|\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x_1^2+y_1^2}\right|$$

wenn alle Wurzeln positiv genommen werden. Die letzte Formel liefert den ausgesprochenen Satz, nämlich

$$|z|+|z_1|>z+z_1|\geq||z|-|z_1||,$$

und seine Grenzfälle werden aus $xy_1-x_1y=0$ abgeleitet.

Allgemein gilt die Formel

$$\sum_{\lambda=1}^{n}|z_\lambda\geqq\left|\sum_{\lambda=1}^{n}z_\lambda\right|.$$

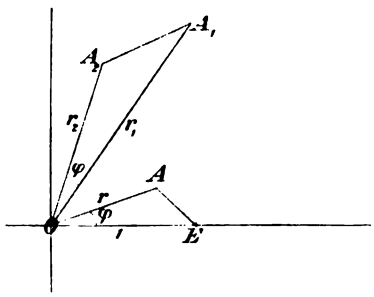
§ 9. Die geometrische Behandlung der Multiplication knüpft am einfachsten an die Darstellung der complexen Grössen in ihrer Normalform an. Man hat wegen $i^2=-1$ das Resultat

$$r_1\left[{}_s^c\varphi_1\right]\cdot r_2\left[{}_s^c\varphi_2\right]$$

$$=r_1r_2\{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_2)\}$$

$$=r_1r_2\left[{}_s^c(\varphi_1+\varphi_2)\right], \tag{14}$$

d. h. es ist der Modul eines Products von zwei (und dann auch von mehr) Factoren gleich dem Producte der Moduln der Factoren, seine Amplitude gleich der Summe der Amplituden der Factoren.



Geometrisch gestaltet sich die Darstellung der Multiplication folgendermassen. Ist

$$OA=x+iy=z,\ OA_1=x_1+iy_1=z_1,$$

$$OA_2=z\cdot z_1=x_2+iy_2=z_2,$$

dann folgt gemäss (14) $r_2=r\cdot r_1$ oder $r_2:r_1=r:1$.

Zieht man also AE so, dass $OE=1$ ist, dann sind die beiden Dreiecke

$$OEA \quad \text{und} \quad OA_1A_2$$

einander ähnlich. Denn es ist ausser der Proportionalität der von O ausgehenden Seiten noch wegen (14)

$$A_2OA_1=\text{ampl. } z_2-\text{ampl. } z_1=\text{ampl. } z=AOE.$$

Man hat daher, um OA_2 zu construiren, nur über OA_1 ein, dem Dreieck OEA ähnliches und ähnlich gelegenes Dreieck OA_1A_2 zu zeichnen; OA_2 ist dann das gewünschte Product.

Für mehrere Factoren erhält man die Formel

$$(14^a) \qquad \prod_{\lambda=1}^{m} r_\lambda \left[{}^{c}_{s}\varphi_\lambda\right] = \prod_{\lambda=1}^{m} r_\lambda \cdot \left[{}^{c}_{s}\sum_{\lambda=1}^{m}\varphi_\lambda\right]$$

und ins Besondere

$$(14^b) \qquad \left(r\left[{}^{c}_{s}\varphi\right]\right)^m = r^m\left[{}^{c}_{s}(\varphi m)\right].$$

Die Division erledigt sich leicht durch die Bemerkung, dass

$$\frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi,$$

d. h.

$$\frac{1}{\left[{}^{c}_{s}\varphi\right]} = \left[{}^{c}_{s}(-\varphi)\right]$$

ist. Danach wird

$$(15) \qquad \frac{r_1\left[{}^{c}_{s}\varphi_1\right]}{r_2\left[{}^{c}_{s}\varphi_2\right]} = \frac{r_1}{r_2}\left[{}^{c}_{s}(\varphi_1 - \varphi_2)\right],$$

d. h. der Modul eines Quotienten ist gleich dem Quotienten aus dem Modul des Zählers und dem des Nenners; seine Amplitude gleich der Differenz aus der Amplitude des Zählers und der des Nenners.

Zwei complexe Grössen

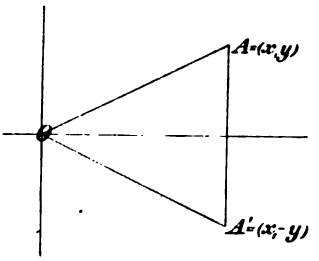
$$z = x + iy, \quad z' = x - iy$$

oder

$$z = r\left[{}^{c}_{s}\varphi\right], \quad z' = r\left[{}^{c}_{s}(-\varphi)\right]$$

nennen wir conjugirte Grössen. Es ist

$$z \cdot z' = x^2 + y^2 = r^2,$$



also das Product der conjugirten Grössen dem Quadrate ihres Moduls gleich. Jede Grösse ist gleich der conjugirten ihrer conjugirten. Die conjugirte Grösse einer reellen ist ihr selbst gleich, und umgekehrt: sind zwei conjugirte Grössen einander gleich, so sind sie reell.

§ 10. Wir wollen jetzt auf die Elementareigenschaften der gewöhnlichen complexen Grössen eingehen.

(I) Aus $i^2 = -1$ folgen für die höheren Potenzen von i die Gleichungen

$$i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \cdots,$$
$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

bei jedem positiven oder negativen ganzzahligen n.

(II) Gilt bei reellen $x_1, y_1; x_2, y_2$ die Gleichung

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2,$$

dann ist $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$. Denn aus der Voraussetzung folgt

$$(x_1 - x_2)^2 = (y_2 - y_1)^2 i^2 = -(y_2 - y_1)^2,$$

und es müsste eine reelle positive gleich einer rellen negativen Grösse oder gleich Null sein, wenn die Behauptung nicht richtig wäre.

(III) Ist bei reellen $a_0, a_1, \cdots a_n$ eine ganze Function

$$f(x + iy) = a_0 + a_1 (x + iy) + a_2 (x + iy)^2 + \cdots + a_n (x + iy)^n$$

gegeben, so kann man diese Darstellung durch Entwickelung der Klammern mit Hülfe von (I) auf die Form

$$f(x + iy) = u + iv$$

bringen. Macht man dieselben Operationen mit der conjugirten Function

$$f(x - iy) = a_0 + a_1 (x - iy) + a_2 (x - iy)^2 + \cdots + a_n (x - iy)^n,$$

so wird der Unterschied durchgehends nur darin beruhen, dass alle Potenzen von i durch diejenigen von $-i$ zu ersetzen sind. Hierbei ändern sich die Potenzen mit geraden Exponenten, d. h. die reellen Summanden nicht, während diejenigen mit ungeraden Exponenten nur das Zeichen wechseln. Man erhält also

$$f(x - iy) = u - iv.$$

Es sind daher $f(x + iy)$ und $f(x - iy)$ einander conjugirte Grössen, wenn die a reell sind.

(IV) Daraus folgt, dass, wenn $f(x + iy) = 0$ ist, auch $f(x - iy) = 0$ sein muss; natürlich ist dabei festzuhalten, dass die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots$ reell sind.

(V) Ist $f(x + iy) = f(x - iy)$, so ist der Ausdruck von $f(x + iy)$ von i frei, denn man hat gemäss (III) $v = 0$.

§ 11. Zum Schlusse wollen wir für künftige Zwecke noch die Normalform des complexen Ausdrucks

$$\tau = 1 + \varrho \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \vartheta$$

betrachten, in welchem ϱ beliebig klein sein soll, während über die Grösse von ϑ nichts vorausgesetzt ist. Man findet sofort aus § 7

$$\tau = \sqrt{1 + 2\varrho \cos\vartheta + \varrho^2} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \operatorname{arc\,tang} \frac{\varrho \sin\vartheta}{1 + \varrho \cos\vartheta}.$$

Demnach ist

$$1 - \varrho < |\tau| < 1 + \varrho,$$

d. h. $|\tau|$ kann durch hinreichende Verkleinerung von ϱ der Einheit beliebig nahe gebracht werden. Ferner ist

$$\cos \text{ampl. } \tau = \frac{1 + \varrho \cos \vartheta}{\sqrt{1 - 2\varrho \cos \vartheta + \varrho^2}} \leq \frac{1 + \varrho}{1 - \varrho}$$

und somit kann ampl. τ beliebig klein gemacht werden, wenn man den Werth des Moduls ϱ hinlänglich verringert.

Hieraus folgt, dass, wenn man eine beliebige complexe Grösse $x + iy$ mit $1 + \varrho\left[{}_{s}^{c}\vartheta\right]$ multiplicirt, bei hinreichend kleinem ϱ das Zeichen des reellen Teiles von

$$(x + iy)\left(1 + \varrho\left[{}_{s}^{c}\vartheta\right]\right)$$

mit dem von x, das des imaginären Theiles mit dem von y übereinstimmt, wenigstens sobald x bezw. y von Null verschieden ist.

Zweite Vorlesung.

Ganze Functionen und algebraische Gleichungen.

§ 12. Verstehen wir unter $a_0, a_1, \cdots a_n$ complexe Grössen von der Form

$$a_\lambda = \varrho_\lambda \cdot \left[{}_{s}^{c}\alpha_\lambda\right] \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots n),$$

deren erste von Null verschieden ist, und unter z eine complexe Variable

$$z = x + iy = r\left[{}_{s}^{c}\omega\right],$$

so sagen wir, es sei

(1) $$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

eine ganze Function n^{ten} Grades von z, und die Gleichung

(2) $$f(z) = 0$$

eine algebraische Gleichung n^{ten} Grades in z. Wir nennen $f(z)$ das Polynom der Gleichung (2) und setzen es, wenn nichts anderes bemerkt ist, als nach fallenden Potenzen der Variablen geordnet voraus.

Bezeichnen wir ferner

$$f(z) = w = u + iv,$$

so ist durch (1) jedem Werthe von z ein Werth von w zugeordnet. Man hat dabei die rationale Darstellung von u und v in der Form

$$(3)\quad \begin{aligned} u &= \varrho_0 r^n \cos(n\omega + \alpha_0) + \varrho_1 r^{n-1} \cos((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots, \\ v &= \varrho_0 r^n \sin(n\omega + \alpha_0) + \varrho_1 r^{n-1} \sin((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots. \end{aligned}$$

Durch (3) sind u, v vermittels der Polarcoordinaten von z ausgedrückt; da aber, wie die Formel (14^b) aus der ersten Vorlesung lehrt,

$$(4)\quad \begin{aligned} r^n \cos n\omega &= x^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} x^{n-4} y^4 - \cdots, \\ r^n \sin n\omega &= \frac{n}{1} x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^{n-3} y^3 + \cdots \end{aligned}$$

ist, so kann man auch u, v rational durch x, y ausdrücken.

§ 13. Die Werthe von z haben wir durch Punkte einer Ebene, der (x, y)-Ebene repräsentirt; ebenso wollen wir die Werte von w durch die Punkte einer zweiten Ebene, der (u, v)-Ebene darstellen. Dann sagen wir, diese w-Ebene liefere ein durch die Gleichung

$$(5)\qquad w = f(z)$$

vermitteltes Bild der z-Ebene, oder die z-Ebene sei durch (5) auf die w-Ebene abgebildet.

An diese Auffassung knüpft sich sofort eine Reihe von wichtigen Fragen, z. B.: Gehören zu verschiedenen Punkten der z-Ebene auch verschiedene Bildpunkte der w-Ebene? Ist jeder Punkt der w-Ebene das Bild eines Punktes der z-Ebene? Wie bildet sich eine gegebene Curve der z-Ebene auf die w-Ebene ab? u. s. f.

Ein einfaches Beispiel möge diese Verhältnisse erläutern. Es sei

$$w = f(z) = z^n = r^n \left[{}_{s}^{c} n\omega\right],$$

also

$$r^n \cos n\omega = u, \quad r^n \sin n\omega = v.$$

Dann sieht man, dass sich die Punkte $z = 0$ und $w = 0$ entsprechen, so dass $w = 0$ das Bild des Einen Punktes $z = 0$ ist. Ferner bildet sich der Kreis $|z| = r$ in den Kreis $|w| = r^n$ ab, und der Radius-Vector $\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\omega$ in den Radius-Vector $\frac{v}{u} = \operatorname{tang} n\omega$. Lassen wir nun den Punkt z den Kreis $|z| = r$ derart durchlaufen, dass die Amplitude von z stetig wachsend von 0 bis 2π geht, so wird w den Kreis $|w| = r^n$ derart durchlaufen, dass ampl. w gleichfalls stetig wachsend von 0 bis $2n\pi$ geht, d. h. w wird diesen Kreis $n$mal durchlaufen. Jedem Radius $\frac{u}{v} = \operatorname{tang}\tau$ entsprechen dabei die n Radien

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang}\frac{\tau}{n}, \quad \operatorname{tang}\frac{\tau + 2\pi}{n}, \quad \cdots \operatorname{tang}\frac{\tau + (2n-2)\pi}{n}.$$

Dieser Satz ist ein Specialfall des aus (4) folgenden allgemeineren, dass jeder geraden Linie $au + \beta v = 1$ der (u, v)-Ebene eine Curve n^{ter} Ordnung in der (x, y)-Ebene entspricht.

§ 14. Eine Fundamentalfrage ist die, ob jedem reellen Werthepaar u_0, v_0 ein reelles Werthepaar x, y entspricht, dessen Bild u_0, v_0 ist. Bezeichnen wir $u_0 + iv_0 = w_0$, so kommt dies auf die Entscheidung darüber hinaus, ob es einen Werth z giebt, der

$$w - w_0 = 0$$

macht. Da ferner $w - w_0$ wieder von der Form (1) ist, so ist also die Fundamentalfrage darauf reducirt, ob man dem Argumente z in der Function $f(z)$ einen solchen Werth beilegen kann, dass (2) erfüllt ist. Einen derartigen Wert $z_0 = x_0 + iy_0$ nennen wir eine Wurzel der algebraischen Gleichung (2); in Anknüpfung an unsere geometrische Darstellung wollen wir ein solches z_0 auch Wurzelpunkt oder Nullstelle der Function $f(z)$ nennen.

Aus der Definition der Wurzel ergiebt sich

$$(6)\quad \begin{aligned} f(z) = f(z) - f(z_0) &= a_0(z^n - z_0^n) + a_1(z^{n-1} - z_0^{n-1}) + a_2(z^{n-2} - z_0^{n-2}) + \cdots \\ &= (z - z_0)[a_0 z^{n-1} + a_1' z^{n-2} + a_2' z^{n-3} + \cdots], \end{aligned}$$

d. h. wenn z_0 eine Wurzel von (2) ist, dann ist nach (6) die ganze Function $f(z)$ durch $z - z_0$ theilbar, derart, dass der Quotient eine ganze Function des Grades $(n - 1)$ mit demselben Anfangscoefficienten a_0 ist. Besteht umgekehrt eine derartige Theilbarkeit für den linearen Ausdruck $z - z_0$, dann zeigt die Substitution $z = z_0$, dass $f(z_0) = 0$, also z_0 eine Wurzel von (2) wird. (6) schreiben wir kürzer in der Form

$$f(z) = (z - z_0) f_1(z).$$

Hat nun auch $f_1(z) = 0$ eine Wurzel z_1, dann folgt ebenso weiter

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1) f_2(z),$$

und wenn z_1 von z_0 verschieden ist, was wir durch $z_1 \neq z_0$ ausdrücken, dann besitzt $f(z) = 0$ die beiden Wurzeln z_0, z_1. Ist aber $z_1 = z_0$, so wollen wir die Uebereinkunft treffen, z_0 als Doppelwurzel zu bezeichnen und bei der Abzählung der Wurzeln zweifach zu rechnen.

Besitzt $f_2(z) = 0$ wiederum eine Wurzel z_2, dann ergiebt sich

$$f(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2) f_3(z),$$

und $f(z) = 0$ hat, je nachdem alle Werthe z_0, z_1, z_2 unter einander verschieden, oder zwei und nur zwei von ihnen einander gleich, oder alle drei einander gleich sind, drei Wurzeln, oder eine einfache und eine Doppelwurzel, oder endlich eine dreifache Wurzel. In dieser Weise kann man weitergehen, allenfalls bis zu einem Polynome $f_n(z)$.

Das muss dann wegen der Verringerung der Gradzahlen eine Constante sein und daher mit a_0 zusammenfallen. Besitzt also jede algebraische Gleichung auch nur eine Wurzel, so folgt die Formel

$$(7) \qquad f(z) = a_0(z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_{n-1}),$$

und daraus würde sich dann zeigen, dass eine jede ganze Function n^{ten} Grades in n lineare Factoren von der Form $z - z_\alpha$ zerlegbar ist. Heisst allgemein z_α eine m_α-fache Wurzel von (2), wenn $(z - z_\alpha)^{m_\alpha}$ die höchste in $f(z)$ aufgehende Potenz von $(z - z_\alpha)$ ist, und rechnet man bei der Abzählung der Wurzeln eine solche als äquivalent mit m_α Wurzeln, so kann man aus (7) schliessen, dass dann eine jede Gleichung n^{ten} Grades n Wurzeln besitzt, welche gleich oder verschieden sein können.

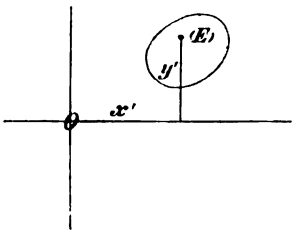
Es fragt sich, ob $f(z)$ noch andere Wurzeln oder eine derselben in einer höheren Multiplicität als der aus (7) sich ergebenden haben kann. Ist $a_0 \neq 0$, so kann dies nicht eintreten, da sonst $f(z)$ durch noch weitere lineare Factoren $z - z'$ theilbar wäre und demnach einen höheren als den n^{ten} Grad erreichen würde. Besitzt also $f(z) = 0$ mehr als n Wurzeln, dann ist $a_0 = 0$, und damit wird $f(z)$ identisch Null, d. h. $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $\cdots a_n = 0$; dann wird die Gleichung natürlich durch jeden Werth von z befriedigt.

Der Fundamentalsatz der Algebra beruht nach dem Besprochenen auf dem Nachweise der Existenz einer Wurzel für jede algebraische Gleichung (2). Dieser Nachweis soll in der nächsten Vorlesung auf verschiedene Arten geführt werden. Hier müssen wir noch einige Vorbereitungen zu diesem Beweise treffen und wollen zunächst einen Schluss aus unseren letzten Ueberlegungen ziehen.

§ 15. Ist

$$g(x, y) = \varphi_0(x)y^n + \varphi_1(x)y^{n-1} + \cdots + \varphi_{n-1}(x)y + \varphi_n(x)$$

eine ganze Function der reellen Variablen x und y, so dass alle $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_n$ ganze Functionen von x sind, dann können die Punkte x_k, y_k mit reellen Coordinaten, welche die Gleichung



$$(8) \qquad g(x, y) = 0$$

befriedigen, in der (x, y)-Ebene kein noch so kleines Flächenstück stetig anfüllen, sondern nur eine Curve bilden; ausgenommen ist der Fall, dass $g(x, y)$ identisch gleich Null ist.

Gäbe es nämlich ein derartiges Flächenstück (E), so würden unendlich viele Werthe von x vorhanden sein, wie x', für welche (8) unendlich viele Wurzeln y' besitzt. Es müsste

sonach infolge der Sätze des vorigen Paragraphen für alle diese Werthe x'

$$\varphi_0(x') = 0, \quad \varphi_1(x') = 0, \quad \cdots \varphi_n(x') = 0$$

sein, und daraus folgt dann aus gleichen Gründen, dass alle $\varphi_\lambda(x)$ identisch verschwinden müssen, dass also $g(x, y)$ selbst identisch gleich Null wird.

§ 16. Ist eine ganze Function (1) gegeben, dann kann man, wenn $|z|$ die Grenze r nicht überschreitet, eine Grenze R angeben, welche $|w|$ nicht überschreitet. Mit anderen Worten: Jedes endliche Flächenstück der (x, y)-Ebene hat als Bild ein ganz im Endlichen gelegenes Flächenstück der (u, v)-Ebene.

Man hat nämlich nach § 8

$$\begin{aligned} |w| &\leqq |a_0 z^n| + |a_1 z^{n-1}| + |a_2 z^{n-2}| + \cdots \\ &\leqq |a_0| r^n + |a_1| r^{n-1} + |a_2| r^{n-2} + \cdots. \end{aligned}$$

Ist ϱ der grösste unter den Moduln $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_n$ der complexen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \cdots a_n$, so folgt daraus

$$|w| \leqq \varrho [r^n + r^{n-1} + r^{n-2} + \cdots + 1].$$

Wenn $r > 1$ ist, dann ist der Werth der Klammer $< nr^n + 1$; wenn $r = 1$, dann ist er $= n + 1$, und wenn $r < 1$ ist, dann ist er $< n + 1$; also in allen Fällen

$$|w| < \varrho (n + 1)(r^n + 1).$$

Man braucht deshalb nur

$$R = \varrho (n + 1)(r^n + 1)$$

zu nehmen, um die Forderung erfüllt zu sehen.

§ 17. Man kann eine Grenze r_0 so bestimmen, dass für alle $|z| > r_0$

(9) $$f(z) = a_0 z^n (1 + \sigma) \quad \text{mit} \quad |\sigma| < \delta$$

wird, wo δ eine positive, beliebig kleine, gegebene Grösse bedeutet, die wir von vorn herein kleiner als 1 annehmen.

Dividirt man (1) durch $a_0 z^n$, dann entsteht

$$\frac{f(z)}{a_0 z^n} = 1 + \frac{a_1}{a_0} z^{-1} + \frac{a_2}{a_0} z^{-2} + \cdots + \frac{a_n}{a_0} z^{-n},$$

so dass man für die in (9) eingeführte Grösse σ die Beziehung findet

$$\begin{aligned} |\sigma| &\leqq \left|\frac{a_1}{a_0}\right| |z^{-1}| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| |z^{-2}| + \cdots \\ &\leqq \frac{\varrho}{\varrho_0} (|z|^{-1} + |z|^{-2} + \cdots + |z|^{-n}) \leqq \frac{\varrho}{\varrho_0} (r_0^{-1} + r_0^{-2} + \cdots + r_0^{-n}). \end{aligned}$$

Um dem aufgestellten Satze zu genügen, soll dieser Ausdruck $< \delta$,

also jedenfalls gleich einem echten Bruche gemacht werden; dabei ist $\frac{\varrho}{\varrho_0}$ nach der Definition von ϱ im vorigen Paragraphen mindestens gleich 1. Der Sicherheit halber sei $r_0 > 1$, und es wird dann

$$|\sigma| < \frac{\varrho}{\varrho_0} r_0^{-1}\left(1 + \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_0^2} + \cdots \text{ in infin.}\right)$$
$$< \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{1}{r_0 - 1} < \delta$$

zu setzen sein. Sobald man daher

$$(9^a) \qquad r_0 > 1 + \frac{\varrho}{\varrho_0} \cdot \frac{1}{\delta}$$

annimmt, bekommt man die durch (9) geforderte Bestimmung von r_0.

Die erhaltene Grenze für r_0 giebt zugleich eine obere Grenze für den absoluten Betrag der etwa vorhandenen Wurzeln von (2), wie nahe man auch δ der Einheit kommen lässt. Denn ist $|z| > r_0$, so gilt (9), und $f(z)$ kann nicht verschwinden, da $a_0 z^n$ von Null verschieden ist, und $1 + \sigma$ einen positiven reellen Theil besitzt. Es ist demnach, wenn man in (9^a) $\delta = 1$ nimmt,

$$(9^b) \qquad r_0 = 1 + \frac{\varrho}{\varrho_0}$$

eine obere Grenze für den absoluten Betrag der Wurzeln von (2).

Sind ins Besondere alle $a_0, a_1, \cdots a_n$ reelle Grössen, und lässt man auch für z nur reelle Werthe x zu, so folgt, dass

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

für alle $x > 1 + \left|\frac{a}{a_0}\right|$ dasselbe Vorzeichen besitzt wie $a_0 x^n$. Es bedeutet dabei a den absolut grössten Werth, der unter den Moduln der Coefficienten auftritt.

§ 18. Ist in dem Polynome

$$(1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

a_n von Null verschieden, dann kann man für $|z|$ eine obere Grenze $\mathfrak{r}$ derart bestimmen, dass für alle z, deren Modul kleiner als $\mathfrak{r}$ bleibt,

$$(10) \qquad f(z) = a_n(1 + \sigma)$$

wird, wobei $|\sigma|$ kleiner ist als eine gegebene kleine Grösse ε die wir < 1 voraussetzen wollen. In der That ist gemäss (10)

$$|\sigma| \leqq \left|\frac{a_{n-1}}{a_n}\right| |z| + \left|\frac{a_{n-2}}{a_n}\right| |z|^2 + \cdots$$
$$< \frac{\varrho}{\varrho_n}\left[|z| + |z|^2 + \cdots + |z|^n\right],$$

und wenn wir von vorn herein $|z|<1$ setzen, so ergiebt sich

$$|\sigma|<\frac{\varrho}{\varrho_n}\frac{|z|}{1-|z|}.$$

Um die rechte Seite kleiner als ε zu machen, reicht es daher aus, für $|z|$ als obere Grenze anzunehmen

$$\tau=\frac{\varrho_n\varepsilon}{\varrho_n\varepsilon+\varrho}.$$

Aus dem letzten Paragraphen der vorigen Vorlesung schliesst man dann wegen (10), dass für $f(z)=u+iv$, $a_n=\varrho_n\left[\begin{smallmatrix}c\\ s\end{smallmatrix}\alpha_n\right]$

$$\text{(11)}\qquad \text{sgn. } u=\text{sgn. }\cos\alpha_n,\quad \text{sgn. } v=\text{sgn. }\sin\alpha_n$$

wird, und weiter, dass die Amplitude von $f(z)$ derjenigen von a_n beliebig nahe gebracht werden kann. Für reelle, von 0 verschiedene k bedeutet in der Formel (11) sgn. k den Werth $k:|k|$, also ± 1.

§ 19. Es ist

$$\begin{aligned}f(z+h)=&(a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+\cdots+a_n)\\&+h(na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1})\\&+\frac{h^2}{1\cdot 2}(n(n-1)a_0z^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1z^{n-3}+\cdots+2\cdot 1a_{n-2})\\&+\cdots\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun in dieser Entwickelung die einzelnen Klammern in besonderer Art, nämlich

$$na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots+a_{n-1}=f'(z),$$
$$n(n-1)a_0z^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1z^{n-3}+\cdots+2\cdot 1\cdot a_{n-2}=f''(z),$$
. . . . . .

und nennen $f'(z)$ die erste oder kurz die Ableitung von $f(z)$ nach z, ferner $f''(z)$ die zweite Ableitung von $f(z)$ nach z, $f'''(z)$ die dritte Ableitung von $f(z)$ nach z u. s. w., so folgt

$$\text{(12)}\qquad f(z+h)=f(z)+f'(z)\frac{h}{1}+f''(z)\frac{h^2}{1\cdot 2}+\cdots+f^{(n)}(z)\frac{h^n}{n!}.$$

Man erkennt, dass die zweite Ableitung von $f(z)$ gleich der ersten von $f'(z)$ u. s. f., die $(k+l)^{\text{te}}$ Ableitung die k^{te} der l^{ten} ist. Hierzu genügt folgende Ueberlegung. Offenbar ist die Ableitung ν^{ter} Ordnung einer Summe gleich der Summe der ν^{ten} Ableitungen aller Summanden. Man braucht den aufgestellten Satz also nur für ein Glied az^m zu beweisen. Für ein solches ist die k^{te} Ableitung

$$m(m-1)\cdots(m-k+1)az^{m-k}$$

und hiervon die l^{te} Ableitung

$$m(m-1)\cdots(m-k-l+1)az^{m-k-l};$$

dies stimmt wirklich mit der $(k+l)^{\text{ten}}$ Ableitung von az^m überein.

Die Ableitung des Productes $f(z) = \varphi(z)\psi(z)$ ist gleich

$$f'(z) = \varphi'(z)\psi(z) + \varphi(z)\psi'(z). \tag{13}$$

Dies folgt sofort aus

$$f(z+h) = f(z) + hf'(z) + \cdots = [\varphi(z) + h\varphi'(z) + \cdots][\psi(z) + h\psi'(z) + \cdots]$$
$$= \varphi(z)\psi(z) + h\{\varphi'(z)\psi(z) + \varphi(z)\psi'(z)\} + \cdots.$$

Setzt man in (12) h für z ein und $(z-h)$ für h, so entsteht die Formel

$$f(z) = f(h) + \frac{f'(h)}{1}(z-h) + \frac{f''(h)}{1\cdot 2}(z-h)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}(z-h)^n, \tag{12a}$$

welche die Entwickelung von $f(z)$ nach Potenzen von $(z-h)$ liefert

§ 20. Ist z_0 ein fester Werth von z und $f^{(\lambda)}(z_0)$ die erste nicht verschwindende der Ableitungen

$$f'(z_0),\ f''(z_0),\ \cdots f^{(\lambda)}(z_0),\ \cdots f^{(n)}(z_0),$$

so nimmt (12) die Gestalt

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{h^\lambda}{\lambda!}\left(f^{(\lambda)}(z_0) + \frac{f^{(\lambda+1)}(z_0)}{\lambda+1}h + \cdots\right) \tag{14}$$

an. Dass stets eine der Ableitungen von Null verschieden ist, zeigt sich sofort, weil ja sonst aus (12)

$$f(z_0+h) - f(z_0) = 0$$

für jedes h sich ergeben würde, und die nicht identische Gleichung n^{ten} Grades in h unendlich viele Wurzeln besitzen müsste.

Auf (14) verwenden wir das Resultat von § 18; das giebt für hinlänglich kleine $|h|$

$$f(z_0+h) - f(z_0) = \frac{h^\lambda}{\lambda!}f^{(\lambda)}(z_0)(1+\sigma), \qquad |\sigma| < \varepsilon,$$

d. h. die Aenderung, die $f(z_0)$ bei einer Vermehrung des Argumentes um h erfährt, wird mit h gleichzeitig unendlich klein, oder: benachbarte Punkte z_0 und (z_0+h) der (x, y)-Ebene haben benachbarte Punkte $f(z_0)$, $f(z_0+h)$ zu Bildern. Diese Eigenschaft drückt man dadurch aus, dass man sagt: Jede ganze Function $f(z)$ ist stetig. Diese Stetigkeit überträgt sich auch auf u und v, denn $\sqrt{u^2+v^2}$ kann nur dann $< \delta$ werden, wenn u und v einzeln $< \delta$ sind. Verfolgt man also den Lauf einer Curve in der z-Ebene, und ist für einen Punkt z_1 derselben etwa u_1 positiv, für einen andern z_2 dagegen u_2 negativ, dann giebt es auf der z-Curve zwischen z_1 und z_2 mindestens einen Punkt, für welchen das zugehörige u den Werth 0 hat. Für die v gilt der entsprechende Satz.

§ 21. Wir nehmen in diesem Paragraphen an, $f'(z_0)$ sei von Null verschieden.

Sind zuerst die $a_0, a_1, \cdots a_n$ sowie z_0 sämmtlich reell, und ertheilt man auch dem h nur reelle Werthe, dann folgt wegen

$$(15) \qquad f(z_0+h)-f(z_0)=hf'(z_0)\left[1+\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)}\frac{h}{2}+\cdots\right]$$

aus § 18, dass bei hinlänglich kleinem h

$$\text{sgn.}\,(f(z_0+h)-f(z_0))=\text{sgn.}\,(hf'(z_0))$$

wird. Das heisst: Bei positivem $f'(z_0)$ wächst die Function mit Vermehrung des Arguments z_0 und nimmt mit Verminderung desselben ab; bei negativem $f'(z_0)$ findet das Entgegengesetzte statt. Vermehrung wie Verminderung müssen dabei hinlänglich gering genommen werden.

Es seien ferner die $a_0, a_1, \cdots a_n$ sowie z_0 wieder complex. Dann folgt aus (15) nach § 18 und dem § 11 der vorigen Vorlesung, dass das Vorzeichen des reellen Theiles von $f(z_0+h)-f(z_0)$ gleich demjenigen des reellen Theiles von $hf'(z_0)$ ist; das Gleiche findet mit den Coefficienten von i in beiden Functionen statt. Auch hier ist $|h|$ hinlänglich klein anzunehmen.

Zunächst hat man

$$(16) \quad \begin{aligned} f'(z)&=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\cdots \\ &=n\varrho_0r^{n-1}\left[\cos((n-1)\omega+\alpha_0)\right]+(n-1)\varrho_1r^{n-2}\left[\cos((n-2)\omega+\alpha_1)\right]+\cdots \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} u&=\varrho_0r^n\cos(n\omega+\alpha_0)+\varrho_1r^{n-1}\cos((n-1)\omega+\alpha_1)+\cdots, \\ v&=\varrho_0r^n\sin(n\omega+\alpha_0)+\varrho_1r^{n-1}\sin((n-1)\omega+\alpha_1)+\cdots. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Ableitungen von u, v nach r mit u', v', so ist

$$(17) \quad u'+iv'=n\varrho_0r^{n-1}\left[\cos(n\omega+\alpha_0)\right]+(n-1)\varrho_1r^{n-2}\left[\cos((n-1)\omega+\alpha_1)\right]+\cdots$$

und daher, wie die Vergleichung von (16) und (17) lehrt,

$$f'(z)=(u'+iv')\left[\cos(-\omega)\right].$$

Zu $z=z_0$ möge $u=u_0$, $v=v_0$, $\omega=\omega_0$ gehören; dann können wir

$$f'(z_0)=(u_0'+iv_0')\left[\cos(-\omega_0)\right]$$

schreiben, und unser letzter Satz geht in den folgenden über: Bei hinlänglich kleinem h sind die Zeichen des reellen und des mit i multiplicirten Theiles von $f(z_0+h)-f(z_0)$ gleich den Zeichen des entsprechenden Theiles von

$$(18) \qquad h\cdot(u_0'+iv_0')\left[\cos(-\omega_0)\right].$$

§ 22. Von diesem allgemeinen Satze brauchen wir den besonderen Fall, dass die Veränderung von z ohne Aenderung des Moduls vor sich geht, dass also z_0 und $z_0 + h$ auf einem um den Nullpunkt geschlagenen Kreise liegen. Dazu muss, wenn

$$z_0 = r_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \omega_0$$

gesetzt wird, $z_0 + h$ denselben Modul r_0 haben, d. h.

$$z_0 + h = r_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} (\omega_0 + \vartheta) = r_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \omega_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \vartheta,$$

und also

$$\begin{aligned} h &= r_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \omega_0 (\cos\vartheta - 1 + i \sin\vartheta) \\ &= 2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \omega_0 \left(-\sin\tfrac{\vartheta}{2} + i \cos\tfrac{\vartheta}{2} \right) \\ &= 2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \omega_0 \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \frac{\pi + \vartheta}{2} \end{aligned}$$

sein. Die Bedingung, dass $|h|$ beliebig klein werden soll, wird durch hinlänglich kleine Werthe von ϑ befriedigt.

Unser Ausdruck (18) geht daher in dem jetzt betrachteten Falle in die Form

$$\begin{aligned} (19)\quad & 2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} (u_0' + i v_0') \begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix} \frac{\pi + \vartheta}{2} \\ & = 2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} \left[- \left(u_0' \sin\tfrac{\vartheta}{2} + v_0' \cos\tfrac{\vartheta}{2} \right) + i \left(u_0' \cos\tfrac{\vartheta}{2} - v_0' \sin\tfrac{\vartheta}{2} \right) \right] \end{aligned}$$

über. Setzen wir nun

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = \Delta u_0 + i \Delta v_0,$$

so folgt aus dem allgemeinen Satze des vorigen Paragraphen, dass

$$\begin{aligned} \Delta u_0 \quad &\text{und} \quad -2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} \left(u_0' \sin\tfrac{\vartheta}{2} + v_0' \cos\tfrac{\vartheta}{2} \right), \\ \Delta v_0 \quad &\text{und} \quad 2 r_0 \sin\tfrac{\vartheta}{2} \left(u_0' \cos\tfrac{\vartheta}{2} - v_0' \sin\tfrac{\vartheta}{2} \right) \end{aligned}$$

gleiche Vorzeichen haben. Dabei kann man zuerst den positiven Factor r_0 weglassen. Wenn ferner u_0', v_0' von Null verschieden bleiben, dann kann man h und damit ϑ so klein annehmen, dass das Glied mit $\cos\frac{\vartheta}{2}$ über das Vorzeichen der Klammer entscheidet, so dass

$$\Delta u_0 \text{ und } -v_0' \sin\vartheta, \quad \Delta v_0' \text{ und } +u_0' \sin\vartheta$$

gleiche Vorzeichen haben. Das heisst: Bei hinlänglich kleinen Aenderungen der Variablen z von z_0 aus auf dem Kreise mit dem Mittelpunkte O und dem Radius r_0 nehmen bei negativem Werthe v_0' ampl. z und u_0 gleichzeitig ab und gleich-

zeitig zu; bei positivem v_0' findet das Umgekehrte statt. Ferner nehmen ampl. z und v_0 bei positivem Werthe u_0' gleichzeitig ab und gleichzeitig zu, während bei negativem u_0' das Umgekehrte stattfindet.

Dritte Vorlesung.

Existenz von Wurzeln algebraischer Gleichungen.

§ 23. Wir kommen nun zum Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra, dass jede algebraische Gleichung

$$(1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

eine und daher (§ 14) genau soviele Wurzeln besitzt als ihre Gradzahl angiebt.

In dem Specialfalle, dass die Coefficienten der Gleichung reell sind, und ihr Grad ungerade ist, lässt sich die Existenz einer (aber daraus keiner weiteren!) Wurzel leicht erschliessen. Nach § 17 kann man dem z so hohe reelle absolute Werthe geben, dass das Vorzeichen von $f(z)$ mit dem von $a_0 z^n$ übereinstimmt, dass also für ein hinreichend grosses reelles positives $z = x_1$ und andererseits für ein hinreichend grosses negatives $z = x_2$ die ganze Function $f(z)$ verschiedene Vorzeichen erhält. Nach § 20 giebt es dann auf der reellen Axe der x zwischen x_1 und x_2 mindestens einen Punkt x', für den $f(x') = 0$ wird. Dieses x' ist eine reelle Wurzel von $f(z) = 0$.

§ 24. Im allgemeinen Falle gehen wir so vor: z_0 sei irgend ein constanter Werth. Wäre $f(z_0) = 0$, so hätten wir in z_0 bereits eine Wurzel der Gleichung. Wir nehmen also an, es wäre $f(z_0) \neq 0$. Ferner möge $f^{(\lambda)}(z_0)$ die erste nicht verschwindende der Ableitungen

$$f'(z_0),\ f''(z_0),\ \cdots f^{(n)}(z_0)$$

sein. Dass diese ganze Reihe nicht aus lauter verschwindenden Elementen besteht, haben wir in § 20 gezeigt. Dann ist (vgl. § 20)

$$\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)} = 1 + h^\lambda \frac{f^{(\lambda)}(z_0)}{\lambda!\, f(z_0)} + h^{\lambda+1} \frac{f^{(\lambda+1)}(z_0)}{(\lambda+1)!\, f(z_0)} + \cdots,$$

$$\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leqq \left|1 + h^\lambda \frac{f^{(\lambda)}(z_0)}{\lambda!\, f(z_0)}\right| + \left|h^{\lambda+1} \frac{f^{(\lambda+1)}(z_0)}{(\lambda+1)!\, f(z_0)}\right| + \cdots,$$

und wenn wir nun die Normalformen

$$h = \varrho \left[{}^{c}_{s} \varpi\right], \quad \frac{f^{(\varkappa)}(z_0)}{\varkappa!\, f(z_0)} = t_\varkappa \left[{}^{c}_{s} \tau_\varkappa\right] \qquad (\varkappa = \lambda,\ \lambda+1,\ \cdots n)$$

einführen, dann ergiebt sich

$$(2)\quad \left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| \leqq \left|1+t_\lambda\varrho^\lambda\left[\begin{matrix}c\\ s\end{matrix}(\lambda\varpi+t_\lambda)\right]\right| + t_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + t_{\lambda+2}\varrho^{\lambda+2} + \cdots$$

Zunächst geben wir dem h eine durch

$$\lambda\varpi + t_\lambda = \pi, \quad \varpi = \frac{\pi - t_\lambda}{\lambda}$$

bestimmte Amplitude, während der Modul ϱ durch $|\tau_\lambda\varrho^\lambda| < 1$ bestimmt wird; dadurch entsteht für die so beschränkten Werthe

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| &\leqq 1 - t_\lambda\varrho^\lambda + t_{\lambda+1}\varrho^{\lambda+1} + t_{\lambda+2}\varrho^{\lambda+2} + \cdots \\ &\leqq 1 - t_\lambda\varrho^\lambda\left(1 - \frac{t_{\lambda+1}}{t_\lambda}\varrho - \frac{t_{\lambda+2}}{t_\lambda}\varrho^2 - \cdots\right)\end{aligned} \qquad (t_\lambda \neq 0).$$

Jetzt verfügen wir noch weiter über den Modul ϱ nach § 18 derart dass wir ihn $< \varrho_0$ machen, wodurch für alle Werthe $\varrho < \varrho_0$ der Werth der letzten Klammer positiv und also die rechte Seite kleiner als 1 werden soll. Positiv ist die linke Seite stets. Man hat also

$$\begin{aligned}&\left|\frac{f(z_0+h)}{f(z_0)}\right| < 1, \\ &|f(z_0+h)| < |f(z_0)|,\end{aligned} \qquad \left(h = \varrho\left[\begin{matrix}c\\ s\end{matrix}\frac{\pi - t_\lambda}{\lambda}\right],\ \varrho < \varrho_0\right).$$

Dieses Resultat zeigt, dass für jeden Punkt z_0, für den $|f(z_0)| \neq 0$ ist, eine Richtung bestimmt werden kann, auf welcher $|f(z_0+h)|$ für hinreichend kleine h kleiner ist als $|f(z_0)|$.

§ 25. Um diesen Satz zum Nachweise der Wurzelexistenz zu verwenden, bestimmen wir für $|z|$ eine untere Grenze R_0, oberhalb deren (vgl. § 17) für alle $|z| > R_0$

$$|f(z)| = a_0 z^n(1+\sigma) \qquad |\sigma| < \frac{1}{2}$$

ist. Es seien $|z_1|$ und $|z_2| > |z_1|$ zwei dieser Bedingung genügende Werthe; dann hat man

$$\left|\frac{f(z_2)}{f(z_1)}\right| = \left|\frac{z_2}{z_1}\right|^n \frac{1+\sigma_2}{1+\sigma_1} > \frac{1}{3}\left|\frac{z_2}{z_1}\right|^n,$$

und erkennt daraus, dass bei hinlänglich grossem Werthe des Quotienten $|z_2| : |z_1|$ der kleinste der Werthe von $f(z_2)$ bei constantem $|z_2|$ grösser bleiben wird, als der grösste der Werthe von $f(z_1)$ bei constantem $|z_1|$. Innerhalb des um 0 geschlagenen Kreises mit dem Radius $|z_2|$ muss also $|f(z)|$ irgendwo seinen kleinsten Werth aufweisen. Tritt dies für $z = z_0$ ein, so muss $|f(z_0)| = 0$ sein, weil sonst zufolge des im vorangehenden Paragraphen Bewiesenen doch noch eine weitere Verminderung von $|f(z_0)|$ in einer ganz bestimmten

Richtung möglich wäre. Damit ist also die Existenz einer Wurzel z_0 klar gelegt; denn aus $|f(z_0)| = 0$ folgt $f(z_0) = 0$.*)

Wir wollen hierbei noch bemerken, dass wenn man in (2) die Amplitude ϖ gleich $-\frac{t_\lambda}{\lambda}$ setzt, eine Richtung aufgefunden wird, längs deren eine Vermehrung von $|f(z)|$ in unmittelbarer Nähe von z_0 stattfindet. Ein im Endlichen liegendes Maximum für $|f(z_0)|$ kommt aber nicht vor, da hier der Fall, dass $|f(z_0)| = 0$ wird, nicht als Ausnahme auftreten kann.

Im Allgemeinen wird in (2) $f'(z_0) \neq 0$, und der Werth λ gleich 1 sein; dann liegt um den Punkt z_0 ein Bereich, in welchem $|f(z_0)|$ wächst und ein anderer, in welchem $|f(z_0)|$ abnimmt. Ist $\lambda > 1$, dann wechseln mehrere solcher Gebiete um z_0 mit einander sectorenartig ab, da für

$$\varpi = \frac{-t_\lambda}{\lambda}, \quad \frac{2\pi - t_\lambda}{\lambda}, \quad \frac{4\pi - t_\lambda}{\lambda}, \cdots$$

ein Wachsthum, für die dazwischen liegenden Amplituden

$$\varpi = \frac{\pi - t_\lambda}{\lambda}, \quad \frac{3\pi - t_\lambda}{\lambda}, \quad \frac{5\pi - t_\lambda}{\lambda}, \cdots$$

ein Abnehmen von $|f(z_0)|$ eintritt.

§ 26. Alle diese Verhältnisse kann man sich geometrisch leicht veranschaulichen, indem man über der, die Variable z darstellenden Horizontalebene eine Fläche errichtet, deren Verticalcoordinate durch $|w|$ gegeben wird. Unter die (x, y)-Ebene kann diese Fläche nicht herabsinken, da $|w|$ niemals negativ wird. Die Minima $|w| = 0$ liegen, wie aus dem § 24 hervorgeht, an den Punkten, in denen die Fläche auf der Coordinatenebene der x, y aufliegt, und § 25 zeigt, dass solche Punkte vorhanden sind.

Bei dem einfachen Beispiele

$$f(z) = z^n - 1 = r^n \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} n\omega\right] - 1$$

wird

$$|f(z)|^2 = r^{2n} - 2r^n \cos n\omega + 1,$$
$$|r^n - 1| \leqq |f(z)| \leqq r^n + 1,$$

und bei constantem r tritt das Minimum des Moduls $|z^n - 1|$, nämlich der Werth $|r^n - 1|$, für die n Amplituden

$$\omega = 0, \quad \frac{2\pi}{n}, \quad \frac{4\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(2n-2)\pi}{n},$$

und das Maximum $r^n + 1$ für

*) Cauchy, Analyse algébrique; 1821, Cap. X. p. 329 ff.

$$\omega = \frac{\pi}{n}, \quad \frac{3\pi}{n}, \quad \frac{5\pi}{n}, \quad \cdots \quad \frac{(2n-1)\pi}{n}$$

ein. Nur für $r = 1$ kann $|w| = 0$ werden, weil in jedem anderen Falle das Minimum $|w| = |r^n - 1|$ von Null verschieden ist. Für jedes $r > 1$ ist der Werth der Maxima auf einem Kreise um den Nullpunkt immer um 2 grösser als derjenige der Minima; für $r < 1$ dagegen ist diese Differenz $= (1 + r^n) - (1 - r^n) = 2r^n$. Nur für den Nullpunkt ist $|f'(z)|$ gleich Null. Es ist leicht, von dem Verlaufe dieser Fläche eine Anschauung zu gewinnen.

§ 27. Ein anderer, von Gauss stammender Beweis des Fundamentalsatzes knüpft an das Verhalten von u und v auf der Peripherie eines hinlänglich grossen Kreises um den Nullpunkt an. Man hat in unserer durchgehends benutzten Bezeichnung

$$(3) \quad \begin{aligned} u &= \varrho_0 r^n \cos(n\omega + \alpha_0) + \varrho_1 r^{n-1} \cos((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots, \\ v &= \varrho_0 r^n \sin(n\omega + \alpha_0) + \varrho_1 r^{n-1} \sin((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots, \end{aligned}$$

und die nach r genommenen Ableitungen hiervon werden

$$(4) \quad \begin{aligned} u' &= n\varrho_0 r^{n-1} \cos(n\omega + \alpha_0) + (n-1)\varrho_1 r^{n-2} \cos((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots, \\ v' &= n\varrho_0 r^{n-1} \sin(n\omega + \alpha_0) + (n-1)\varrho_1 r^{n-2} \sin((n-1)\omega + \alpha_1) + \cdots. \end{aligned}$$

Wir untersuchen die Veränderungen, welche diese Functionen (3) und (4) auf der Peripherie des Kreises mit dem Radius r erleiden, über dessen Grösse bald eine nähere Bestimmung getroffen werden soll. Wir theilen den Kreis in $4n$ gleiche Theile, indem wir $4n$ Radien unter den Amplituden

$$\omega = \frac{-\pi - 4\alpha_0}{4n}, \quad \frac{\pi - 4\alpha_0}{4n}, \quad \frac{3\pi - 4\alpha_0}{4n}, \quad \cdots \quad \frac{(8n-3)\pi - 4\alpha_0}{4n}$$

ziehen; die zwischen diesen Radien enthaltenen Stücke der Peripherie wollen wir der Reihe nach mit (I), (II), (III), (IV), $\cdots$ $(4n)$ bezeichnen. Dann geht in diesen Stücken der Winkel $(n\omega + \alpha_0)$ bezw. von

$$-\frac{\pi}{4} \text{ bis } +\frac{\pi}{4}, \quad \text{von } +\frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{3\pi}{4}, \quad \text{von } \frac{3\pi}{4} \text{ bis } \frac{5\pi}{4}, \quad \text{von } \frac{5\pi}{4} \text{ bis } \frac{7\pi}{4},$$

und dann wiederholen sich dieselben Werthe bis auf Vielfache von 2π in derselben Reihenfolge. Somit durchläuft der $\cos(n\omega + \alpha)$ bezw. die Werthefolgen

$$\begin{aligned} &\text{in (I), (V), } \cdots \quad \text{von } +\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ über } +1 \text{ bis } +\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \\ &\text{in (III), (VII), } \cdots \quad \text{„ } -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ „ } -1 \text{ „ } -\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \end{aligned}$$

und der $\sin(n\omega + \alpha_0)$ bezw. die Werthefolgen

in (II), (VI), ⋯ von $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ über $+1$ bis $+\sqrt{\frac{1}{2}}$,

in (IV), (VIII), ⋯ „ $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ „ -1 „ $-\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Setzen wir also zur Abkürzung

$$F(r) = \varrho_0 r^n \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \varrho_1 r^{n-1} - \varrho_2 r^{n-2} - \cdots,$$

$$G(r) = n\varrho_0 r^{n-1} \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (n-1)\varrho_1 r^{n-2} - (n-2)\varrho_2 r^{n-3} - \cdots,$$

wobei

$$G(r) = \frac{1}{r}\{nF(r) + \varrho_1 r^{n-1} + 2\varrho_2 r^{n-2} + \cdots\} \tag{5}$$

wird, dann erkennt man, durch Vergleichung mit (3) und (4), dass in

(I), (V), ⋯ $u > F(r)$, $u' > G(r)$,
(II), (VI), ⋯ $v > F(r)$, $v' > G(r)$,
(III), (VII), ⋯ $u < -F(r)$, $u' < -G(r)$,
(IV), (VIII), ⋯ $v < -F(r)$, $v' < -G(r)$

wird. Jetzt wählen wir eine positive Grösse r_0 als untere Grenze für r, so dass $F(r)$ für grössere Werthe positiv bleibt. Das ist nach § 17 möglich. Für dasselbe Werthegebiet $r > r_0$ wird in Folge der Beziehung (5) auch die Function $G(r)$ beständig positiv bleiben. Man sieht daraus, dass bei wachsender Amplitude in den Sectorbereichen für $r > r_0$

(6)
(I), (V), ⋯ $u > 0$, $u' > 0$ und also v beständig zunimmt,
(II), (VI), ⋯ $v > 0$, $v' > 0$ „ „ u „ abnimmt,
(III), (VII), ⋯ $u < 0$, $u' < 0$ „ „ v „ abnimmt,
(IV), (VIII), ⋯ $v < 0$, $v' < 0$ „ „ u „ zunimmt,

wie aus dem in § 22 bewiesenen Satze folgt. Demnach wird in

(7)
(I), (V), ⋯ v einmal vom Negativen durch Null zum Positiven,
(II), (VI), ⋯ u „ „ Positiven „ Null „ Negativen,
(III), (VII), ⋯ v „ „ Positiven „ Null „ Negativen,
(IV), (VIII), ⋯ u „ „ Negativen „ Null „ Positiven

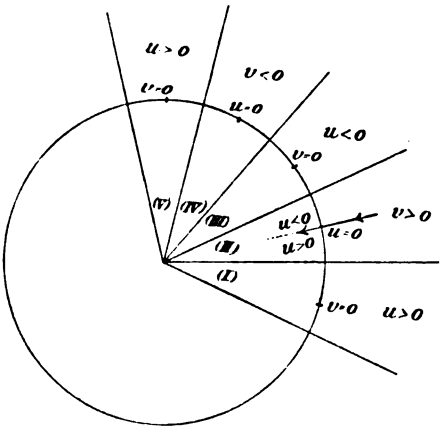
gehen, und dieses Passiren der Null findet in jedem der Gebiete auch nur einmal statt.

§ 28. Wir haben in § 15 gesehen, dass der Ort derjenigen Punkte der z-Ebene, für die $u = 0$ ist, nur aus Curven besteht, und dass Flächenstücke durch solche Punkte nicht stetig erfüllt werden können. Dagegen bilden die Punkte, in denen $u > 0$, und diejenigen, in denen $u < 0$ ist, Flächen, und diese werden wegen der Stetigkeits-

eigenschaften der Function u durch die Curven $u = 0$ von einander getrennt. Das Umgekehrte braucht natürlich nicht richtig zu sein; aber der Fall, dass zu beiden Seiten einer Curve $u = 0$ die Function u dasselbe Vorzeichen hat, kommt für unsere Fragen gar nicht in Betracht. Jedenfalls kann eine Curve $u = 0$, welche ein Gebiet mit positivem u von einem solchen mit negativem u trennt, nicht plötzlich abbrechen, da ja sonst ein Umkreisen des Endpunktes aus dem Gebiete $u > 0$ in das Gebiet $u < 0$ ohne Ueberschreiten der Curve $u = 0$ führen würde. Betrachten wir nun für ein beliebiges $r > r_0$ die Curven $u = 0$, so zeigt (6), (7), dass in allen Sectoren mit geradem Index (II), (IV), $\cdots$ je ein einziger Curvenzweig $u = 0$ aus dem Unendlichen herkommend, ohne sich selbst zu schneiden, einfach bis zum Kreise mit dem Radius r_0 hingeht. Diese Zweige wollen wir in solcher Richtung durchlaufen denken, dass der Bereich kleinerer Amplituden links, der grösserer Amplituden zur Rechten liegt. Bei Einhaltung der gewählten Richtung haben wir für $r \geq r_0$ auf den Curven $u = 0$ in den Aussensectoren von

(II), (VI), $\cdots$ zur Linken $u > 0$, zur Rechten $u < 0$,
(IV), (VIII), $\cdots$ „ „ $u < 0$, „ „ $u > 0$.

Tritt man jetzt auf $u = 0$ etwa in (II) ins Innere des Kreises mit dem Radius r_0, so kann, wie wir sahen, der Weg nie abbrechen und die Curve $u = 0$ muss wieder den Kreis verlassen. Sollte er sich irgendwie im Innern verzweigen, so wählen wir stets den am meisten nach rechts gelegenen Weg und sind dabei sicher, dass stets zur Rechten der Curve das Gebiet $u < 0$ bleibt. Ebenso muss es daher auch beim Austritte aus dem Kreise bleiben; hier aber wird die Richtung der oben festgestellten entgegengesetzt sein, woraus folgt, dass man nur in einem der Gebiete (IV), oder (VIII) oder (XII), $\cdots$ den Kreis verlassen kann. Nun war nach (6) in (II) der Werth von v positiv, in (IV), (VIII), $\cdots$ negativ. Daher muss die betrachtete Curve $u = 0$ im Innern des Kreises mindestens einmal die Curve $v = 0$ geschnitten haben, d. h. es besteht ein Werth von z, für welchen $u = 0$, $v = 0$,



und also $f(z) = 0$ ist. Damit ist die Existenz einer Wurzel gezeigt*).

§ 29. Ein dritter Beweis beruht gleichfalls auf der soeben benutzten Vertheilung der Werthe von u und v auf der Peripherie eines hinlänglich grossen Kreises. Er liefert aber noch weitere wichtige Einsichten und mag deshalb hier gleichfalls noch besprochen werden.

Wir betrachten $f(z)$ in der Nähe eines m-fachen Wurzelpunktes z_0, also eines Werthes, für den [vgl. (12^a) aus § 19]

$$\begin{aligned} f(z) &= (z - z_0)^m (a_m + a_{m+1} z + \cdots + a_n z^{n-m}) \\ &= (z - z_0)^m (a_m + a_{m+1}[(z - z_0) + z_0] + \cdots + a_n [(z - z_0) + z_0]^{n-m}) \\ &= (z - z_0)^m (b_m + b_{m+1}(z - z_0) + b_{m+2}(z - z_0)^2 + \cdots + b_n (z - z_0)^{n-m}) \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Da z_0 eine m-fache Wurzel ist, so muss b_m von Null verschieden sein. Nun setzen wir

$$z - z_0 = r\left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} \omega\right], \quad b_\varkappa = \sigma_\varkappa \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} \beta_\varkappa\right] \qquad (\varkappa = m,\ m+1,\ \cdots)$$

und bekommen bei diesen etwas geänderten Bezeichnungen

$$\begin{aligned} u &= \sigma_m r^m \cos(m\omega + \beta_m) + \sigma_{m+1} r^{m+1} \cos((m+1)\omega + \beta_{m+1}) + \cdots, \\ v &= \sigma_m r^m \sin(m\omega + \beta_m) + \sigma_{m+1} r^{m+1} \sin((m+1)\omega + \beta_{m+1}) + \cdots, \\ u' &= m\sigma_m r^{m-1} \cos(m\omega + \beta_m) + (m+1)\sigma_{m+1} r^m \cos((m+1)\omega + \beta_{m+1}) + \cdots, \\ v' &= m\sigma_m r^{m-1} \sin(m\omega + \beta_m) + (m+1)\sigma_{m+1} r^m \sin((m+1)\omega + \beta_{m+1}) + \cdots. \end{aligned} \tag{8}$$

Die Functionen (8) untersuchen wir auf der Peripherie eines Kreises um z_0 mit dem Radius r, über den bald eine Bestimmung getroffen werden soll. Wir theilen den Kreis in $4m$ gleiche Theile, indem wir $4m$ Radien unter den Amplituden

$$\omega = \frac{-\pi - 4\beta_m}{4m}, \quad \frac{+\pi - 4\beta_m}{4m}, \quad \frac{3\pi - 4\beta_m}{4m}, \quad \cdots \quad \frac{(8m-3)\pi - 4\beta_m}{4m}$$

ziehen; die zwischen diesen Radien enthaltenen Stücke der Peripherie wollen wir der Reihe nach mit (I), (II), (III), (IV), $\cdots$ $(4n)$ bezeichnen. Dann geht in diesen Stücken der Winkel $(m\omega + \beta_m)$ bezw. von

$$-\frac{\pi}{4} \text{ bis } +\frac{\pi}{4}, \text{ von } +\frac{\pi}{4} \text{ bis } \frac{3\pi}{4}, \text{ von } \frac{3\pi}{4} \text{ bis } \frac{5\pi}{4}, \text{ von } \frac{5\pi}{4} \text{ bis } \frac{7\pi}{4},$$

und dann wiederholen sich dieselben Werthe bis auf Vielfache von

---

*) Gauss; Werke Band III, S. 1: Demonstratio nova etc.; S. 71: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. — In der ersten Abhandlung findet sich eine Kritik der vor Gauss gegebenen Beweise. Die zweite Abhandlung giebt durch eine andere Wendung der Betrachtungen unseres letzten Paragraphen sofort die Existenz aller n Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades.

2π in derselben Reihenfolge. Somit durchläuft der $\cos(m\omega + \beta_m$ bezw. die Werthefolgen

$$\text{in (I), (V), } \cdots \quad \text{von } +\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ über } +1 \text{ bis } +\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\text{in (III), (VII), } \cdots \quad \text{von } -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ über } -1 \text{ bis } -\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

und der $\sin(m\omega + \beta_m)$ bezw. die Werthefolgen

$$\text{in (II), (VI), } \cdots \quad \text{von } +\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ über } +1 \text{ bis } +\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\text{in (IV), (VIII), } \cdots \quad \text{von } -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \text{ über } -1 \text{ bis } -\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Setzen wir also zur Abkürzung

$$F(r) = \sigma_m r^m \sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sigma_{m+1} r^{m+1} - \sigma_{m+2} r^{m+2} - \cdots,$$

$$G(r) = m\sigma_m r^{m-1} \sqrt{\tfrac{1}{2}} - (m+1)\sigma_{m+1} r^m - (m+2)\sigma_{m+2} r^{m+1} - \cdots$$

wobei

$$(9) \qquad F(r) = \frac{1}{m}[rG(r) + \sigma_{m+1} r^{m+1} + 2\sigma_{m+2} r^{m+2} + \cdots]$$

wird, dann erkennt man durch Vergleichung von F und G mit de Functionen (8), dass in

$$\begin{array}{llll} \text{(I), (V), } \cdots & u > F(r), & u' > G(r), \\ \text{(II), (VI), } \cdots & v > F(r), & v' > G(r), \\ \text{(III), (VII), } \cdots & u < -F(r), & u' < -G(r), \\ \text{(IV), (VIII), } \cdots & v < -F(r), & v' < -G(r) \end{array}$$

wird. Jetzt wählen wir für r eine obere Grenze r_0, unterhalb dere $G(r)$ bis beliebig nahe an $r = 0$ stets positiv bleibt. Das ist nac § 18 möglich, wie sich sofort zeigt, wenn man $G(r) : r^{m-1}$ betrachte Zugleich ergiebt sich hierbei die nothwendige Einschränkung au wesentlich positive Werthe von r. Für dasselbe Werthegebie $r_0 > r > 0$ wird in Folge der Beziehung (9) auch die Function $F($, beständig positiv bleiben. Man sieht daraus, dass in den Gebieten

$$(10) \quad \begin{array}{llll} \text{(I), (V), } \cdots & u > 0, & u' > 0 & \text{und also } v \text{ beständig zunimmt,} \\ \text{(II), (VI), } \cdots & v > 0, & v' > 0 & \text{„ „ } u \text{ „ abnimmt,} \\ \text{(III), (VII), } \cdots & u < 0, & u' < 0 & \text{„ „ } v \text{ „ abnimmt,} \\ \text{(IV), (VIII), } \cdots & v < 0, & v' < 0 & \text{„ „ } u \text{ „ zunimmt,} \end{array}$$

wie aus dem in § 22 bewiesenen Satze folgt. Demnach wird in

(I), (V), ⋯ v einmal vom Negativen durch Null zum Positiven,
(II), (VI), ⋯ u „ „ Positiven „ Null „ Negativen,
(III), (VII), ⋯ v „ „ Positiven „ Null „ Negativen,
(IV), (VIII), ⋯ u „ „ Negativen „ Null „ Positiven

gehen; dieses Passiren der Null findet in jedem der Gebiete auch nur einmal statt. Die Werthvertheilung, welche durch die Figur zum vorigen Paragraphen veranschaulicht ist, gilt auch hier unverändert.

§ 30. Aber hier können wir zu noch tieferer Einsicht gelangen. Wir haben dargelegt, dass in (II) die Function u genau einmal verschwindet, während sie in (I) positiv, in (III) dagegen negativ ist. Wir wollen zeigen, dass der im Sector (II) in den Kreis tretende Zweig der Curve $u = 0$ sich immer mehr der Halbirungslinie dieses Sectors nähert, wenn der Radius des Kreises beständig abnimmt. Es sei δ ein beliebig kleiner Werth und

$$\sin\delta = \varepsilon.$$

Dann ziehen wir zwei, die Halbirungslinie des Sectors (II) beliebig eng einschliessende Radien von z_0 aus unter den Richtungen

$$(11) \qquad \frac{2\pi - 4\beta_m - 4\delta}{4m} \quad \text{und} \quad \frac{2\pi - 4\beta_m + 4\delta}{4m};$$

für dieselben wird $(m\omega + \beta_m)$ bezw. gleich

$$\frac{\pi}{2} - \delta \quad \text{und} \quad \frac{\pi}{2} + \delta,$$

und es kann der Werth von $\cos(m\omega + \beta_m)$ zwischen den Winkeln

$$(\text{II}^a) \qquad \omega = \frac{\pi - 4\beta_m}{4m} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{2\pi - 4\beta_m - 4\delta}{4m}$$

nicht unter $+\varepsilon$ fallen, und zwischen den Winkeln

$$(\text{II}^b) \qquad \omega = \frac{2\pi - 4\beta_m + 4\delta}{4m} \quad \text{und} \quad \omega = \frac{3\pi - 4\beta_m}{4m}$$

nicht über $-\varepsilon$ steigen. Daraus folgt wie soeben, dass, wenn man r kleiner als die kleinste positive Wurzel r_0' der zweiten, und damit auch der ersten der beiden Gleichungen

$$\sigma_m r^m \varepsilon - \sigma_{m+1} r^{m+1} - \sigma_{m+2} r^{m+2} - \cdots = 0,$$
$$m\sigma_m r^{m-1}\varepsilon - (m+1)\sigma_{m+1} r^m - (m+2)\sigma_{m+2} r^{m+1} - \cdots = 0$$

wählt, u für alle r zwischen 0 und r' in (II^a) positiv, in (II^b) negativ ist und also nur in dem beliebig engen Winkelraume (11) durch Null gehen kann. Folglich schmiegt sich die Curve $u = 0$ in (II) mehr und mehr der Halbirungslinie an, welche unter der Amplitude

$$\frac{\pi - 2\beta_m}{2m}$$

verläuft. Es ist ersichtlich, dass das Entsprechende für alle Zweige der Curven $u = 0$ sowie $v = 0$ gilt; d. h.: Bei einer m-fachen Wurzel z_0 schneiden sich m Zweige der Curve $u = 0$ in z_0 unter gleichen Winkeln; ebenso m Zweige der Curve $v = 0$, und zwar halbiren diese die Winkel der ersteren Curvenzweige. Bei einer einfachen Wurzel stehen die Zweige $u = 0$ und $v = 0$ auf einander senkrecht.

§ 31. Verfolgt man den Verlauf der Werthe des Quotienten $\frac{u}{v}$ auf unserem Kreise bei wachsendem Winkel ω, so zeigt sich, dass auf der gesammten Peripherie der Werth von $\frac{u}{v}$ genau $2m$-mal vom Positiven durch Null zum Negativen geht. Denn u geht m-mal vom Positiven durch Null zum Negativen, nämlich je einmal in (II), (VI), $\cdots$, und m-mal vom Negativen durch Null zum Positiven, je einmal in (IV), (VIII) $\cdots$. Da im ersten Falle $v > 0$, im zweiten $v < 0$ ist, so folgt hieraus das Behauptete. Diese Eigenschaft bleibt bestehen, wenn man den Kreis durch eine einfache geschlossene Curve ersetzt, die ganz innerhalb des Gebietes $r < r_0'$ verläuft und von jedem von z_0 ausgehenden Radius einmal und nur einmal geschnitten wird. Beispielsweise kann man für die Curve ein Rechteck setzen, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel laufen.

Wir wollen das Analogon dieses Satzes für einen Punkt suchen, der kein Wurzelpunkt von $f(z) = 0$ ist. Geht durch den Punkt z_1 keine Curve $u = 0$, so kann man um z_1 einen kleinen Kreis schlagen, auf dessen Umfang u nicht verschwindet, und für den also $\frac{u}{v}$ nie durch Null geht, da v stets endlich bleibt. Hier gilt also der obige Satz ohne jede Aenderung.

Weiter mögen mehrere Zweige der Curve $u = 0$ durch einen Punkt z_2 gehen, aber kein Zweig der Curve $v = 0$. Hier kann man um z_2 einen Kreis schlagen, auf dessen Umfang v stets von Null verschieden ist und also gleiches Zeichen behält. Dann verschwindet $\frac{u}{v}$ überall da, wo $u = 0$ ist, und bleibt auf der gesammten Peripherie endlich. Folglich kann $\frac{u}{v}$ nicht zweimal hinter einander vom Positiven durch Null zum Negativen, oder zweimal hintereinander vom Negativen durch Null zum Positiven gehen; und da jener Quotient nach vollständiger Umkreisung das anfängliche Vorzeichen wieder annimmt, so müssen beide Fälle gleich oft eintreten.

Bezeichnet man diese beiden Anzahlen beim Umkreisen in positiver d. h. in derartiger Richtung, dass das Innere des Kreises be-

ständig zur Linken der Fortschrittsrichtung liegt, mit k und mit k', so wird $k - k' = 0$ werden.

Das im vorigen Paragraphen für einen m-fachen Wurzelpunkt gefundene Resultat lässt sich, da dort $k = 2m$, $k' = 0$ ist, auch durch die Gleichung $k - k' = 2m$ ausdrücken.

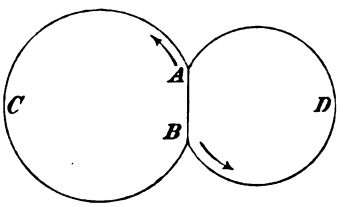
Demnach gilt für jeden Punkt der Ebene, wenn wir wieder den Kreis in der oben besprochenen Art durch eine andere, passend gegewählte Curve von der oben genau dargelegten Art ersetzen, das Theorem: Umschliesst man einen beliebigen Punkt z' der Ebene durch eine Curve von hinreichend kleinen Dimensionen, welche von jedem Radiusvector aus z' nur einmal geschnitten wird; durchläuft man diese Curve in der Richtung, dass das Innere zur Linken bleibt; bezeichnet man mit k, wie oft hierbei der Quotient $\frac{u}{v}$ vom Positiven durch Null zum Negativen, und mit k', wie oft er vom Negativen durch Null zum Positiven geht, dann giebt die Differenz $(k - k')$ die doppelte Zahl der Multiplicität an, mit welcher z' als Wurzel von $u + vi = f(z) = 0$ auftritt.

Bemerkenswerth ist hierbei einmal, dass $k \geqq k'$, und ferner, dass $(k - k')$ stets eine gerade Zahl sein wird.

§ 32. Der bewiesene Satz bezieht sich auf Curven von hinreichend kleinen Dimensionen; aber von hier aus können wir leicht zu dem folgenden allgemeinen Satz kommen: Durchläuft z eine einfache geschlossene Curve C, auf welcher kein Wurzelpunkt von $f(z) = 0$ liegt, derart dass das Innere stets zur Linken bleibt, und geht dabei der Quotient $\frac{u}{v}$ bei einem vollständigen Umlaufe k-mal vom Positiven durch Null zum Negativen und k'-mal vom Negativen durch Null zum Positiven, dann giebt

$$\Delta = k - k'$$

die doppelte Anzahl der innerhalb der Curve liegenden Wurzeln von $f(z) = 0$ an, jede in ihrer richtigen Multiplicität gezählt.



Wir zeigen zuerst: Ist der Satz für zwei Contouren ACB und ABD richtig, welche ein gemeinsames Linienstück AB besitzen, dann ist er auch für das von $ACBDA$, nach Ausschaltung von AB umschlossene Stück richtig. Die den Zahlen k und k' entsprechenden mögen für die drei Linienzüge ACB; BA; BDA bezw. k_1, k_1';

k_3, k_3'; k_2, k_2' sein; Δ_1 möge sich auf die vollständige Umgrenzung $ACBA$, und Δ_2 auf $ABDA$ beziehen. Dann ist ersichtlich, dass das Stück AB in der Richtung von A nach B durchlaufen die Zahlen k_3', k_3 an Stelle von k_3, k_3' geben wird, so dass

$$\Delta_1 = (k_1 + k_3) - (k_1' + k_3'), \quad \Delta_2 = (k_2 + k_3') - (k_2' + k_3),$$
$$\Delta_1 + \Delta_2 = (k_1 + k_2) - (k_1' + k_2')$$

ist. Diese Summe $\Delta_1 + \Delta_2$ stimmt also mit dem auf die Gesammtcurve $ACBDA$ bezogenen Δ überein, wie behauptet worden war; denn auf der angegebenen Curve treten die Zahlen $(k_1 + k_2)$, $(k_1' + k_2')$ allein auf.

Nun können wir ferner das von der vorgelegten Curve C umschlossene Gebiet in beliebig kleine Theile derart theilen, dass in jedem von ihnen höchstens ein einfacher oder mehrfacher Wurzelpunkt liegt. Nach dem vorigen Paragraphen gilt unser Satz für jeden dieser Theile einzeln; nach dem soeben Bewiesenen auch für die Vereinigung von je zwei aneinanderstossenden; und demnach gilt er ganz allgemein.

§ 33. Nehmen wir zu diesen Ueberlegungen nun noch die Gauss'schen Betrachtungen über die Verteilung der Werthe von u, v auf der Peripherie eines hinlänglich grossen Kreises hinzu, wie wir sie im § 27 dargelegt haben, und beachten, dass aus den Formeln (6), (7) jenes Paragraphen $k = 2n$, $k' = 0$, $\Delta = 2n$ folgt, so ist unmittelbar ein dritter Beweis für die Existenz der Wurzeln geliefert, und zwar treten hier alle n Wurzeln gleichzeitig in Evidenz.

§ 34. Genau so, wie wir in § 31 beim Verfolgen des Quotienten $\frac{u}{v}$ auf unserem Kreise mit wachsendem Winkel ω im Falle einer m-fachen Wurzel $2m$ Punkte antrafen, in welchen $\frac{u}{v}$ vom Positiven durch Null zum Negativen geht, genau so erkennen wir die Existenz von $2m$ Punkten, in denen $\frac{u}{v}$ vom Negativen durch Unendlich zum Positiven übertritt. Daraus können wir nach der benutzten Schlussweise auch folgern: Durchläuft z eine einfache geschlossene Curve C, auf welcher kein Wurzelpunkt von $f(z) = 0$ liegt, derart dass das Innere stets zur Linken bleibt, und geht dabei der Quotient $\frac{u}{v}$ bei einem vollständigen Umlaufe l-mal vom Negativen durch Unendlich zum Positiven, und l'-mal vom Positiven durch Unendlich zum Negativen, dann giebt die Differenz

$$E = l - l'$$

die doppelte Anzahl der innerhalb der Curve liegenden

Wurzeln von $f(z) = 0$ an, jede in ihrer richtigen Multiplicität gezählt.

Natürlich können wir von diesem Satze und dem in § 32 aufgestellten ohne Weiteres auf das Verhalten des Quotienten $\frac{v}{u}$ bei einem vollständigen Umlaufe übergehen. So tritt dieser Quotient beim Umlaufe l-mal aus dem Negativen durch Null ins Positive, und l'-mal aus dem Positiven durch Null ins Negative über.

§ 35. Der in den Paragraphen 29 bis 33 gegebene Beweis stammt von Cauchy (J. de l'Éc. Pol. 1837 p. 176). Sein Kern liegt in dem Satze von § 32. Von diesem lässt sich eine einfache und schöne geometrische Anschauung geben, sobald man, wie dies im Anfange der zweiten Vorlesung dargelegt ist, die Functionalwerthe von $f(z) = w = u + iv$ auf einer der z-Ebene entsprechenden (u, v)-Ebene repräsentirt und das Bild Γ der von z durchlaufenen Curve C untersucht. Für den zum Punkte (u, v) gehörigen, vom Nullpunkte $(u = 0, v = 0)$ ausgehenden Radiusvector hat man die Amplitude ϑ durch die Gleichungen

$$\cos\vartheta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin\vartheta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

zu bestimmen. Ein solcher Radiusvector fällt also für $v = 0$ in die Richtung der positiven oder der negativen u-Axe; wenn $\frac{v}{u}$ aus dem Negativen durch Null ins Positive geht, dann geht der, den Punkt w repräsentirende Radiusvector im Sinne wachsender Amplituden, also in positiver Drehung durch die (positive oder negative) u-Halbaxe. Wenn sich daher w von einem beliebigen Ausgangspunkte an so bewegt, dass $\frac{v}{u}$ hinter einander λ-mal vom Negativen durch Null zum Positiven geht, dann hat ϑ eine Drehung in wachsendem Sinne zurückgelegt, die mehr als $\lambda\pi$ und weniger als $(\lambda + 1)\pi$ beträgt. Ebenso, wenn $\frac{v}{u}$ hinter einander λ'-mal vom Positiven durch Null zum Negativen geht, dann hat ϑ eine Drehung in abnehmendem Sinne zurückgelegt, die, absolut genommen, mehr als $\lambda'\pi$ und weniger als $(\lambda' + 1)\pi$ ausmacht. Wenn also bei dem Gesammtumlauf von z der Quotient $\frac{v}{u}$ genau l- und l'-mal in der einen und der andern Richtung die Null passirt, dann hat der Radiusvector von O nach w dabei eine Gesammtdrehung von $(l - l')\pi = E\pi$ vollbracht. Bei einem Gesammtumlauf von z giebt der Quotient aus dem Zuwachse der Amplitude ϑ durch 2π die Anzahl der in der Curve C eingeschlossenen Wurzeln von $w = 0$. Oder anders ausgesprochen: Umschliesst die Curve C der

z-Ebene ν Wurzeln, dann umschlingt die Curve Γ der w-Ebene den Nullpunkt in ν-facher Schleife, und umgekehrt. In dieser letzten Gestalt erscheint das Cauchy'sche Theorem als nahezu selbstverständlich.

Vierte Vorlesung.

Zerlegung; Interpolationsformeln.

§ 36. Die Betrachtungen des vorigen Kapitels haben uns gezeigt, dass jede ganze Function

$$(1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

n gleiche oder von einander verschiedene Wurzelpunkte besitzt. Nach § 14 kann man daher stets

$$(2) \quad f(z) = a_0 (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k}, \quad (m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n)$$

setzen, wo $z_1, z_2, \cdots z_k$ die von einander verschiedenen Wurzeln von $f(z) = 0$ sind, und $m_1, m_2, \cdots m_k$ ihre Multiplicitäten angeben. Aus § 19 folgt

$$\begin{aligned} f(z+h) &= a_0 (z+h-z_1)^{m_1} (z+h-z_2)^{m_2} \cdots (z+h-z_k)^{m_k} \\ &= a_0 \{ (z-z_1)^{m_1} (z-z_2)^{m_2} \cdots (z-z_k)^{m_k} \\ &\qquad + h[m_1 (z-z_1)^{m_1-1} (z-z_2)^{m_2} \cdots + \cdots] \\ &\qquad + h^2 [\cdots\cdots] + \cdots \} \\ &= f(z) + h f'(z) + \frac{h^2}{1 \cdot 2} f''(z) + \cdots, \end{aligned}$$

und deshalb ergiebt sich

$$(3) \qquad f'(z) = a_0 \sum_{\lambda=1}^{k} m_\lambda (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_\lambda)^{m_\lambda - 1} \cdots (z - z_k)^{m_k};$$

$$(4) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m_1}{z - z_1} + \frac{m_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{m_k}{z - z_k}.$$

Falls nur einfache Wurzeln vorhanden sind, entsteht hieraus

$$(3^a) \qquad f'(z) = a_0 \sum_{\lambda=1}^{n} (z - z_1) \cdots (z - z_{\lambda-1}) (z - z_{\lambda+1}) \cdots (z - z_n),$$

$$(4^a) \qquad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}.$$

Wenn wir annehmen, dass die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ sämmtlich reell sind, dann folgt [§ 10, (IV)] aus

$$f(x'+y'i)=0 \quad \text{gleichzeitig} \quad f(x'-y'i)=0,$$

d. h. hat eine Gleichung mit reellen Coefficienten eine complexe Wurzel $z'=x'+y'i$, so hat sie auch die conjugirte Grösse $x'-y'i$ zur Wurzel. Dieses Theorem gestattet folgenden Zusatz: gleichzeitig ist die Multiplicität beider Wurzeln dieselbe. Denn setzt man

$$f(z)=(z-x'-y'i)(z-x'+y'i)f_1(z)=((z-z')^2+y'^2)f_1(z)$$

und hat $f_1(z)=0$ nochmals $x'+y'i$ zur Wurzel, so hat diese Gleichung auch $x'-y'i$ zur Wurzel, da

$$f_1(z)=\frac{f(z)}{(z-x')^2+y'^2}$$

ebenfalls lauter reelle Coefficienten besitzt, u. s. w. Man kann daher auch sagen: Jede ganze Function mit reellen Coefficienten lässt sich in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegen.

Wenn man im Falle einfacher oder vielfacher complexer Wurzeln die conjugirten Glieder in (4ª) oder (4) zusammenfasst, dann entsteht

$$m_\alpha\left(\frac{1}{z-x_\alpha-iy_\alpha}+\frac{1}{z-x_\alpha+iy_\alpha}\right)=\frac{2m_\alpha(z-x_\alpha)}{(z-x_\alpha)^2+y_\alpha^2}.$$

§ 37. Aus (3) ersieht man, dass vielfache Wurzeln von $f=0$ auch Wurzeln von $f'=0$ sind. Durch einfache Operationen kann man $f=0$ von seinen vielfachen Wurzeln befreien. Um diese Verhältnisse genauer zu studiren, müssen wir etwas weiter ausholen.

Zunächst leiten wir die von Lagrange stammende sogenannte Lagrange'sche Interpolationsformel ab. Es ist ersichtlich, dass zwei ganze Functionen, welche beide höchstens vom n^{ten} Grade sind, identisch gleich sein müssen, falls sie für $(n+1)$ Werthe der Variabeln übereinstimmen. Denn ihre Differenz, die ja auch höchstens bis zum n^{ten} Grade aufsteigt, verschwindet für jene $(n+1)$ Werthe und ist folglich identisch Null. Setzt man also fest, dass eine Function $f(z)$, welche höchstens vom n^{ten} Grade ist, den Argumentwerthen

$$z=z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_n$$

die Functionalwerthe

$$w=w_0,\ w_1,\ w_2,\ \cdots\ w_n$$

zuordnet, so ist dadurch $f(z)$ völlig bestimmt. Hierbei müssen natürlich die $z_0,\ z_1,\ \cdots\ z_n$ sämmtlich unter einander verschieden sein. Der besondere Fall, dass n der Werthe w_α, z. B. die n letzten, gleich Null sind, lässt sich sofort behandeln, da die gesuchte Function $f_0(z)$ dann durch die zugehörigen Factoren $z-z_\alpha$ theilbar sein muss und sich

vom Producte derselben also nur durch einen constanten Factor unterscheidet. So findet man den Ausdruck

$$f_0(z) = w_0 \frac{(z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)}{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \cdots (z_0 - z_n)};$$

diesen können wir nach Formel (3ª) bequemer schreiben. Wir setzen

$$\varphi(z) = (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_n);$$

hiervon ist die erste Ableitung für das Argument z_0

$$\varphi'(z_0) = (z_0 - z_1)(z_0 - z_2) \cdots (z_0 - z_n),$$

und wir erhalten

$$f_0(z) = w_0 \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)\varphi'(z_0)}.$$

Aus diesem Partialresultate folgt das allgemeine, da, wie man sofort sieht, bei ähnlicher Definition von $f_1, \cdots f_n$

$$f(z) = f_0(z) + f_1(z) + \cdots + f_n(z),$$

und also

$$f(z) = \sum_{\lambda=0}^{n} w_\lambda \frac{\varphi(z)}{(z - z_\lambda)\varphi'(z_\lambda)} \tag{5}$$

wird.

Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass $f(z)$ nicht gerade bis zum n^{ten} Grade aufzusteigen braucht. Genügen die w_λ bereits einer Function niederen Grades, so wird eben diese durch die Formel (5) dargestellt werden.

§ 38. Bestimmen wir nun durch (5) eine gegebene Function

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n,$$

indem wir

$$w_\lambda = f(z_\lambda) = z_\lambda^n + a_1 z_\lambda^{n-1} + a_2 z_\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

setzen, so folgt

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{f(z_\lambda)}{\varphi'(z_\lambda)} (z^n + b_1^{(\lambda)} z^{n-1} + \cdots + b_n^{(\lambda)}),$$

wobei der Einfachheit halber

$$z^n + b_1^{(\lambda)} z^{n-1} + \cdots + b_n^{(\lambda)}$$

statt

$$(z - z_0) \cdots (z - z_{\lambda-1})(z - z_{\lambda+1}) \cdots (z - z_n)$$

gesetzt ist. Da die beiden Ausdrücke links und rechts in der letzten Gleichung einander identisch gleich sind, so kann man die Coefficienten der höchsten Potenzen einander gleich setzen, und dadurch entsteht

$$1 = \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{z_\lambda^n + a_1 z_\lambda^{n-1} + \cdots + a_n}{\varphi'(z_\lambda)},$$

worin die n Constanten $a_1, \cdots a_n$ ganz beliebige Grössen sind; machen wir uns diesen Umstand zu nutze, so erhalten wir die Formeln

$$(6)\qquad \sum_{\lambda=0}^{n} \frac{z_\lambda^{n-\varkappa}}{\varphi'(z_\lambda)} = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n),$$

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{z_\lambda^{n}}{\varphi'(z_\lambda)} = 1,$$

welche als die Euler'schen Formeln bekannt sind.

Hier erscheinen die Euler'schen Formeln als Folgerung aus der Lagrange'schen Formel. Man kann dies Verhältniss aber auch umkehren. Die ersten n Formeln (6) fassen wir mit Hülfe von n willkürlichen Constanten c in die eine

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{c_1 z_\lambda^{n-1} + c_2 z_\lambda^{n-2} + \cdots + c_n}{\varphi'(z_\lambda)} = 0$$

zusammen, und wenn wir

$$g(z) = c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$

setzen, so folgt daraus, sobald man nur den ersten Summanden links stehen lässt,

$$\frac{g(z_0)}{\varphi'(z_0)} = -\sum_{\lambda=1}^{n} \frac{g(z_\lambda)}{\varphi'(z_\lambda)},$$

$$g(z_0) = -\sum_{\lambda=1}^{n} g(z_\lambda) \frac{(z_0 - z_1)(z_0 - z_2)\cdots(z_0 - z_n)}{(z_\lambda - z_0)(z_\lambda - z_1)\cdots(z_\lambda - z_n)}$$

$$= +\sum_{\lambda=1}^{n} g(z_\lambda) \frac{(z_0 - z_1)\cdots(z_0 - z_{\lambda-1})(z_0 - z_{\lambda+1})\cdots(z_0 - z_n)}{(z_\lambda - z_1)\cdots(z_\lambda - z_{\lambda-1})(z_\lambda - z_{\lambda+1})\cdots(z_\lambda - z_n)}.$$

Sobald man nun statt des willkürlichen Werthes z_0 die Variable z einsetzt, wird dieses Resultat identisch mit der Lagrange'schen Formel für eine Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades.

§ 39. Wir wollen hier noch eine besondere Form der Euler'schen Formeln hervorheben. Bedeutet wie in § 37 und § 38

$$\varphi(z) = (z - z_0)(z - z_1)\cdots(z - z_n),$$

und $\psi(z)$ eine beliebige Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, dann zeigt (6)

$$\frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)} + \frac{\psi(z_1)}{\varphi'(z_1)} + \frac{\psi(z_2)}{\varphi'(z_2)} + \cdots + \frac{\psi(z_n)}{\varphi'(z_n)} = 0,$$

$$(7)\qquad \frac{\psi(z_0)}{(z_0 - z_1)\cdots(z_0 - z_n)} - \frac{\psi(z_1)}{(z_0 - z_1)\cdot(z_1 - z_2)\cdots(z_1 - z_n)} - \frac{\psi(z_2)}{(z_0 - z_2)\cdot(z_2 - z_1)\cdots(z_2 - z_n)} - \cdots = 0.$$

Wenn wir nun in (7) ζ für z_0 eintragen und die Bezeichnung

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$$

benutzen, dann entsteht aus (7) die neue Form

$$(8) \qquad \frac{\psi(\zeta)}{f(\zeta)} = \frac{\psi(z_1)}{(\zeta - z_1) f'(z_1)} + \frac{\psi(z_2)}{(\zeta - z_2) f'(z_2)} + \cdots + \frac{\psi(z_n)}{(\zeta - z_n) f'(z_n)}.$$

Diese Formel vermittelt die Zerlegung der gebrochenen rationalen Function $\psi : f$ in Partialbrüche. Dabei ist $f(\zeta)$ eine beliebige Function n^{ten} Grades ohne mehrfache Nullstellen, $\psi(\zeta)$ eine beliebige Function, die höchstens bis zum Grade $(n - 1)$ aufsteigt.

§ 40. Wegen der gegenseitigen Zurückführung von (5) und (6) auf einander ist ein directer Nachweis der Euler'schen Formeln von Interesse. Wir betrachten zu diesem Zwecke die Summe

$$(9) \qquad \sum z_0^\alpha \varphi'(z_1) \varphi'(z_2) \cdots \varphi'(z_n),$$

welche auf alle $(n + 1)$ Glieder erstreckt werden soll, die aus dem hingeschriebenen durch cyklische Verschiebung der Indices entstehen. Da sowohl $\varphi'(z_0)$ als $\varphi'(z_1)$ durch $(z_0 - z_1)$ theilbar ist, so werden in (9) alle Summanden mit Ausnahme der beiden folgenden:

$$z_0^\alpha \varphi'(z_1) \varphi'(z_2) \cdots \varphi'(z_n)$$

und

$$z_1^\alpha \varphi'(z_0) \varphi'(z_2) \cdots \varphi'(z_n)$$

durch $(z_0 - z_1)^2$ theilbar. Die Summe dieser beiden Glieder ist nun aber

$$= \varphi'(z_2) \cdots \varphi'(z_n)(z_0 - z_1)\{z_1^\alpha (z_0 - z_2) \cdots (z_0 - z_n) - z_0^\alpha (z_1 - z_2) \cdots (z_1 - z_n)\},$$

und, weil die letzte Klammer für $z_0 = z_1$ verschwindet und deshalb den Factor $(z_0 - z_1)$ enthält, so ist auch diese Summe durch $(z_0 - z_1)^2$ theilbar. Dasselbe gilt somit auch für (9); und da z_0, z_1 zwei willkürliche Elemente aus $z_0, z_1, \cdots z_n$ sind, so ist (9) durch das Product

$$(10) \qquad \Delta^2 = \prod_{\lambda, \mu} (z_\lambda - z_\mu)^2 \qquad (\lambda < \mu;\ \lambda = 0, 1, \cdots n - 1;\ \mu = 1, 2, \cdots n)$$

$$= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \varphi'(z_0) \varphi'(z_1) \cdots \varphi'(z_n)$$

theilbar. Die Dimension dieses in den z_λ homogenen Ausdruckes ist

$$n(n + 1) = n + n^2,$$

und die von (9)

$$\alpha + n^2.$$

Sobald die letzte Zahl kleiner als die voraufgehende ist, d. h. für $\alpha = 0, 1, \cdots (n - 1)$, wird der Quotient von (9) durch (10) gleich Null; damit ist der erste Theil der Formeln (6) bewiesen. Sobald $\alpha = n$ ist, wird der Quotient von (9) durch (10) eine Constante, also

$$\sum z_0^n \varphi'(z_1)\varphi'(z_2)\cdots\varphi'(z_n) = \text{const.}\,\Delta^2.$$

Vergleicht man die höchsten Potenzen von z_0 auf beiden Seiten, so findet man const. $= (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$, und daher folgt der zweite Theil der Formeln (6)

$$\sum_{\lambda=0}^{n} \frac{z_\lambda^n}{\varphi'(z_\lambda)} = 1.$$

§ 41. An das soeben behandelte Problem schliesst sich eine weitere, von Cauchy aufgeworfene und beantwortete und dann später von Jacobi eingehend studirte Frage*) nach der Herstellung einer gebrochenen rationalen Function

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)},$$

deren Zähler vom Grade m, deren Nenner vom Grade n ist, und die für die $(m+n+1)$ Werthe des Argumentes

$$z_0, z_1, z_2, \cdots z_{m+n}$$

die Werthe

$$w_0, w_1, w_2, \cdots w_{m+n}$$

annimmt. Zunächst ist es klar, dass es wesentlich verschiedene Functionen

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \quad \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)} \tag{11}$$

nicht geben kann, welche die Aufgabe lösen. Denn die Function

$$\psi(z)\psi_1(z)\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} - \frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)}\right) = \varphi(z)\psi_1(z) - \psi(z)\varphi_1(z)$$

steigt höchstens bis zum Grade $(m+n)$ auf; sie verschwindet ferner für die $(m+n+1)$ Werthe $z_0, z_1, \cdots z_{m+n}$ und ist daher identisch gleich Null, d. h. es wird

$$\varphi(z)\psi_1(z) = \psi(z)\varphi_1(z).$$

Setzen wir nun voraus, dass beide Brüche (11) schon nach Möglichkeit gehoben sind, so kann $\varphi(z)$ mit $\psi(z)$ keinen Linearfactor gemeinsam haben und ist also ganz in $\varphi_1(z)$ enthalten; aus ähnlichen Gründen ist aber auch $\varphi_1(z)$ ein Theiler von $\varphi(z)$; folglich unterscheiden sich beide Functionen höchstens durch einen constanten Factor von einander, und das Gleiche muss bei $\psi_1(z)$ und $\psi(z)$ stattfinden. Dabei sind diese Factoren ersichtlich dieselben, und man hat somit

$$\varphi(z) = c\varphi_1(z), \quad \psi(z) = c\psi_1(z).$$

*) A. L. Cauchy, Analyse algébrique. 1821. Note V p. 527. Jacobi, Werke. Bd. III S. 479 ff.: Ueber die Darstellung einer Reihe gegebener Werthe etc.

§ 42. Die gestellte Aufgabe fordert, dass die $(m+n+1)$ Gleichungen

$$\frac{\varphi(z_\lambda)}{\psi(z_\lambda)} = w_\lambda \quad \text{oder} \quad \varphi(z_\lambda) = w_\lambda \psi(z_\lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots m+n)$$

stattfinden. Setzt man

$$\varphi(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m, \quad \psi(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n,$$

dann bestehen zwischen den Unbekannten a und b die $(m+n+2)$ linearen, homogenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&a_0\psi + a_1 z\psi + a_2 z^2\psi + \cdots + a_m z^m\psi - b_0\varphi - b_1 z\varphi - \cdots - b_n z^n\varphi = 0,\\
&a_0 + a_1 z_0 + a_2 z_0^2 + \cdots + a_m z_0^m - b_0 w_0 - b_1 z_0 w_0 - \cdots - b_n z_0^n w_0 = 0,\\
&a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \cdots + a_m z_1^m - b_0 w_1 - b_1 z_1 w_1 - \cdots - b_n z_1^n w_1 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

aus denen wir die $(m+n+2)$ Grössen a, b eliminiren können. Es genügt dazu, die Gleichungsdeterminante zu bilden. Diese entwickeln wir nun nach dem Laplace'schen Satze, indem wir Partialdeterminanten aus den ersten $(m+1)$ und aus den letzten $(n+1)$ Spalten zu Grunde legen. Jedes der dabei entstehenden Producte hat entweder in der ersten Zeile des ersten Factors ψ, oder in der ersten Zeile des zweiten Factors φ. Hiernach scheiden wir die Summanden, welche der Laplace'sche Satz liefert, in zwei Sorten und schreiben demgemäss

$$0 = \psi \sum_{(i)} \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^m \\ 1 & z_{i_1} & \cdots & z_{i_1}^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_{i_m} & \cdots & z_{i_m}^m \end{vmatrix} w_{k_1} \cdots w_{k_{n+1}} \begin{vmatrix} 1 & z_{k_1} & \cdots & z_{k_1}^n \\ 1 & z_{k_2} & \cdots & z_{k_2}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_{k_{n+1}} & \cdots & z_{k_{n+1}}^n \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(i,k)}$$

$$+ \varphi \sum_{(k)} \begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^n \\ 1 & z_{i_1} & \cdots & z_{i_1}^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_{i_n} & \cdots & z_{i_n}^n \end{vmatrix} w_{i_1} \cdots w_{i_n} \begin{vmatrix} 1 & z_{k_1} & \cdots & z_{k_1}^m \\ 1 & z_{k_2} & \cdots & z_{k_2}^m \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & z_{k_{m+1}} & \cdots & z_{k_{m+1}}^m \end{vmatrix} \cdot (-1)^{(m+1)(n+1)+(i,k)}$$

Hierbei ist $i_\alpha < i_{\alpha+1}$, $k_\alpha < k_{\alpha+1}$ vorausgesetzt; die erste Summe bezieht sich auf alle Combinationen $i_1, \cdots i_m$, die aus den Zahlen 0, 1, $\cdots (m+n)$ gebildet werden können, und die $k_1, \cdots k_{n+1}$ ergänzen die Werthe der i zu der vollständigen Reihe 0, 1, $\cdots (m+n)$; das Vorzeichen $(-1)^{(i,k)}$ ist gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Zahl der Inversionen in der Folge $i_1, i_2, \cdots i_m, k_1, k_2, \ldots k_{n+1}$ eine gerade oder eine ungerade ist. Die zweite Summe ist in ähnlicher Weise gebildet; die Potenz des Vorzeichens $(-1)^{(m+1)(n+1)}$ tritt dadurch

ein, dass man die auf die b bezüglichen Spalten an die ersten Stellen gebracht hat. Nun ist

$$\begin{vmatrix} 1 & z & \cdots & z^m \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & z_{i_m} & \cdots & z_{i_m}^m \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} (z-z_{i_1})\cdots(z-z_{i_m})\cdots(z_{i_{m-1}}-z_{i_m}),$$

und setzen wir dies Product kürzer, vgl. (10),

$$= (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} \Delta(z, z_{i_1}, \cdots z_{i_m}),$$

so können wir unter Einführung von Δ schreiben

$$0 = \psi \sum_{(i)} w_{k_1} \cdots w_{k_{n+1}} \Delta(z, z_{i_1}, \cdots z_{i_m}) \Delta(z_{k_1}, \cdots z_{k_{n+1}}) (-1)^{(i,k)}$$
$$+ \varphi \sum_{(k)} w_{i_1} \cdots w_{i_n} \Delta(z, z_{i_1}, \cdots z_{i_n}) \Delta(z_{k_1}, \cdots z_{k_{m+1}}) (-1)^{(i,k)+(m+1)(n+1)}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch den, wie leicht zu sehen, von der Anordnung der z unabhängigen Ausdruck

$$(-1)^{(i,k)} \Delta(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots z_{i_m}, z_{k_1}, \cdots z_{k_{n+1}}),$$

so geht sie über in

$$0 = \psi \sum_{(i)} w_{k_1} \cdots w_{k_{n+1}} \frac{(z-z_{i_1})\cdots(z-z_{i_m})}{\big((z_{i_1}-z_{k_1})\cdots(z_{i_1}-z_{k_{n+1}})\big)\cdots\big((z_{i_m}-z_{k_1})\cdots(z_{i_m}-z_{k_{n+1}})\big)}$$
$$+ \varphi \sum_{(k)} w_{i_1} \cdots w_{i_n} \frac{(z-z_{i_1})\cdots(z-z_{i_n})\,(-1)^{(m+1)(n+1)}}{\big((z_{i_1}-z_{k_1})\cdots(z_{i_1}-z_{k_{m+1}})\big)\cdots\big((z_{i_n}-z_{k_1})\cdots(z_{i_n}-z_{k_{m+1}})\big)}.$$

Wenn wir alle Klammern im Nenner der ersten Summe mit (-1) multipliciren, dann fügen wir derselben den Factor $(-1)^{m(n+1)}$ an. Der fällt dann gegen die gleiche Potenz von (-1) im Zähler der Summanden des zweiten Theils weg; und es bleibt dort nur $(-1)^{n+1}$ zurück. Multipliciren wir ferner alle Klammern im Zähler dieser Summe mit (-1), so bleibt nur noch ein Minus-Zeichen zurück, welches wir vor φ setzen wollen. Nun führen wir die Bezeichnungen

$$p_i(z) = (z-z_{i_1})\cdots(z-z_{i_m}),$$
$$q_i(z) = (z_{i_1}-z)\cdots(z_{i_n}-z)$$

ein, und dann folgt die von Cauchy gegebene Schlussformel

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{\sum w_{k_1} \cdots w_{k_{n+1}} \frac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \cdots p_i(z_{k_{n+1}})}}{\sum w_{i_1} \cdots w_{i_n} \frac{q_i(z)}{q_i(z_{k_1}) \cdots q_i(z_{k_{m+1}})}}. \tag{12}$$

Hierbei ist $i_\alpha < i_{\alpha+1}$; $k_\alpha < k_{\alpha+1}$; die Summe im Zähler bezieht sich auf alle wohlgeordneten Combinationen $i_1, i_2, \cdots i_m$, die aus $0, 1, \cdots (m+n)$ gebildet werden können; die $k_1, k_2, \cdots k_{n+1}$ ergänzen dabei die Werthe der $i_1, i_2, \cdots i_m$ zu der vollständigen Reihe $0, 1, \cdots (m+n)$. In ähnlicher Weise ist der Nenner gebildet.

In dem Specialfalle $m = n = 1$ lautet die ausgeschriebene Formel

$$(12^a)\quad \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{w_1 w_2 \frac{z-z_0}{(z_1-z_0)(z_2-z_0)} + w_2 w_0 \frac{z-z_1}{(z_0-z_1)(z_2-z_1)} + w_0 w_1 \frac{z-z_2}{(z_0-z_2)(z_1-z_2)}}{w_0 \frac{z_0-z}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} + w_1 \frac{z_1-z}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)} + w_2 \frac{z_2-z}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)}}.$$

§ 43. Die Ableitung der Formel (12) in der angegebenen Art hat Jacobi (l. c. S. 501) durchgeführt. Ebendaselbst hat er noch eine ganze Reihe anderer Darstellungsformen abgeleitet, durch welche der Cauchy'schen Aufgabe genügt werden kann.

Cauchy selbst hat nur die Formel (12) aufgestellt und eine Verification für sie gegeben. Diese ist leicht zu finden: Es ist zu beweisen, dass die rechte Seite von (12) für $z = z_0$ den Werth w_0 annimmt. Damit ist wegen der symmetrischen Bildung des Bruches auch der Beweis dafür geliefert, dass $z = z_\alpha$ den Werth w_α hervorruft.

Tragen wir rechts in (12) $z = z_0$ ein, dann fallen im Zähler alle Summanden fort, bei denen z_0 unter den $z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots z_{i_m}$ vorkommt. Es bleiben nur diejenigen Summanden zurück, bei denen z_0 zu den $z_{k_1}, z_{k_2}, \cdots z_{k_{n+1}}$ gehört. Alle diese haben den Factor w_0, und in jedem von ihnen hebt sich der Zähler $p_i(z_0)$ gegen einen Factor des Nenners weg. Es bleibt also im Zähler zurück

$$(13)\qquad w_0 \sum_{(i)} \frac{w_{k_1} \cdots w_{k_n}}{p_i(z_{k_1}) \cdots p_i(z_{k_n})},$$

wobei jetzt der Complex $i_1, i_2, \cdots i_m$ alle möglichen Combinationen von m Gliedern aus $1, 2, \cdots (m+n)$ zu durchlaufen hat, und $k_1, k_2, \cdots k_n$ die übrigen dieser Grössen sind; $(i_\alpha < i_{\alpha+1};\ k_\alpha < k_{\alpha+1})$.

Der Nenner geht für die gleiche Substitution $z = z_0$ in

$$\sum \frac{w_{i_1} \cdots w_{i_n}}{q_i(z_{k_1}) \cdots q_i(z_{k_m})} = \sum \frac{w_{i_1} \cdots w_{i_n}}{p_i(z_{i_1}) \cdots p_k(z_{i_n})}$$

über. Nun kann man ebenso nach den Combinationen der k wie nach denen der i summiren. Vertauschen wir die Buchstaben i, k, so entsteht für den Nenner die Form

$$(14)\qquad \sum_{(i)} \frac{w_{k_1} \cdots w_{k_n}}{p_i(z_{k_1}) \cdots p_i(z_{k_n})};$$

(13) und (14) zeigen, dass der Quotient den Werth w_0 hat.

§ 44. Die vorstehende Lösung scheint zugleich in bejahendem Sinne die Frage zu beantworten, ob die aufgestellten Bedingungen mit einander verträglich seien. Aber hier kann ein bemerkenswerther Umstand eintreten. Setzen wir z. B. in (12ª) $w_0 = w_1 = w_2 = 1$, so erkennt man sofort, dass Zähler und Nenner rechts identisch verschwinden, und dass also eine eigentliche Lösung nicht vorliegt. Bei den Schlüssen des vorigen Paragraphen stellen sich die Verhältnisse so: Setzt man $z = z_0$, so entsteht als Zähler von (12) der Ausdruck (13). Verschwindet dieser, und mit ihm der Nenner, dann tritt w_0 in der Form $w_0 \frac{0}{0}$ auf. Hebt man den gemeinsamen Factor $(z - z_0)$, der im Zähler wie im Nenner vorhanden ist, da beide für $z = z_0$ verschwinden, nicht heraus, so behält man die unbestimmte Form. Lässt man ihn aber weg, dann braucht die Forderung, dass der Bruch für $z = z_0$ den Werth $w = w_0$ annimmt, nicht mehr erfüllt zu sein.

Die charakteristische, d. h. nothwendige und hinreichende Bedingung für das Eintreten dieses Falles ist also durch das Verschwinden von (14) gegeben. Tritt dies ein, und hebt man $(z - z_0)$ dann in (12) weg, und kommt ferner für $z = z_1, z_2, \cdots$ kein weiteres identisches Null-Werden von Zähler und Nenner vor, dann genügt der reducirte Bruch, dessen Zähler vom Grade $(m - 1)$ und dessen Nenner vom Grade $(n - 1)$ ist, den $(m + n)$ Bedingungen

$$\frac{\varphi_{m-1}(z_\alpha)}{\varphi_{n-1}(z_\alpha)} = w_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots m + n). \tag{15}$$

Da aber ein Bruch mit den angegebenen Gradzahlen des Zählers und Nenners bereits durch $(m + n - 1)$ Bedingungen bestimmt ist, so erkennt man, dass zwischen den Systemen z_α, w_α eine Relation besteht. Diese ist in der That durch das Verschwinden von (14) gegeben. Ist sie erfüllt, dann kann man eine Function

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{n-1}(z)} \tag{16}$$

den Bedingungen (15) gemäss berechnen und dann, um die vorgeschriebenen Gradzahlen zu erhalten,

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{(z - z_0)\,\varphi_{m-1}(z)}{(z - z_0)\,\psi_{n-1}(z)}$$

setzen. Sollte zufällig auch $\varphi_{m-1}(z_0) : \psi_{m-1}(z_0) = w_0$ sein, dann liefert schon (16) eine Lösung der Cauchy'schen Aufgabe; und im Falle, dass die Grade m, n für Zähler und Nenner vorgeschrieben sind,

$$\frac{\varphi_{m-1}(z)\,\chi_1(z)}{\psi_{n-1}(z)\,\chi_1(z)},$$

wobei $\chi_1(z)$ eine beliebige lineare Function von z bedeutet.

Genau in derselben Art können wir, indem auf (16) die gleichen Ueberlegungen angewendet werden, das folgende allgemeine Resultat ableiten:

Genügen $(m + n + 1 - \alpha)$ Werthepaare unter $z_0, w_0; z_1, w_1; \cdots z_{m+n}, w_{m+n}$, etwa die letzten unter ihnen, einer Gleichung

$$w = \frac{\varphi_{m-\alpha}(z)}{\psi_{n-\alpha}(z)},$$

bei der die Indices die Gradzahlen der rechts stehenden Functionen bedeuten, dann kann die Cauchy'sche Aufgabe nur in der uneigentlichen Form

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{(z - z_0) \cdots (z - z_{\alpha-1}) \varphi_{m-\alpha}(z)}{(z - z_0) \cdots (z - z_{\alpha-1}) \psi_{n-\alpha}(z)} \tag{17}$$

befriedigt werden, ausgenommen wenn etwa auch noch

$$\frac{\varphi_{m-\alpha}(z_\beta)}{\psi_{n-\alpha}(z_\beta)} = w_\beta, \cdots \frac{\varphi_{m-\alpha}(z_{\alpha-1})}{\psi_{n-\alpha}(z_{\alpha-1})} = w_{\alpha-1} \qquad (\beta \leq \alpha - 1)$$

ist; in diesem Falle kann, wenn $\chi_{\alpha-\beta}(z)$ eine willkürliche ganze Function $(\alpha - \beta)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, allgemeiner

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \frac{(z - z_0) \cdots (z - z_{\beta-1}) \chi_{\alpha-\beta}(z) \varphi_{m-\alpha}(z)}{(z - z_0) \cdots (z - z_{\beta-1}) \chi_{\alpha-\beta}(z) \psi_{n-\alpha}(z)}$$

gesetzt werden*).

§ 45. Die Cauchy'sche Interpolationsformel (12) kann in ähnlicher Weise wie die Lagrange'sche zur Aufstellung merkwürdiger Identitäten benutzt werden. Um dies zu zeigen, wollen wir unter $\varrho(z)$, $\tau(z)$ zwei ganze Functionen der Grade $(m - 1)$ und $(n - 1)$ mit völlig willkürlichen Coefficienten verstehen und setzen dann fest, dass

$$w_\lambda = \frac{\varrho(z_\lambda)}{\tau(z_\lambda)} \qquad (\lambda = 0, 1, 2, \cdots m + n - 1),$$

also

$$\tau(z)\varphi(z) - \varrho(z)\psi(z) = 0 \qquad \text{für } z = z_0, z_1, \cdots z_{m+n-1}$$

sein soll. Da die linke Seite der letzten Gleichung bis zum Grade $(m + n - 1)$ aufsteigt, so kann sie $(m + n)$ Wurzeln nur dann besitzen, wenn ihr Polynom identisch Null ist, d. h. wenn man hat

$$\varphi(z) = \frac{\varrho(z)}{\tau(z)} \psi(z).$$

Nun muss als letzte Bedingung

$$\psi(z_{m+n}) = \frac{\varrho(z_{m+n})}{\tau(z_{m+n})} \psi(z_{m+n}) = w_{m+n} \psi(z_{m+n})$$

*) Auf die in diesem Paragraphen besprochene Möglichkeit hat Kronecker Berl. Ber. Juni 1881, § II hingewiesen.

sein; nehmen wir aber w_{m+n} so an, dass es von $\varrho(z_{m+n}) : \tau(z_{m+n})$ verschieden ist, dann tritt hierbei ein Widerspruch heraus, der sich nur durch $\psi(z_{m+n}) = 0$ beseitigen lässt; d. h. $\psi(z)$ ist durch $(z - z_{m+n})$ theilbar. Freilich gilt dies bisher nur, wenn w_{m+n} nicht gerade jenen Werth $\varrho(z_{m+n}) : \tau(z_{m+n})$ besitzt; aber dass die nachgewiesene Eigenschaft unabhängig davon ist, können wir sofort erkennen. $\psi(z)$ ist in w_{m+n} linear, wie (12) zeigt; und setzt man dann in

$$\psi(z) = \chi_1(z) + w_{m+n}\chi_2(z)$$

für w_{m+n} mehrere gestattete Werthe ein, dann folgt, dass χ_1 und χ_2 und also auch ψ allgemein durch $(z - z_{m+n})$ theilbar werden. Hiernach sind wir somit auch berechtigt, den bisherigen Ausnahmewerth

$$w_{m+n} = \varrho(z_{m+n}) : \tau(z_{m+n})$$

einzusetzen, und auch dabei findet Theilbarkeit von $\psi(z)$ durch $(z - z_{m+n})$ statt. Zugleich sind aber jetzt $\varphi(z)$, $\psi(z)$ symmetrisch in $z_0, z_1, \cdots z_{m+n}$ geworden, so dass also auch Theilbarkeit durch jedes $(z - z_\lambda)$ für $\lambda = 0, 1, \cdots (m+n)$ statthat. Das geht wegen der Gradzahlen nur, wenn $\varphi(z)$, $\psi(z)$ unter den gemachten Annahmen identisch verschwinden. Demnach hat man den Satz:

Bezeichnen wir

$$p_i(z) = (z - z_{i_1}) \cdots (z - z_{i_m}), \quad q_i(z) = (z_{i_1} - z) \cdots (z_{i_n} - z), \quad (i_\alpha < i_{\alpha+1})$$

verstehen wir ferner unter $\varrho(z)$, $\tau(z)$ zwei ganze Functionen der Grade $(m-1)$ und $(n-1)$, dann ist

$$(18)\qquad \begin{aligned} \sum_{(i)} \frac{\varrho(z_{k_1})}{\tau(z_{k_1})} \cdots \frac{\varrho(z_{k_n+1})}{\tau(z_{k_n+1})} \frac{p_i(z)}{p_i(z_{k_1}) \cdots p_i(z_{k_n+1})} = 0, \\ \sum_{(i)} \frac{\varrho(z_{i_1})}{\tau(z_{i_1})} \cdots \frac{\varrho(z_{i_n})}{\tau(z_{i_n})} \frac{q_i(z)}{q_i(z_{k_1}) \cdots q_i(z_{k_m+1})} = 0, \end{aligned}$$

wenn die Summen sich auf alle wohlgeordneten Combinationen der i unter $0, 1, 2, \cdots (m+n)$ beziehen, und die k sich mit den i zu der Reihe $0, 1, 2, \cdots (m+n)$ ergänzen.

Aus diesem umfassenden Satze lässt sich eine grosse Reihe merkwürdiger Formeln ableiten, auf die wir hier aber nicht eingehen wollen, weil sie zum Theil die erst später zu behandelnde Theorie der symmetrischen Functionen zu ihrer Darstellung gebrauchen. Wir wollen nur erwähnen, dass für $\varrho = \tau = 1$ Formeln entstehen, die wir, wenn jede Bildung von der Form

$$z_{i_1} + z_{i_2} + \cdots + z_{i_m}, \quad z_{i_1}z_{i_2} + z_{i_1}z_{i_3} + \cdots + z_{i_{m-1}}z_{i_m}, \quad \cdots, \quad z_{i_1}z_{i_2} \cdots z_{i_m}$$

allgemein durch $S_m(i)$ bezeichnet werden,

$$(18^a) \qquad \sum_{(i)} \frac{S_m(i)}{p_i(z_{k_1}) \cdots p_i(z_{k_n+1})} = 0$$

schreiben können.

§ 46. Newton hat (Principia; Buch III, Lemma 5) die Interpolationsaufgabe für ganze Functionen in der Weise gelöst, dass er das gesuchte Polynom in der Gestalt

$$c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)(z-z_1) + \cdots + c_n(z-z_0)(z-z_1)\cdots(z-z_{n-1})$$

darstellte. Diese Form ist bei manchen Anwendungen nützlich, und deshalb wollen wir ihre Ableitung gleichfalls geben.

Man sieht sofort, dass c_0 den Werth w_0 haben muss, und man berechnet ohne Weiteres die folgenden Constanten:

$$c_1 = \frac{w_0}{z_0 - z_1} + \frac{w_1}{z_1 - z_0},$$

$$c_2 = \frac{w_0}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} + \frac{w_1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)} + \frac{w_2}{(z_2-z_0)(z_2-z_1)}.$$

Das hieraus ersichtliche Bildungsgesetz für die Coefficienten gilt allgemein. Dem Beweise legen wir die einfache Formel

$$1 + \frac{z-z_0}{z_0-z_1} + \frac{(z-z_0)(z-z_1)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)} + \frac{(z-z_0)(z-z_1)(z-z_2)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)(z_0-z_3)} + \cdots$$
$$+ \frac{(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1})}{(z_0-z_1)\cdots(z_0-z_n)} = \frac{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n)}{(z_0-z_1)(z_0-z_2)\cdots(z_0-z_n)}$$

zu Grunde, die sich durch die Vereinigung der beiden ersten Glieder, durch das Hinzunehmen des dritten Gliedes u. s. f. als richtig erweist. Wenden wir sie auf den ersten Summanden der Lagrange'schen Interpolationsformel an, dann auf den Factor

$$\frac{(z-z_2)(z-z_3)\cdots(z-z_n)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)\cdots(z_1-z_n)}$$

des zweiten Summanden derselben Formel u. s. f., so entsteht die Newton'sche Formel

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)(z-z_1) + \cdots + c_n(z-z_0)\cdots(z-z_{n-1}),$$

$$(19) \qquad c_\lambda = \frac{w_0}{(z_0-z_1)\cdots(z_0-z_\lambda)} + \frac{w_1}{(z_1-z_0)(z_1-z_2)\cdots(z_1-z_\lambda)} + \cdots + \frac{w_\lambda}{(z_\lambda-z_0)\cdots(z_\lambda-z_{\lambda-1})}.$$

Natürlich lässt sich, der Cauchy'schen Formel entsprechend, auch eine gebrochene Function bilden, deren Zähler und Nenner in ähnlicher Gestalt auftreten, wie die eben behandelte ist. Hierauf wollen wir aber nicht eingehen, und ebenso wenig auf die aus (19) entspringenden besonderen Formeln.

Fünfte Vorlesung.

Reductibilität und Irreductibilität.

§ 47. Wir wollen uns jetzt einer weiteren wichtigen Frage zuwenden. In den Elementen der Zahlentheorie treten die Begriffe der Primzahlen und der zusammengesetzten Zahlen auf. Ebenso können wir diesen entsprechend bei den ganzen Functionen unter gewissen Voraussetzungen irreductible und reductible Functionen unterscheiden, von denen die erste Sorte das Analogon der Primzahlen, die zweite Sorte das der zusammengesetzten Zahlen ist. Dies scheint im Widerspruch zu der Thatsache zu stehen, dass jede ganze Function in lineare Factoren zerlegt werden kann, wie der Fundamentalsatz der Algebra gezeigt hat. Bedenken wir aber, dass, wenn z. B. auch die Zahl 5 in der gewöhnlichen Anschauung eine Primzahl ist, doch

$$5 = (2 + i)(2 - i) \qquad (i = \sqrt{-1})$$

gesetzt, und 5 also zerlegt werden kann, dann werden wir auf den Punkt geführt, der zu präcisen Begriffsfeststellungen ausreicht.

Wir müssen bei jeder Zerlegung festsetzen, welche Grössen in die Rechnung eingehen dürfen oder in ihr als rationale Grössen angesehen werden sollen. Im reellen Zahlengebiete ist 5 eine Primzahl, im Gebiete mit den beiden Einheiten 1, i dagegen nicht. So ist auch

$$x^2 + 1 = (x + i)(x - i)$$

unzerlegbar, wenn man in die Factoren nur reelle Zahlen als Coefficienten eingehen lässt; dagegen zerlegbar, wenn complexe Grössen benutzt werden dürfen. Ebenso ist die Function

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

im Gebiete der rationalen Zahlen unzerlegbar, im allgemeineren Gebiete der reellen Zahlen dagegen zerlegbar. Demnach ist auch der Fundamentalsatz der Algebra so zu fassen: Im Gebiete der reellen Zahlen ist jede ganze Function mit reellen Coefficienten in Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegbar. Im Gebiete der complexen Zahlen dagegen ist jede ganze Function mit reellen oder complexen Coefficienten in lineare Factoren zerlegbar.

Es kommt daher bei allen Untersuchungen dieser Art zuerst darauf an, den „Rationalitätsbereich“ anzugeben, d. h. das Gebiet der Grössen zu bezeichnen, welche als rational bekannt benutzt werden

dürfen. Diese Begriffsbestimmungen treten schon bei Abel auf; in voller Schärfe hat sie Kronecker betont.

Wird im Folgenden nichts Besonderes angegeben, so soll für uns der Rationalitätsbereich aus der Gesammtheit der rationalen Zahlen bestehen. Wir werden eine ganze Function demnach irreductibel oder reductibel nennen, je nachdem sie andere ganze Functionen mit rationalen Coefficienten zu Factoren hat oder nicht. Dabei muss der Grad eines solchen Factors natürlich kleiner als der Grad der untersuchten ganzen Function, er soll aber zugleich grösser als Null sein. Die Möglichkeit der Theilbarkeit durch Constante ist somit kein Zeichen für Reductibilität der Function.

§ 48. Wir wollen zeigen, dass es bei der Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen gleichgültig ist, ob man den Rationalitätsbereich aus dem Inbegriffe aller rationalen, oder nur dem der ganzen rationalen Zahlen bestehen lässt; mit anderen Worten: wir werden zeigen, dass, wenn sich eine ganze, ganzzahlige Function in zwei Factoren mit rationalen gebrochenen Coefficienten zerlegen lässt, daraus auch eine Zerlegung in Factoren mit rationalen ganzen Coefficienten folgt*).

Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst: Wenn in den beiden Functionen

$$g(x) = \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots}{m}, \quad h(x) = \frac{d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots}{n}$$

die Constanten c_λ, d_λ, m, n ganze Zahlen sind, wenn ferner die c_λ keinen gemeinsamen Theiler ausser der 1 haben, und wenn von den d_λ dasselbe gilt, dann hat das Product $g(x) \cdot h(x)$ zum kleinsten Nenner das Product $m \cdot n$. Denn es sei $p^\varkappa$ die höchste in m, und p^λ die höchste in n als Factor vorkommende Potenz der beliebigen Primzahl p; ferner seien $c_0, c_1, \cdots c_{\alpha-1}$ und $d_0, d_1, \cdots d_{\beta-1}$ durch p theilbar, dagegen weder c_α noch d_β, dann wird der Coefficient von $x^{\alpha+\beta}$ in $g(x) \cdot h(x)$, nämlich

$$[c_\alpha d_\beta + (c_{\alpha+1} d_{\beta-1} + c_{\alpha+2} d_{\beta-2} + \cdots) + (c_{\alpha-1} d_{\beta+1} + c_{\alpha-2} d_{\beta+2} + \cdots)] : mn$$

im Zähler keine Potenz von p enthalten, da der erste Summand derselben nicht durch p theilbar ist, während die beiden anderen es sind. Folglich tritt $p^{\varkappa+\lambda}$ in den Nenner von $g \cdot h$. Das Gleiche gilt von jeder in m oder in n vorkommenden Primzahl, und somit ist dieser erste Satz bewiesen.

*) Gauss: Disquisitiones arithmeticae. § 42. Werke I; S. 34.

§ 49. Setzen wir ferner

$$G(z) = \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots}{m}, \quad H(z) = \frac{D_0 + D_1 z + D_2 z^2 + \cdots}{n},$$

und ist hier der grösste gemeinsame Theiler k der Coefficienten C_λ zu m relativ prim, und der grösste gemeinsame Theiler l der Coefficienten D_λ zu n relativ prim, dann nehmen wir

$$G(z) = k \cdot g(z) \quad \text{und} \quad H(z) = l \cdot h(z).$$

$g(z)$ und $h(z)$ sind jetzt solche Functionen, wie sie in § 48 betrachtet wurden. Wenn nun das Product

$$G(z) \cdot H(z) = kl \cdot g(z) h(z)$$

ganzzahlig wird, so folgt nach dem soeben bewiesenen Satze, dass $k \cdot l$ durch $m \cdot n$ theilbar sein muss, und da k zu m und l zu n relativ prim war, so wird

$$k = \varrho n, \quad l = \sigma m$$

sein, wobei ϱ, σ ganze Zahlen bedeuten. Sonach kann man setzen

$$G(z) = \frac{\varrho n}{m} \gamma(z), \quad H(z) = \frac{\sigma m}{n} \eta(z),$$

und die Functionen $\gamma(z)$, $\eta(z)$ haben jetzt ganzzahlige Coefficienten.

Ist also die ganze ganzzahlige Function $f(z)$ auf rationale Art in zwei Factoren zerlegbar,

$$f(z) = G(z) \cdot H(z),$$

so ist auch

$$f(z) = \varrho\sigma \cdot \gamma(z) \cdot \eta(z),$$

d. h. $f(z)$ ist auch in ganzzahlige Factoren zerlegbar.

§ 50. Nach diesem Resultate können wir uns bei der Untersuchung, ob eine Function $f(z)$ im Gebiete der rationalen Zahlen zerlegbar sei, auf die Aufsuchung etwa vorhandener ganzzahliger Factoren beschränken.

Es sei $f(z)$ eine vorgelegte, auf ihre Reductibilität zu prüfende, ganze, ganzzahlige Function vom Grade $2n$ oder $(2n + 1)$. Hat sie überhaupt einen Factor in unserem Gebiete, so hat sie sicherlich auch einen, der höchstens bis zum Grade n aufsteigt; denn, wenn $\varphi \cdot \psi = f$ ist, können nicht φ und ψ gleichzeitig von höherem als dem n^{ten} Grade sein. Wir wollen solchen Factor als vorhanden voraussetzen und mit $\varphi(z)$ bezeichnen. Dann ist für jeden ganzzahligen Werth z_λ von z der Werth von $f(z_\lambda)$ ein ganzes Vielfaches des Werthes von $\varphi(z_\lambda)$. Wenn wir jetzt alle positiven oder negativen ganzzahligen Theiler des Zahlenwerthes von $f(z_\lambda)$ durch d_λ', d_λ'', $\cdots$ bezeichnen, und für z in $f(z)$ der Reihe nach $(n + 1)$ ganzzahlige Argumentwerthe z_1, z_2, $\cdots z_{n+1}$ eintragen, so erhalten wir $(n + 1)$ Reihen von Theilern, nämlich

$$(1)\qquad \begin{array}{llll} \text{für } z_1 & \text{die Theiler } d_1', & d_1'', & d_1''', \cdots \\ \text{„ } z_2 & \text{„ „ } d_2', & d_2'', & d_2''', \cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \text{„ } z_{n+1} & \text{„ „ } d_{n+1}', & d_{n+1}'', & d_{n+1}''', \cdots \end{array}$$

und $\varphi(z)$ muss

$$(2)\qquad \text{für } z_1, \quad z_2, \quad z_3, \quad \cdots z_{n+1}$$

eine Werthecombination

$$(2^a)\qquad d_1^{(\alpha)}, \quad d_2^{(\beta)}, \quad d_3^{(\gamma)}, \quad \cdots d_{n+1}^{(\iota)}$$

aufweisen. Legt man alle möglichen Combinationen der Bestimmung von $\varphi(z)$ nach der Lagrange'schen Interpolationsformel zu Grunde, so erhält man in der entstehenden endlichen Anzahl von Functionen alle, die überhaupt bei der Factorenzerlegung von $f(z)$ als Theiler in Frage kommen. Mit jeder von ihnen kann dann die Division wirklich versucht werden; geht sie nicht auf, so ist die Function zu verwerfen; geht sie auf, so ist ein Divisor gefunden. Eine endliche Anzahl von ausführbaren Versuchen giebt demnach die Entscheidung über die Irreductibilität von $f(z)$.

Ist z. B.

$$f(z) = 3z^4 + 2z^3 - 7z + 1 \qquad (n = 2),$$

so haben die drei Functionalwerthe für $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = -1$, nämlich

$$f(0) = 1; \quad f(1) = -1; \quad f(-1) = 13,$$

die Theiler

$$\pm 1; \qquad \pm 1; \qquad \pm 1, \pm 13.$$

Da mit $\varphi(z)$ zugleich $-\varphi(z)$ ein ganzzahliger Theiler von $f(z)$ ist, so kann man $\varphi(0) = +1$ setzen; dann bleiben noch 8 Combinationsmöglichkeiten, je nach den Werthen von $\varphi(1) = \pm 1$; $\varphi(-1) = \pm 1$ oder $= \pm 13$. Die Lagrange'sche Formel liefert

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \varphi(0)\frac{z^2-1}{-1} + \varphi(1)\frac{z^2+z}{2} + \varphi(-1)\frac{z^2-z}{2} \\ &= z^2\left(-\varphi(0) + \tfrac{1}{2}\varphi(1) + \tfrac{1}{2}\varphi(-1)\right) + z\left(\tfrac{1}{2}\varphi(1) - \tfrac{1}{2}\varphi(-1)\right) + \varphi(0) \\ &= z^2\left(-1 + \tfrac{1}{2}\varphi(1) + \tfrac{1}{2}\varphi(-1)\right) + z\left(\tfrac{1}{2}\varphi(1) - \tfrac{1}{2}\varphi(-1)\right) + 1. \end{aligned}$$

Wählt man für $\varphi(-1)$ einen der Werthe ± 13, so wird der Coefficient von z^2 dem absoluten Werthe nach > 3, also grösser als der Coefficient von z^4 in $f(z)$. Das entstehende $\varphi(z)$ kann demnach kein ganzzahliger Theiler von $f(z)$ sein. Somit bleiben nur die vier Möglichkeiten

$\varphi(1) = +1, \quad \varphi(-1) = +1;$ das giebt $\varphi(z) = 1,$

$\varphi(1) = +1, \quad \varphi(-1) = -1;$ „ „ $\varphi(z) = -z^2 + z + 1,$

$\varphi(1) = -1, \quad \varphi(-1) = +1;$ „ „ $\varphi(z) = -z^2 - z + 1,$

$\varphi(-1) = -1, \quad \varphi(-1) = -1,$ „ „ $\varphi(z) = -2z^2 + 1.$

Die erste Function liefert den banalen Theiler $\varphi = 1$; bei den drei übrigen zeigt die Division, dass keine als Factor von $f(z)$ auftritt. Folglich ist $f(z)$ irreductibel.

§ 51. Die im vorigen Paragraphen dargelegte Methode stammt von Kronecker*). Sie hat den theoretisch wichtigen Vortheil, dass die Frage nach der Zerlegung ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz behandelt werden kann. Es wird aber bei ihr die Anzahl der Werthsysteme, die discutirt werden müssen, eine so bedeutende, dass eine Vereinfachung der Methode erwünscht scheint, wenn sie für praktische Zwecke verwendbar sein soll. Herr Runge hat sich mit diesem Problem beschäftigt**). Aus seinen Resultaten wollen wir Folgendes herausheben.

Wir gehen von (1), (2) und (2^a) aus. Ist $\varphi(z)$ ein ganzzahliger Theiler von $f(z)$, so ist auch $\frac{\varphi(z) - \varphi(z_1)}{z - z_1}$ eine ganzzahlige Function, mithin $\varphi(z_2) - \varphi(z_1)$ durch $z_2 - z_1$ theilbar. Es kann daher ein $d_2^{(\beta)}$ nur mit einem solchen $d_1^{(\alpha)}$ combinirt einem zulässigen Theiler $\varphi(z)$ angehören, für welches die Differenz der Functionalwerthe

$$d_2^{(\beta)} - d_1^{(\alpha)} \text{ durch } z_2 - z_1$$

theilbar ist. Ebenso kann eine Combination $d_1^{(\alpha)}$, $d_2^{(\beta)}$ nur dann mit einem $d_3^{(\gamma)}$ combinirt einem zulässigen Theiler angehören, wenn

$$d_3^{(\gamma)} - d_1^{(\alpha)} \text{ durch } z_3 - z_1 \quad \text{und} \quad d_3^{(\gamma)} - d_2^{(\beta)} \text{ durch } z_3 - z_2$$

theilbar ist u. s. f. Hierdurch werden dann die zu behandelnden Werthsysteme häufig stark eingeschränkt, sobald die Wahl der $z_1, z_2, \cdots$ passend erfolgt. Für unser obiges Beispiel würden wir keinen Vortheil dadurch erlangen.

In noch anderer Art behandelt Herr Mandl***) das gleiche Problem.

---

*) Kronecker: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen. § 4. J. für Math. 92. S. 1.

**) Runge: Ueber die Zerlegung ganzer ganzzahliger Functionen. J. für Math. 99. S. 89.

***) Mandl (unter gleichem Titel): J. für Math. 113. S. 252.

§ 52. Eisenstein*) war der Erste, welcher einen Satz aufstellte, durch den aus der formalen Beschaffenheit der Coefficienten der vorgelegten Function ein Schluss auf ihre Reductibilität oder Irreductibilität gezogen wird. Es ist der folgende:

Sind alle Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_n$ des Polynoms

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1} z + c_n \tag{3}$$

durch eine Primzahl p theilbar, und zwar c_n durch keine höhere als die erste Potenz von p, dann ist $f(z)$ irreductibel.

Wäre nämlich

$$\begin{aligned} f(z) &= (a_0 z^\mu + a_1 z^{\mu-1} + \cdots + a_{\mu-1} z + a_\mu)(b_0 z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \cdots + b_{\nu-1} z + b_\nu) \\ &= a_\mu b_\nu + (a_{\mu-1} b_\nu + a_\mu b_{\nu-1}) z + \cdots + a_0 b_0 z^{\mu+\nu}, \end{aligned} \tag{4}$$

so könnten wir zuerst $a_0 = b_0 = 1$ setzen, und es müsste ferner wegen $a_\mu b_\nu = c_n$ eine der Zahlen a_μ, b_ν, etwa die erste, durch p theilbar sein, während die zweite b_ν relativ prim zu p wäre. Weiter müsste $a_{\mu-1} b_\nu + a_\mu b_{\nu-1} = c_{n-1}$ durch p, und da $a_\mu b_{\nu-1}$ es ist, auch $a_{\mu-1} b_\nu$ durch p theilbar sein. Nun war b_ν relativ prim zu p; also müsste $a_{\mu-1}$ ein Vielfaches von p werden. Ginge man dann zu $a_{\mu-2} b_\nu + a_{\mu-1} b_{\nu-1} + a_\mu b_{\nu-2} = c_{n-2}$, u. s. f., dann würde der Reihe nach folgen, dass $a_{\mu-2}$, $a_{\mu-3}$, $\cdots$ durch p theilbar sind. Die gleiche Schlussweise zeigt aber beim Auftreten des Coefficienten a_0, dass auch für diesen dasselbe gilt, während er doch gleich 1 ist. Das ist ein Widerspruch; und daraus erkennen wir, dass die Voraussetzung der Zerlegbarkeit von $f(z)$ nicht aufrecht erhalten werden kann. Es ist also $f(z)$ irreductibel.

§ 53. Dieses Eisenstein'sche Theorem, von welchem wir später eine wichtige Anwendung machen werden, lässt sich zum Ausgangspunkte weiterer Untersuchungen nach verschiedenen Seiten hin nehmen. Die eine Richtung führt unter Benutzung der gleichen Methode zu den Sätzen dieses und der folgenden Paragraphen bis § 56.

Ein Polynom n^{ten} Grades ($n > 2\varkappa$) von der Gestalt

$$z^n + \gamma_1 p z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p z^{\varkappa+1} + \gamma_{n-\varkappa} p^2 z^\varkappa + \gamma_{n-\varkappa+1} p^3 z^{\varkappa-1} + \cdots + \gamma_n^0 p^\varkappa, \tag{5}$$

besitzt keinen Theiler von geringerem als dem $(\varkappa+1)^{\text{ten}}$ Grade. Der obere Index 0 an einer Constante soll hier und in den folgenden Paragraphen andeuten, dass diese Constante zu p relativ prim ist.

Gilt die Zerlegung (4) von (5), dann folgt aus $a_\mu b_\nu = c_n = p^\varkappa \gamma_n^0$, dass entweder einer der Coefficienten a_μ, b_ν durch $p^\varkappa$, oder dass jeder

*) Eisenstein: Ueber die Irreductibilität u. s. w. der Lemniscatengleichung. J. für Math. 59. S. 160.

derselben durch p theilbar ist. Im ersten Falle setzen wir $a_\mu = \alpha_\mu^0 p^2$, $b_\nu = \beta_\nu^0$ und finden dann auf genau dem Wege, der in § 52 eingeschlagen ist, dass alle Coefficienten $a_{\mu-1}, \cdots$ bis inclusive a_0 durch p theilbar sind. Da das nicht möglich ist, so muss diese Eventualität verworfen, und

$$a_\mu = \alpha_\mu^0 p, \quad b_\nu = \beta_\nu^0 p \tag{6}$$

gesetzt werden. Wir wollen nun annehmen, es wäre schon bewiesen, was ja wegen (6) für $\lambda = 0$ feststeht,

$$\begin{aligned} a_{\mu-1} &= \alpha_{\mu-1} p, \quad \cdots a_{\mu-\lambda} = \alpha_{\mu-\lambda} p, \\ b_{\nu-1} &= \beta_{\nu-1} p, \quad \cdots b_{\nu-\lambda} = \beta_{\nu-\lambda} p, \end{aligned} \tag{7}$$

und wollen daraus herleiten, dass auch die beiden folgenden Coefficienten, $a_{\mu-\lambda-1}$ und $b_{\nu-\lambda-1}$, durch p theilbar sein müssen, wenn λ eine gewisse Grenze nicht überschreitet. Dazu betrachten wir $c_{n-\lambda-1} \equiv 0$ und $c_{n-2\lambda-2} \equiv 0$ und zwar die erste Congruenz (mod. p^2), die zweite nur (mod. p); das ergiebt

$$\begin{aligned} a_\mu b_{\nu-\lambda-1} + \cdots + a_{\mu-\lambda-1} b_\nu &\equiv 0 \ (\text{mod. } p^2), \\ a_{\mu-\lambda-1} b_{\nu-\lambda-1} + \cdots \qquad &\equiv 0 \ (\text{mod. } p). \end{aligned}$$

Wir haben in diese Congruenzen die Werthe aus (6) und (7) einzusetzen. Dann werden in der ersten alle nicht hingeschriebenen Glieder durch p^2, in der zweiten alle nicht hingeschriebenen durch p theilbar, und es entsteht, nachdem die erste durch p dividirt, die zweite mit $\alpha_\mu^0 \cdot \beta_\nu^0$ multiplicirt ist,

$$\begin{aligned} (\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1}) + (\beta_\nu^0 a_{\mu-\lambda-1}) &\equiv 0 \\ (\alpha_\mu^0 b_{\nu-\lambda-1})(\beta_\nu^0 a_{\mu-\lambda-1}) &\equiv 0 \end{aligned} \quad (\text{mod. } p),$$

woraus denn sofort das Verlangte, nämlich

$$a_{\mu-\lambda-1} = \alpha_{\mu-\lambda-1} p, \quad b_{\nu-\lambda-1} = \beta_{\nu-\lambda-1} p \tag{8}$$

folgt. Da in (5) bei uns $\gamma_{n-\varkappa} p^2$ der höchste durch p^2 theilbare Coefficient ist, so können wir bis $\lambda = \varkappa$ gehen, falls $n > 2\varkappa$ ist. Die letzte Einschränkung ist klar; sie folgt aus $c_{n-2\lambda-2} \equiv 0$ (mod. p). Man hat dann also

$$\begin{aligned} a_\mu &= \alpha_\mu^0 p, \quad a_{\mu-1} = \alpha_{\mu-1} p, \quad \cdots a_{\mu-\varkappa} = \alpha_{\mu-\varkappa} p, \\ b_\nu &= \beta_\nu^0 p, \quad b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p, \quad \cdots b_{\nu-\varkappa} = \beta_{\nu-\varkappa} p. \end{aligned} \tag{9}$$

Dies zeigt, dass a_0, b_0 nicht in die Reihe der hingeschriebenen Coefficienten gehören, dass also kein Factor von geringerem als dem $(\varkappa + 1)^{\text{ten}}$ Grade vorkommen kann.

§ 54. Ist $n = 2\varkappa + 1$, dann folgt aus dem Umstande, dass kein Factor vom $\varkappa^{\text{ten}}$ oder einem niederen Grade besteht, die Irreductibilität

von (5). Ist $n = 2\varkappa + 2$, dann können zwei Factoren des Grades $(\varkappa + 1)$ vorhanden sein, bei denen alle Coefficienten $a_1, a_2, \cdots$; $b_1, b_2, \cdots$ nach (9) durch p theilbar sein müssen. Man hat demnach: Das Polynom

$$z^{2\varkappa+1} + \gamma_1 p z^{2\varkappa} + \cdots + \gamma_\varkappa p z^{\varkappa+1} + \gamma_{\varkappa+1} p^2 z^\varkappa + \cdots + \gamma^0_{2\varkappa+1} p^2$$

ist irreductibel. Das Polynom

$$z^{2\varkappa+2} + \gamma_1 p z^{2\varkappa+1} + \cdots + \gamma_{\varkappa+1} p z^{\varkappa+1} + \gamma_{\varkappa+2} p^2 z^\varkappa + \cdots + \gamma^0_{2\varkappa+2} p^2$$

kann nur in der Art zerlegbar sein, dass es in zwei Factoren gleichen Grades

$$(z^{\varkappa+1} + \alpha_1 p z^\varkappa + \cdots + \alpha^0_{\varkappa+1} p)(z^{\varkappa+1} + \beta_1 p z^\varkappa + \cdots + \beta^0_{\varkappa+1} p)$$

zerfällt. Diese beiden Factoren sind nach dem Eisenstein'schen Satze unzerlegbar.

§ 55. Wir knüpfen wieder an das Theorem von § 53 an. Ein Polynom von der Gestalt

$$\begin{aligned} f(z) = z^n &+ \gamma_1 p z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-2\varkappa-2} p z^{2\varkappa+2} \\ &+ \gamma_{n-2\varkappa-1} p^2 z^{2\varkappa+1} + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p^2 z^{\varkappa+1} \qquad (n > 3\varkappa) \\ &+ \gamma_{n-\varkappa} p^3 z^\varkappa + \cdots + \gamma_{n-1} p^3 z + \gamma^0_n p^3 \end{aligned}$$

kann nur so in zwei Factoren zerfallen, dass der Grad des einen nicht geringer als $(\varkappa + 1)$, der des andern nicht geringer als $(2\varkappa + 2)$ ist.

Die eine Möglichkeit, $a_\mu \cdot b_\nu = c_n \equiv 0 \pmod{p^3}$ zu befriedigen, nämlich indem man $a_\mu = \alpha^0_\mu p^3$, $b_\nu = \beta^0_\nu$ setzt, führt auf dem schon mehrfach betretenen Wege (§ 52) zu einem Widerspruche. Es bleibt also nur die Annahme zu behandeln übrig

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^2, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p. \tag{10}$$

Aus $c_{n-1} = a_\mu b_{\nu-1} + a_{\mu-1} b_\nu \equiv 0 \pmod{p^3}$ ergiebt sich sofort $a_{\mu-1} \equiv 0 \pmod{p}$, so dass die Gleichung

$$a_{\mu-1} = \alpha'_{\mu-1} p \tag{11}$$

angesetzt werden kann. Wir setzen voraus, es wäre schon bewiesen, was ja für $\lambda = 1$ soeben erfolgt ist, dass man

$$\begin{aligned} a_\mu &= \alpha^0_\mu p^2, &&\cdots a_{\mu-\lambda+1} = \alpha_{\mu-\lambda+1} p^2, \\ a_{\mu-\lambda} &= \alpha'_{\mu-\lambda} p, &&\cdots a_{\mu-2\lambda+1} = \alpha'_{\mu-2\lambda+1} p, \\ b_\nu &= \beta^0_\nu p, &&\cdots b_{\nu-\lambda+1} = \beta_{\nu-\lambda+1} p \end{aligned} \tag{12}$$

hätte. Dann wollen wir, falls λ nicht gewisse Grenzen übersteigt, die Fortsetzbarkeit von (12) durch den Beweis der vier Gleichungen

$$\begin{gathered} a_{\mu-\lambda} = \alpha_{\mu-\lambda} p^2; \quad a_{\mu-2\lambda} = \alpha'_{\mu-2\lambda} p, \quad a_{\mu-2\lambda-1} = \alpha'_{\mu-2\lambda-1} p; \\ b_{\nu-\lambda} = \beta_{\nu-\lambda} p \end{gathered} \tag{13}$$

darlegen. Dazu brauchen wir die vier Congruenzen

$$(14)\qquad \begin{aligned} c_{n-\lambda} &\equiv 0 \pmod{p^3}, \quad & c_{n-2\lambda} &\equiv 0 \pmod{p^2},\\ c_{n-2\lambda-1} &\equiv 0 \pmod{p^2}, \quad & c_{n-3\lambda} &\equiv 0 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Setzen wir die Werthe (12) in diese Congruenzen ein, dann liefert $c_{n-2\lambda}$, nach Division durch p, und $c_{n-3\lambda}$, nach Multiplication mit $\beta_\nu^0 \cdot \alpha'_{\mu-\lambda}$, die Resultate

$$\begin{aligned} (\beta_\nu^0 a_{\mu-2\lambda}) + (\alpha'_{\mu-\lambda} b_{\nu-\lambda}) &\equiv 0\\ (\beta_\nu^0 a_{\mu-2\lambda})(\alpha'_{\mu-\lambda} b_{\nu-\lambda}) &\equiv 0 \end{aligned} \pmod{p},$$

und deshalb ergiebt sich, wie unmittelbar ersichtlich ist,

$$(13^a)\qquad a_{\mu-2\lambda} = \alpha'_{\mu-2\lambda} p,$$

$$(15)\qquad \alpha'_{\mu-\lambda} b_{\nu-\lambda} \equiv 0 \pmod{p}.$$

(13^a) liefert einen Theil der Behauptung. Die erste Congruenz aus (14) heben wir nach Eintragen von (12) durch p^2 und erhalten

$$\alpha'_{\mu-\lambda}\beta_\nu^0 + a_\mu^0 b_{\nu-\lambda} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Das zeigt, mit (15) combinirt, dass $\alpha'_{\mu-\lambda}$ und $b_{\nu-\lambda}$ durch p, dass also

$$(13^b)\qquad \begin{aligned} b_{\nu-\lambda} &= \beta_{\nu-\lambda} p\\ a_{\mu-\lambda} &= \alpha'_{\mu-\lambda} p = \alpha_{\mu-\lambda} p^2 \end{aligned}$$

ist. Der noch fehlende Theil der nachzuweisenden Gleichungen (13) folgt ohne Weiteres aus der dritten Congruenz (14).

Vergleichen wir (14) mit der Form der untersuchten Gleichung, dann folgt, dass für sie

$$(16)\qquad \begin{aligned} a_\mu &= \alpha_\mu^0 p^2, & &\cdots\ a_{\mu-\varkappa} = \alpha_{\mu-\varkappa} p^2,\\ a_{\mu-\varkappa-1} &= \alpha'_{\mu-\varkappa-1} p, & &\cdots\ a_{\mu-2\varkappa-1} = \alpha_{\mu-2\varkappa-1} p,\\ b_\nu &= \beta_\nu^0 p, & &\cdots\ b_{\nu-\varkappa} = \beta_{\nu-\varkappa} p \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Es darf daher unter diesen Coefficienten weder a_0 noch b_0 vorkommen, falls $n > 3\varkappa$ ist, d. h. es muss in diesem Falle $\mu > 2\varkappa + 2$, $\nu \geqq \varkappa + 1$ sein, wie behauptet wurde.

§ 56. Es war $n > 3\varkappa$ zu nehmen. Ist $n = 3\varkappa + 1$ oder $n = 3\varkappa + 2$, so wird $\mu + \nu \geqq 3\varkappa + 3 > n$; in diesen Fällen ist also eine Zerlegung nicht möglich. Ist dagegen $n = 3\varkappa + 3$, dann kann $\mu = 2\varkappa + 2$ und $\nu = \varkappa + 1$ werden, und dann ist ein Zerfallen von $f(z)$ nicht ausgeschlossen; in beiden Factoren müssen die Coefficienten den Gleichungen (16) gemäss gebildet sein. So ist

$$\begin{aligned} &(z^2 + \alpha_1' p z + \alpha_2^0 p^2)(z + \beta^0 p)\\ &= z^3 + (\alpha_1' + \beta^0) p z^2 + (\alpha_2^0 + \alpha_1' \beta^0) p^2 z + \alpha_2^0 \beta^0 p^3 \end{aligned}$$

ein Beispiel für die Möglichkeit der Zerlegung.

Das Polynom

$$z^n + \gamma_1 p z^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-2\varkappa-2} p z^{2\varkappa+2}$$
$$+ \gamma_{n-2\varkappa-1} p^2 z^{2\varkappa+1} + \cdots + \gamma_{n-\varkappa-1} p^2 z^{\varkappa+1} \quad (n = 3\varkappa+1,\ 3\varkappa+2)$$
$$+ \gamma_{n-\varkappa} p^3 z^{\varkappa} + \cdots + \gamma_{n-1} p^3 z + \gamma_n^{(0)} p^3$$

ist irreductibel; das Polynom

$$z^{3\varkappa+3} + \gamma_1 p z^{3\varkappa+2} + \cdots + \gamma_{\varkappa+1} p z^{2\varkappa+2}$$
$$+ \gamma_{\varkappa+2} p^2 z^{2\varkappa+1} + \cdots + \gamma_{2\varkappa+2} p^2 z^{\varkappa+1}$$
$$+ \gamma_{2\varkappa+3} p^3 z^{\varkappa} + \cdots + \gamma_{3\varkappa+2} p^3 z + \gamma^0_{3\varkappa+3} p^3$$

kann, wenn es überhaupt zerlegbar ist, nur in zwei Factoren

$$z^{2\varkappa+2} + \alpha_1 p z^{2\varkappa+1} + \cdots + \alpha_{\varkappa+1} p z^{\varkappa+1} + \alpha_{\varkappa+2} p^2 z^{\varkappa} + \cdots + \alpha^0_{2\varkappa+2} p^2,$$
$$z^{\varkappa+1} + \beta_1 p z^{\varkappa} + \cdots + \beta_{\varkappa} p z + \beta^0_{\varkappa+1} p$$

zerfallen, deren zweiter irreductibel ist, und deren erster auch nur eine Zerfällung in zwei irreductible Factoren des Grades $(\varkappa+1)$ zulassen kann (§ 52, § 53).

§ 57. Der Eisenstein'sche Satz kann auch noch als das Anfangsglied einer Reihe anderer Theoreme angesehen werden, deren nächstes das folgende ist: Wenn in (3) alle Coefficienten c_λ durch p theilbar sind, c_{n-1} aber durch keine höhere als die erste Potenz von p, so ist $f(z)$ entweder irreductibel, oder es zerfällt in der Weise, dass es einen Factor des Grades 1 und einen anderen irreductiblen Factor des Grades $(n-1)$ besitzt.

Es sei, den Voraussetzungen entsprechend,

$$c_n = \gamma_n p^\tau, \quad c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p, \qquad (\tau \geq 1);$$

wenn dann $a_\mu = \alpha^0_\mu p^\tau$ gesetzt wird, dann stossen wir in der schon mehrfach dagewesenen Art auf den Widerspruch, dass $a_0 = 1$ durch p theilbar sein müsste. Es ist also allein möglich,

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-\varrho}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p^\varrho \qquad (\tau - \varrho,\ \varrho \geq 1) \tag{17}$$

zu setzen. Aus der Gleichung

$$c_{n-1} = \gamma^0_{n-1} p = \alpha^0_\mu b_{\nu-1} p^{\tau-\varrho} + a_{\mu-1} \beta^0_\nu p^\varrho$$

folgt dann, dass nicht beide Exponenten $(\tau-\varrho)$ und ϱ grösser als 1 sind. Also muss $\tau - \varrho = 1$ oder $\varrho = 1$, d. h. etwa

$$a_\mu = \alpha^0_\mu p^{\tau-1}, \quad b_\nu = \beta^0_\nu p \tag{18}$$

werden; und dann zeigt die vorhergehende Gleichung, dass für $\tau > 2$ nicht $a_{\mu-1}$, und für $\tau = 2$ nicht gleichzeitig $a_{\mu-1}$ und $b_{\nu-1}$ durch p theilbar sein kann. Weiter ergiebt sich aus

$$c_{n-2} = \alpha^0_\mu b_{\nu-2} p^{\tau-1} + a_{\mu-1} b_{\nu-1} + a_{\mu-2} \beta^0_\nu p \equiv 0 \pmod{p},$$

dass eine der beiden Grössen $a_{\mu-1}$, $b_{\nu-1}$ durch p theilbar ist. Den so

gefundenen Forderungen wird, abgesehen von einer Aenderung der Bezeichnung, nur durch

$$a_{\mu-1} = \alpha^0_{\mu-1}, \quad b_{\nu-1} = \beta_{\nu-1} p \tag{19}$$

Genüge geleistet. Geht man mit (18), (19) in die Congruenzen

$$c_{n-s} = \alpha^0_\mu b_{\nu-s} p^{\tau-1} + \alpha^0_{\mu-1} b_{\nu-2} + a_{\mu-2}\beta_{\nu-1} p + a_{\mu-s}\beta^0_\nu p \equiv 0 \,(\mathrm{mod}.p), \tag{20}$$

. . . . . .

dann folgt der Reihe nach, genau wie früher (§ 52),

$$b_{\nu-2} = \beta_{\nu-2} p, \quad b_{\nu-3} = \beta_{\nu-3} p, \cdots, \tag{21}$$

und so gelangt man im Allgemeinen zu dem Widerspruche, dass $b_0 = 1$ durch p theilbar sein müsste. Der Widerspruch in (21) wird nur dann vermieden, wenn die letzte Congruenz aus (20), welche b_0 einführt, durch die Gleichung

$$c_0 = \alpha^0_{\mu-1} b_{\nu-\nu} = 1$$

ersetzt wird, wenn also $n = \nu + 1$, d. h. $\mu = 1$ und

$$f(z) = (z + \alpha^0_\mu b^{\tau-1})(z^{n-1} + \beta_1 p z^{n-2} + \cdots + \beta_{\nu-1} p z + \beta^0_\nu p)$$

ist. Damit ist der Satz bewiesen.

Auf die weiteren Theoreme der hier angedeuteten Serie wollen wir nicht eingehen; ihre Richtung ist durch das Gegebene hinlänglich charakterisirt.

§ 58. Eine andere Methode zur Erlangung solcher Irreductibilitätssätze hat Herr Königsberger*) gegeben. Wir wollen sie soweit auseinandersetzen, als es an dieser Stelle bereits möglich ist, ohne zu sehr auf spätere Untersuchungen Bezug nehmen zu müssen.

Die q Wurzeln der Gleichung

$$z^q - 1 = 0, \tag{22}$$

die sogenannten q^{ten} Einheitswurzeln, wollen wir durch $1, \omega_2, \omega_3, \cdots \omega_q$ bezeichnen. Ist bei rationalen Coefficienten

$$\varphi(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \tag{23}$$

eine beliebige Function n^{ten} Grades, und bildet man das Product

$$\varphi(z)\varphi(z\omega_2)\varphi(z\omega_3)\cdots\varphi(z\omega_q) = \Phi(z),$$

dann sind auch die Coefficienten von $\Phi(z)$ rational, und es enthält $\Phi(z)$ nur Potenzen von z mit den Exponenten $q, 2q, \cdots (nq)$. Wir können also in $\Phi(z)$ für z^q setzen ζ, und erhalten

$$\Phi\left(\zeta^{\frac{1}{q}}\right) = \varphi^{(q)}(\zeta) = A_0\zeta^n + A_1\zeta^{n-1} + \cdots + A_n. \tag{24}$$

---

*) Königsberger: Ueber den Eisenstein'schen Satz von der Irreductibilität algebraischer Gleichungen. J. für Math. 115; S. 53.

Es wird sich, wie nebenbei erwähnt sei, später zeigen, dass (24), gleich Null gesetzt, n Wurzeln liefert, welche die q^{ten} Potenzen der Wurzeln der Gleichung sind, die man durch Nullsetzung von (23) erhält. Ist nun $\varphi(z)$ als ein Product darstellbar, $\varphi(z) = \psi(z)\chi(z)$, dann wird

$$\Phi(z) = \Psi(z)\, X(z),$$

$$\Psi(z) = \prod_1^q \psi(z\omega_\lambda), \qquad X(z) = \prod_1^q \chi(z\omega_\lambda) \qquad (\omega_1 = 1),$$

$$\varphi^{(q)}(\zeta) = \psi^{(q)}(\zeta)\,\chi^{(q)}(\zeta).$$

Wenn demnach $\varphi(z)$ reductibel ist, so wird es jedenfalls auch $\varphi^{(q)}(\zeta)$; man kann daher aus der Irreductibilität von $\varphi^{(q)}(\zeta)$ auf die von $\varphi(z)$ schliessen.

§ 59. Um die Wirksamkeit dieser Methode zu zeigen, wollen wir zu

$$\varphi(z) = a_0 z^5 + a_1 z^4 + a_2 z^3 + a_3 z^2 + a_4 z + a_5$$

die Functionen $\varphi^{(2)}$, $\varphi^{(3)}$, $\varphi^{(4)}$ bilden. Es wird

$$\varphi^{(2)}(\zeta) = a_0^2\zeta^5 + (2a_0a_2 - a_1^2)\zeta^4 + (2a_0a_4 - 2a_1a_3 + a_2^2)\zeta^3 + (-2a_1a_5 + 2a_2a_4 - a_3^2)\zeta^2 + (-2a_3a_5 + a_4^2)\zeta - a_5^2.$$

Mit $\varphi^{(2)}(\zeta)$ ist gleichzeitig $\frac{1}{p^5}\varphi^{(2)}(p\zeta)$ irreductibel oder reductibel. Setzt man in der zweiten dieser Functionen

$$a_0 = 1,\ a_1 = \alpha_1 p,\ a_2 = \alpha_2 p^2,\ a_3 = \alpha_3 p^2,\ a_4 = \alpha_4 p^3,\ a_5 = \alpha_5{}^0 p^3,$$

so erhält man ein irreductibles Eisenstein'sches Polynom (§ 52). Folglich bleibt das ursprüngliche $\varphi(z)$ unzerlegbar, d. h.: Es ist

$$z^5 + \alpha_1 p z^4 + \alpha_2 p^2 z^3 + \alpha_3 p^2 z^2 + \alpha_4 p^3 z + \alpha_5{}^0 p^3$$

irreductibel. Dieses Resultat ist mit dem in § 56 erhaltenen Schlusstheoreme identisch.

Weiter wird für $q = 3$

$$\varphi^{(3)}(\zeta) = a_0\zeta^5 + (3a_0^2a_3 - 3a_0a_1a_2 + a_1^3)\zeta^4 + (3a_0a_3^2 - 3a_0a_1a_5 - 3a_0a_2a_4 + 3a_1^2a_4 - 3a_1a_2a_3 + a_2^3)\zeta^3 + (-3a_0a_4a_5 + 3a_1a_4^2 - 3a_1a_3a_5 + 3a_2^2a_5 - 3a_2a_3a_4 + a_3^3)\zeta^2 + (3a_2a_5^2 - 3a_3a_4a_5 + a_4^3)\zeta + a_5^3.$$

Verfährt man hier genau wie vorher, so erkennt man: Das Polynom

$$z^5 + \alpha_1 p z^4 + \alpha_2 p z^3 + \alpha_3 p^2 z^2 + \alpha_4 p^2 z^1 + \alpha_5{}^0 p^2$$

ist irreductibel.

Für $q = 4$ findet man

$$\varphi^{(4)}(\zeta) = a_0^4\zeta^5 + (4a_0^3a_4 - 4a_0^2a_1a_3 - 2a_0^2a_2^2 + 4a_0a_1^2a_2 - a_1^4)\zeta^4 + \cdots + (-4a_1a_5^3 + 4a_2a_4a_5^2 + 2a_3^2a_5^2 - 4a_3a_4^2a_5 + a_4^4)\zeta - a_5^4.$$

Hier benutzen wir $\frac{1}{p^{15}}\varphi^{(4)}(p^3\xi)$ und gelangen zu dem Resultate: Das Polynom

$$z^5 + \alpha_1 p z^4 + \alpha_2 p^2 z^3 + \alpha_3 p^3 z^2 + \alpha_4 p^4 z + \alpha_5 p^4$$

ist irreductibel. Dieses Ergebniss hätte sich einfacher ableiten lassen, wenn im Eisenstein'schen Polynome $z = \frac{p}{y}$ gesetzt und dann mit y^5 multiplicirt worden wäre.

§ **60.** Im allgemeinen Falle $f^{(q)}(\xi)$ ist das absolute Glied $A_n = \pm a_n^q$. Wir nehmen nun q als relativ prim zu n und kleiner als n an, bestimmen, was stets möglich ist, zwei ganze Zahlen r und s, für die

$$rq - ns = +1 \qquad (r, s < n;\ r > s) \tag{25}$$

wird, und untersuchen $\frac{1}{p^{ns}} f^{(q)}(p^s\xi)$. Zunächst ist der letzte Coefficient dieser Function

$$\frac{A_n}{p^{ns}} = \pm \frac{a_n^q}{p^{ns}}.$$

Für $a_n = \alpha_n{}^0 p^r$ wird dies

$$= \pm (\alpha_n{}^0)^q p^{qr-ns} = \pm (\alpha_n{}^0)^q \cdot p.$$

Um zu einem Eisenstein'schen Polynom zu gelangen, ist es also nur nöthig, die sämmtlichen, vorhergehenden Coefficienten

$$\frac{A_{n-1}}{p^{(n-1)s}},\quad \frac{A_{n-2}}{p^{(n-2)s}},\quad \cdots\quad \frac{A_1}{p^s} \tag{26}$$

durch p theilbar zu machen. Die Grösse $A_{n-\varrho}$ ist, wie man sofort sieht, eine Summe von solchen Gliedern

$$a_\varkappa^k a_\lambda^l a_\mu^m \cdots, \tag{27}$$

in denen „das Gewicht" des Complexes nämlich

$$k\varkappa + l\lambda + m\mu + \cdots = (n - \varrho)q$$

ist. Setzt man nun, wie Herr Königsberger angiebt,

$$a_1 = \alpha_1 p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1},\quad a_2 = \alpha_2 p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1},\quad \cdots\ a_{n-1} = \alpha_{n-1} p^{e\left(\frac{(n-1)r}{n}\right)+1},$$

wobei $e(h)$ die grösste ganze Zahl bedeutet, die in der positiven Grösse h enthalten ist, dann tritt in (27) die Primzahl p mindestens in der Potenz mit dem Exponenten

$$k\left[e\left(\frac{\varkappa r}{n}\right)+1\right] + l\left[e\left(\frac{\lambda r}{n}\right)+1\right] + m\left[e\left(\frac{\mu r}{n}\right)+1\right] + \cdots$$

auf, und dieser Exponent ist grösser als die Summe

$$k\frac{\varkappa r}{n} + l\frac{\lambda r}{n} + m\frac{\mu r}{n} + \cdots = (n - \varrho)\frac{r}{n}q.$$

In den Nenner von $A_{n-\varrho}$ geht p in der Potenz $(n-\varrho)s$ ein. Weil nun wegen (25) $\frac{r}{n}q > s$ ist, so ergiebt sich, dass in der That alle Glieder in (26) durch p theilbar werden; $\frac{1}{p^{ns}} f^{(q)}(p^s\zeta)$ ist daher ein Eisenstein'sches Polynom, und $f(z)$ ist irreductibel. Durch das Auftreten einer Potenz von a_n in (27) wird an den Schlüssen nichts geändert. So sind wir zu dem Königsberger'schen Satze gelangt: Setzt man

$$a_1 = \alpha_1 p^{e\left(\frac{r}{n}\right)+1}, \quad a_2 = \alpha_2 p^{e\left(\frac{2r}{n}\right)+1}, \quad \cdots \quad a_{n-1} = \alpha_{n-1} p^{e\left(\frac{n-1}{n}r\right)+1},$$
$$a_n = \alpha_n{}^0 p^r,$$

wobei r eine zu n relative Primzahl bedeutet, dann ist

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

ein irreductibles Polynom.

Sechste Vorlesung.

Grösster gemeinsamer Theiler zweier Functionen. Vielfache Wurzeln algebraischer Gleichungen.

§ 61. Es mögen $f(z)$ und $f_1(z)$ zwei ganze, ganzzahlige Functionen von z sein; ihre Grade bezeichnen wir mit n und $(n - n_1)$, wobei n_1 als Null oder als positiv vorauszusetzen ist. Wir bilden nach dem Schema, welches Euklid zur Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzen Zahlen benutzt, durch fortgesetzte Divisionen die Gleichungen

$$\begin{aligned}
f(z) &= f_1(z) \cdot g_1(z) - f_2(z),\\
f_1(z) &= f_2(z) \cdot g_2(z) - f_3(z),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{r-2}(z) &= f_{r-1}(z) \cdot g_{r-1}(z) - f_r(z),\\
f_{r-1}(z) &= f_r(z) \cdot g_r(z),
\end{aligned} \tag{1}$$

derart, dass wir jedes f_λ durch das folgende $f_{\lambda+1}$ dividiren, bis ein Rest von niedrigerem Grade bleibt, der dann $= -f_{\lambda+2}$ gesetzt wird. Die Gründe für diese Festsetzung des Restvorzeichens werden sich später ergeben. Da die Grade von $f, f_1, f_2, \cdots$ immer mehr abnehmen, ohne negativ werden zu können, so muss (1) einmal abbrechen, wie dies in der Tabelle selbst ja auch angedeutet worden ist.

Wie schon früher, so lassen wir auch im Folgenden, wenn Missverständnisse ausgeschlossen sind, häufig das Argument der Function fort, und schreiben also etwa statt der Gleichungen (1) kürzer

$$(2) \qquad f_\lambda = f_{\lambda+1} g_{\lambda+1} - f_{\lambda+2} \quad \text{oder} \quad f_{\lambda+2} = f_{\lambda+1} g_{\lambda+1} - f_\lambda.$$

Aus (2) ist ersichtlich, dass jeder Factor, den die beiden Functionen f_λ und $f_{\lambda+1}$ gemeinsam besitzen, auch $f_{\lambda+2}$ theilt. Daraus folgt, dass f_r durch den grössten gemeinsamen Theiler von f und f_1 theilbar ist. Andererseits folgt auch umgekehrt aus (2), dass der grösste gemeinsame Theiler von $f_{\lambda+2}$ und $f_{\lambda+1}$ auch in f_λ aufgeht. Daraus ergiebt sich dann, dass sowohl f als f_1 durch f_r theilbar sind. Folglich ist f_r selbst der grösste gemeinsame Theiler von f und f_1. Man kann also durch fortgesetzte Divisionen den grössten gemeinsamen Theiler zweier Functionen $f(x)$ und $f_1(x)$ bestimmen.

§ 62. Jedes der in (1) auftretenden Polynome

$$f_2, f_3, \cdots f_{r-1}, f_r$$

lässt sich als lineare, homogene Function von f und f_1 darstellen. Wenn man nämlich in der zweiten Gleichung von (2) den Index λ der Reihe nach durch $(\lambda - 2)$, $(\lambda - 3)$, $\cdots$ ersetzt, dann erhält man mittels Combination der so entstehenden Gleichungen

$$\begin{aligned} f_\lambda &= f_{\lambda-1} \cdot g_{\lambda-1} - f_{\lambda-2} \cdot 1 \\ &= f_{\lambda-2}(g_{\lambda-1} g_{\lambda-2} - 1) - f_{\lambda-3} \cdot g_{\lambda-1} \\ &= f_{\lambda-3}(g_{\lambda-1} g_{\lambda-2} g_{\lambda-3} - g_{\lambda-1} - g_{\lambda-3}) - f_{\lambda-4}(g_{\lambda-1} g_{\lambda-2} - 1) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= f_1 \cdot \psi_{\lambda-1} - f \cdot \varphi_{\lambda-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

wo dann also die Functionen $\psi_{\lambda-1}$, $\varphi_{\lambda-1}$ durch Fortsetzung der angeführten Rechnungsoperationen gefunden werden können. Auf diesem Wege gelangt man auch zu Reductionsformeln für die φ und ψ. Die Formel (2) liefert

$$(2^*) \qquad f_{\lambda+2} = f_{\lambda+1} \cdot g_{\lambda+1} - f_\lambda,$$

und setzt man hierin die durch (3) definirten Functionen φ und ψ ein,

$$\begin{aligned} f_{\lambda+1} &= f_1 \cdot \psi_\lambda \quad - f \cdot \varphi_\lambda, \\ f_\lambda \quad &= f_1 \cdot \psi_{\lambda-1} - f \cdot \varphi_{\lambda-1}, \end{aligned}$$

dann entsteht

$$f_{\lambda+2} = f_1 \cdot (\psi_\lambda g_{\lambda+1} - \psi_{\lambda-1}) - f \cdot (\varphi_\lambda g_{\lambda+1} - \varphi_{\lambda-1}),$$

und demzufolge ergiebt sich

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda+1} &= \psi_\lambda \cdot g_{\lambda+1} - \psi_{\lambda-1}, \\ \varphi_{\lambda+1} &= \varphi_\lambda \cdot g_{\lambda+1} - \varphi_{\lambda-1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Um diese Recursionsformeln zur Berechnung benutzen zu können, müssen wir noch die Anfangswerthe φ_0, ψ_0; φ_1, ψ_1 bestimmen. Diese ergeben sich aus

$$f_1 = f_1 \cdot \psi_0 - f \cdot \varphi_0 = f_1 \cdot 1 - f \cdot 0,$$
$$f_2 = f_1 \cdot \psi_1 - f \cdot \varphi_1 = f_1 \cdot g_1 - f \cdot 1$$

als

$$\psi_0 = 1, \quad \varphi_0 = 0, \tag{5}$$
$$\psi_1 = g_1, \quad \varphi_1 = 1.$$

Aus diesen folgt dann gemäss (4) weiter

$$\psi_2 = g_1 g_2 - 1, \qquad \varphi_2 = g_2,$$
$$\psi_3 = g_1 g_2 g_3 - g_1 - g_3, \quad \varphi_3 = g_2 g_3 - 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Formeln (2ᵃ) und (4) lehren, dass die Bildung von $\psi_{\lambda+1}$ aus ψ_λ und $\psi_{\lambda-1}$ ebenso vor sich geht, wie die von $\varphi_{\lambda+1}$ aus φ_λ und $\varphi_{\lambda-1}$ und die von $f_{\lambda+2}$ aus $f_{\lambda+1}$ und f_λ.

Den besonders wichtigen Fall von (3), in welchem $\lambda = r$ ist, wollen wir noch besonders hervorheben:

$$f_r = f_1 \cdot \psi_{r-1} - f \cdot \varphi_{r-1}. \tag{3ᵃ}$$

§ 63. Aus den Recursionsformeln (4) ergiebt sich durch Elimination von $g_{\lambda+1}$

$$\varphi_{\lambda+1}\psi_\lambda - \varphi_\lambda\psi_{\lambda+1} = \varphi_\lambda\psi_{\lambda-1} - \varphi_{\lambda-1}\psi_\lambda$$

und somit durch weitere Anwendung derselben Relation, und da nach (5)

$$\varphi_1\psi_0 - \varphi_0\psi_1 = 1$$

ist, die Formel

$$\varphi_{\lambda+1}\psi_\lambda - \varphi_\lambda\psi_{\lambda+1} = 1. \tag{6}$$

Hätten wir in (1) die Reste ohne Vorzeichenänderung eingeführt, so würde (6) complicirter; aber diese Aeusserlichkeit war nicht die Veranlassung zu jener Festsetzung.

Dividirt man (6) durch $\psi_\lambda\psi_{\lambda+1}$, dann entsteht

$$\frac{\varphi_{\lambda+1}}{\psi_{\lambda+1}} = \frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda} + \frac{1}{\psi_\lambda\psi_{\lambda+1}};$$

und durch weitere Anwendung derselben Relation, wenn man berücksichtigt, dass nach (5)

$$\frac{\varphi_1}{\psi_1} = \frac{1}{g_1} = \frac{1}{\psi_0\psi_1}$$

ist, die Gleichung

$$\frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda} = \frac{1}{\psi_0\psi_1} + \frac{1}{\psi_1\psi_2} + \frac{1}{\psi_2\psi_3} + \cdots + \frac{1}{\psi_{\lambda-1}\psi_\lambda}, \tag{7}$$

durch welche eine Zerlegung der gebrochenen Function $\varphi_\lambda : \psi_\lambda$ in eine Summe von Primbrüchen geliefert wird.

Ferner ergiebt (3)

$$f_1 \psi_\lambda - f \varphi_\lambda = f_{\lambda+1},$$

und deshalb wird zunächst

$$(8) \qquad \frac{f_1}{f} - \frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda} = \frac{f_1 \psi_\lambda - f\varphi_\lambda}{f\psi_\lambda} = \frac{f_{\lambda+1}}{f\psi_\lambda},$$

und durch Verwendung von (7) ergiebt sich hieraus die Darstellung

$$(8^a) \qquad \frac{f_1}{f} = \frac{1}{\psi_0\psi_1} + \frac{1}{\psi_1\psi_2} + \cdots + \frac{1}{\psi_{\lambda-1}\psi_\lambda} + \frac{f_{\lambda+1}}{f\psi_\lambda}.$$

Insbesondere wird für $\lambda = r$, wegen $f_{r+1} = 0$, der Quotient $f_1 : f$ wiederum eine Summe von Primbrüchen

$$(8^b) \qquad \frac{f_1}{f} = \frac{1}{\psi_0\psi_1} + \frac{1}{\psi_1\psi_2} + \cdots + \frac{1}{\psi_{r-1}\psi_r}.$$

§ 64. Es ist von Wichtigkeit, die auftretenden Functionen ihren Gradzahlen nach zu bestimmen. Den Grad einer Function $h(z)$ wollen wir durch $[h]$ bezeichnen, und nun möge

$$(9) \qquad [f] = n,\ [f_1] = n - n_1,\ \cdots\ [f_\lambda] = n - n_\lambda,\ \cdots\ [f_r] = n - n_r$$
$$(0 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_r \leqq n)$$

gesetzt werden; dann liefert die Vergleichung mit (1) für die Bestimmungen der Gradzahlen

$$(9^a) \qquad [g_1] = n_1,\ [g_2] = n_2 - n_1,\ \cdots [g_\lambda] = n_\lambda - n_{\lambda-1},\ \cdots [g_r] = n_r - n_{r-1}.$$

Sobald nun $[\psi_{\lambda+1}] > [\psi_\lambda]$ ist, muss nach (4) $[\psi_{\lambda+2}] > [\psi_{\lambda+1}]$ und $= [\psi_{\lambda+1}] + [g_{\lambda+2}]$ sein; unter der entsprechenden Voraussetzung ist $[\varphi_{\lambda+2}] = [\varphi_{\lambda+1}] + [g_{\lambda+2}]$. Aus den obigen Werthen von $[\varphi_\lambda]$, $[\psi_\lambda]$ für $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ folgt daher

$$(9^b) \qquad \begin{aligned} &[\psi_1] = n_1,\ [\psi_2] = n_2,\ \cdots\ [\psi_\lambda] = n_\lambda,\ \cdots \\ &[\varphi_1] = 0,\ [\varphi_2] = n_2 - n_1,\ \cdots\ [\varphi_\lambda] = n_\lambda - n_1,\ \cdots. \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man z. B., dass in (3^a) die Function ψ_{r-1} den Grad n_{r-1}, und φ_{r-1} den Grad $n_{r-1} - n_1$ besitzt. Nun ist nach (9) $n_{r-1} < n_r \leqq n$, also $n_{r-1} \leqq n - 1$ und ebenso $n_{r-1} - n_1 \leqq n - n_1 - 1$. Der Grad von ψ_{r-1} ist gleich $(n - \tau)$, der von φ_{r-1} gleich $(n - n_1 - \tau)$, wo τ mindestens gleich 1 wird.

§ 65. Ist eine rationale gebrochene Function $\frac{p(z)}{q(z)}$ gegeben, ordnet man Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von z und führt die wirkliche Division derart aus, dass das Glied niedrigster Ordnung in p durch das Glied niedrigster Ordnung in q dividirt

wird u. s. w., so entsteht die Entwickelung von $\frac{p(z)}{q(z)}$ nach steigenden Potenzen von z. Ordnet man umgekehrt p und q nach fallenden Potenzen von z und führt dementsprechend die Division so aus, dass das Glied höchster Ordnung in p durch das Glied höchster Ordnung in q dividirt wird u. s. w., so entsteht die Entwickelung von $\frac{p(z)}{q(z)}$ nach fallenden Potenzen von z. Die Entwickelung der ersten Art kann nur dann abbrechen, wenn der Nenner $q(z)$ ein Factor des Zählers wird, die der zweiten Art nur dann, wenn der Nenner bis auf Potenzen von z, die er als Theiler enthält, ein Factor des Zählers wird. Wir werden später auf solche Darstellungen genauer einzugehen haben.

Hier wollen wir nur ein auf die Entwickelung von

$$\frac{f_1}{f} - \frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda} = \frac{f_{\lambda+1}}{f\varphi_\lambda} \tag{8}$$

bezügliches Resultat hervorheben. Nach (8) und (9^b) wird

$$\left[\frac{f_{\lambda+1}}{f\psi_\lambda}\right] = -(n_\lambda + n_{\lambda+1}).$$

In der That ist

$$f_{\lambda+1} = \delta_0 z^{n-n_\lambda+1} + \delta_1 z^{n-n_\lambda+1-1} + \cdots,$$
$$f\cdot\psi_\lambda = \varepsilon_0 z^{n+n_\lambda} + \varepsilon_1 z^{n+n_\lambda-1} + \cdots;$$

und daher beginnt die Entwickelung von (8) nach fallenden Potenzen von z mit $z^{-n_\lambda-n_\lambda+1}$; d. h.: Entwickelt man die beiden Brüche $\frac{f_1}{f}$ und $\frac{\varphi_\lambda}{\psi_\lambda}$ nach fallenden Potenzen von z, so stimmen beide Entwickelungen in allen Gliedern von z^{-1} an bis zu $z^{-(n_\lambda+n_\lambda+1)+1}$ überein.

§ 66. Aus den beiden Gleichungen (vgl. (2) und (4))

$$f_{\lambda+1} = f_\lambda g_\lambda - f_{\lambda-1}, \quad \psi_\lambda = \psi_{\lambda-1} g_\lambda - \psi_{\lambda-2}$$

folgt

$$\frac{f_\lambda g_\lambda}{f_{\lambda-1}} = 1 + \frac{f_{\lambda+1}}{f_{\lambda-1}}, \quad \frac{\psi_\lambda}{\psi_{\lambda-1} g_\lambda} = 1 - \frac{\psi_{\lambda-2}}{\psi_{\lambda-1} g_\lambda};$$
$$\frac{f_\lambda \psi_\lambda}{f_{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}} = \left(1 + \frac{f_{\lambda+1}}{f_{\lambda-1}}\right)\left(1 - \frac{\psi_{\lambda-2}}{\psi_{\lambda-1} g_\lambda}\right).$$

Da nun $f_{\lambda+1}$ von geringerem Grade ist als $f_{\lambda-1}$, und $\psi_{\lambda-2}$ von geringerem als $\psi_{\lambda-1}$, so beginnt die Entwickelung der rechten Seite nach fallenden Potenzen von z mit der Constanten 1, und deshalb sind die Grade und auch die Coefficienten der höchsten Potenzen von

$f_{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}$ und von $f_\lambda\psi_\lambda$ einander gleich. Die erste Eigenschaft folgt schon direct aus der Betrachtung der Grade:

$$[f_\lambda\psi_\lambda] = [f_\lambda] + [\psi_\lambda] = (n - n_\lambda) + n_\lambda = n.$$

Dasselbe gilt dann natürlich von den beiden Producten $f_{\lambda-2}\psi_{\lambda-2}$ und $f_{\lambda-1}\psi_{\lambda-1}$ u. s. w. bis zu $f_0\psi_0 = f\cdot\psi_0 = f$. Auf diese Art gelangt man zu den Sätzen:

Alle Glieder der Functionenreihe

$$f_1\psi_1,\ f_2\psi_2,\ \cdots\ f_r\psi_r \tag{10}$$

sind vom Grade n und haben denselben Anfangscoefficienten wie $f(z)$; alle Glieder der Functionenreihe

$$f_1\varphi_1,\ f_2\varphi_2,\ \cdots\ f_r\varphi_r \tag{10a}$$

sind vom Grade $(n - n_1)$ und haben denselben Anfangscoefficienten wie $f_1(z)$.

§ 67. Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, dass die beiden Functionen f und f_1 keinen grösseren gemeinsamen Theiler als eine Constante besitzen, so dass also f_r vom Grade Null wird. Hierbei tritt es deutlich hervor, dass die constanten Grössen bei den jetzigen Betrachtungen die Rolle von Einheiten spielen. Genau wie bei der Zerlegung von Zahlen im reellen Zahlengebiete die Hinzufügung des Factors $+1$ oder -1 den Charakter der Zahlen nicht beeinflusst; genau wie im complexen Zahlengebiete die Zerlegung durch Hinzufügung eines Einheitsfactors $+1$, -1, $+i$, $-i$ nicht wesentlich geändert wird, genau so ist es beim Schema (1) unwesentlich, wenn f und f_1 mit willkürlichen constanten Factoren multiplicirt werden. Die Schlüsse bleiben dieselben, und die Resultate ändern sich höchstens insofern, als auch dabei constante Grössen multiplicativ hinzutreten.

Man kann von diesen Ueberlegungen insofern praktischen Gebrauch machen, als man bei der Durchführung der einzelnen Divisionen in (1) die Dividenden mit geeigneten Zahlenfactoren multiplicirt, durch welche das Auftreten von Brüchen in den Quotienten und den Resten vermieden wird; und dass man ebenso aus den Resten alle, den Coefficienten etwa gemeinsamen Zahlenfactoren herauszieht und sie, um zu kleineren Zahlenwerthen zu gelangen, bei den weiteren Divisionen unterdrückt. Ist z. B.

$$f = 2z^5 + z^4 + 3z^3 + 3z^2 + 2z + 1,$$
$$f_1 = 6z^4 + 7z^3 + 7z^2 + 3z + 1,$$

so würde die erste Zeile von (1) eigentlich lauten

$$f = f_1\,\frac{3z-2}{9} - \frac{1}{9}(-20z^3 - 32z^2 - 21z - 11);$$

statt des hieraus sich ergebenden f_2 nimmt man aber

$$f_2 = -(20z^3 + 32z^2 + 21z + 11).$$

An die Stelle der zweiten Zeile von (1) tritt dann

$$f_1 = f_2 \frac{-30z + 13}{100} - \frac{243}{100}(-2z^2 - z - 1);$$

aber hier nimmt man wieder

$$f_3 = -(2z^2 + z + 1).$$

Endlich folgt

$$f_2 = f_3 \cdot (10z + 11),$$

so dass also f_3 oder $-f_3$ der grösste gemeinsame Theiler von f und f_1 wird. In der That zeigt sich

$$f = -f_3 \cdot (z^3 + z + 1), \quad f_1 = -f_3 \cdot (3z^2 + 2z + 1).$$

Die Gleichungen des Euklid'schen Schemas werden somit

$$\begin{aligned} 9f &= f_1 \cdot (3z - 2) - f_2, \\ 100f_1 &= f_2 \cdot (-30z + 13) - 243f_3, \\ f_2 &= f_3 \cdot (10z + 11). \end{aligned}$$

Dass der Factor 9, der in der ersten Zeile eingeführt ist, bei $243 \cdot f_3$ sich wieder aus dem Schema heraushebt, ist kein Zufall, wie ich an anderer Stelle bewiesen habe.

§ 68. Es hatte sich — Formel (3*) und § 64 am Schlusse — ergeben: Wenn die ganze Function $f(z)$ vom Grade n und die ganze Function $f_1(z)$ vom Grade $(n - n_1)$ relativ prim sind, d. h. keinen gemeinsamen Theiler $f_r(z)$ haben, dessen Grad grösser als 0 ist, so giebt es zwei Functionen $F(z)$ und $F_1(z)$, deren Grade höchstens $(n-1)$ und $(n - n_1 - 1)$ sind, und für welche die Gleichung

$$f(z)F_1(z) + f_1(z)F(z) = 1 \tag{11}$$

gilt. Mit Hülfe dieses Satzes lassen sich die Analoga derjenigen Theoreme der Zahlentheorie, welche sich auf die Zerlegung und die Zusammensetzung von Zahlen aus Primzahlen beziehen, für die Algebra leicht entwickeln.

Eine irreductible Function war als eine solche definirt, welche keinen Theiler besitzt, dessen Grad geringer als der ihrige, aber höher als Null ist. Daraus folgt, dass wenn irgend eine Function mit einer irreductiblen Function einen gemeinsamen Theiler besitzt, sie durch diese irreductible Function selbst theilbar sein muss.

Ferner: Wenn f eine irreductible Function ist, und wenn f_1 und f_2 nicht durch f theilbar sind, dann ist auch $f_1 \cdot f_2$

nicht durch f theilbar, d. h. mit f_1 und f_2 ist auch $f_1 \cdot f_2$ relativ prim zu f. Dies beweisen wir so: Nach (11) kann man, da f und f_1 relativ prim sind, F_1 und F derart bestimmen, dass

$$fF_1 + f_1F = 1$$

und also

$$f \cdot (f_2F_1) + (f_1f_2) \cdot F = f_2$$

wird; folglich theilt der grösste gemeinsame Theiler von f und $f_1 \cdot f_2$ auch die Function f_2. Ausser einer Constanten giebt es aber keine Function, die f und f_2 theilt. Somit ist f relativ prim zu $f_1 \cdot f_2$.

Dieser Satz lässt sich verallgemeinern: Sind $f_1, f_2, f_3, \cdots f_\nu$ nicht durch die irreductible Function f theilbar, dann ist auch $f_1 \cdot f_2 \cdots f_\nu$ nicht durch f theilbar. Denn nach dem eben gelieferten Beweise ist zunächst $f_1 \cdot f_2$, ferner $(f_1f_2) \cdot f_3$ u. s. w. nicht durch f theilbar.

Ist ein Product $f_1 \cdot f_2 \cdots f_\nu$ durch die irreductible Function f theilbar, so ist mindestens einer der Factoren $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ durch f theilbar. Denn fände das Gegentheil statt, so widerspräche dies dem vorigen Satze.

Auf Grund der Gleichung (11) können mit denselben Mitteln auch die folgenden Sätze bewiesen werden:

Sind $f_1, f_2, f_3, \cdots$ Functionen, von denen keine mit einer der Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \cdots$ einen Theiler gemeinsam hat, dann hat auch das Product $f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots$ keinen Theiler mit $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots$ gemeinsam.

Ist das Product $f_1 \cdot f_2$ durch eine Function f theilbar, die mit f_1 keinen Theiler gemeinsam hat, dann ist f_2 durch f theilbar.

Ist f ein Vielfaches der beiden Functionen f_1 und f_2, die keinen gemeinsamen Theiler besitzen, dann ist f auch ein Vielfaches des Productes $f_1 \cdot f_2$.

§ 69. Jede Function f lässt sich auf wesentlich nur eine einzige Art in ein Product von irreductiblen Factoren zerlegen.

In der vorigen Vorlesung ist auseinandergesetzt worden, auf welche Art bei einer vorgelegten Function f entschieden werden kann, ob sie irreductibel ist, und wie man einen ihrer Factoren finden kann, falls sie reductibel ist. Im letzteren Falle erhält man also eine Zerlegung von f in Factoren. Jeden derselben kann man in gleicher Weise wieder untersuchen und daher ebenso in Factoren zerlegen, falls er reductibel sein sollte. Diese Operation muss nach einer endlichen Zahl von Untersuchungen ein Ende nehmen, da bei jeder Zerlegung

die Gradzahlen der Factoren kleiner werden als die des Products, ohne doch gleich Null werden zu können. So kommt man also zu einer Zerlegung in irreductible Factoren

$$f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_\mu .$$

Gesetzt, man hätte auf irgend eine Art auch die Zerlegung

$$f = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots \varphi_\nu$$

in irreductible Factoren erhalten, so würde der irreductible Factor φ_1 das Product $f_1 \cdot f_2 \cdots f_\mu$ und daher nach dem vorigen Paragraphen auch einen der Factoren $f_1, f_2, \cdots f_\mu$ theilen. Wir nehmen an, es sei dies f_1. Dann ist die irreductible Function f_1 durch die irreductible Function φ_1 theilbar, und also muss $f_1 = \varphi_1 \cdot c_1$ sein, wo c_1 eine Constante bedeutet. Somit erhält man

$$c_1 \cdot f_2 \cdot f_3 \cdots f_\mu = \varphi_2 \cdot \varphi_3 \cdots \varphi_\nu$$

und kann nun dieselben Schlüsse auf's Neue durchführen. Es zeigt sich ebenso, dass φ_2 bis auf einen constanten Factor etwa gleich f_2 ist, und daraus folgt dann

$$c_1 c_2 \cdot f_3 \cdots f_\mu = \varphi_3 \cdots \varphi_\tau ,$$

u. s. w. Sind auf einer Seite alle Functionen in Wegfall gekommen, so können auch auf der anderen keine mehr vorhanden sein, und daraus folgt dann der ausgesprochene Satz; denn das Hinzutreten von constanten Factoren $c_1, c_2, \cdots$ zu den $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$ macht keine wesentliche Aenderung in der Zerlegung aus.

§ 70. Jetzt sind wir im Stande, die Untersuchungen über vielfache Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ mit einfachen Mitteln durchzuführen. Wir suchen den grössten gemeinsamen Theiler der beiden Functionen $f(z)$ und $f'(z)$ auf. Derselbe möge $f_1(z)$ heissen. Nach § 36 Formel (2) und (3) enthält die Gleichung $f_1(z) = 0$ jede m-fache Wurzel von $f(z) = 0$ in der Multiplicität $(m - 1)$, die einfachen Wurzeln also gar nicht mehr; und ausserdem kann $f_1(z) = 0$ auch keine weiteren Wurzeln enthalten, da ja eine jede auch zu $f(z) = 0$ und $f'(z) = 0$ als gemeinsame Wurzel gehören würde. Fasst man daher sämmtliche Wurzelfactoren $(z - z_\alpha)$, die in $f(z)$ mit der Multiplicität m auftreten, in ein Product Z_m zusammen, dann wird

$$f(z) = Z_1 Z_2^2 Z_3^3 \cdots Z_m^m \cdots , \tag{12}$$

und

$$f_1(z) = Z_2 Z_3^2 \cdots Z_m^{m-1} \cdots . \tag{13}$$

Mit $f_1(z)$ verfährt man nun genau so, wie mit $f(z)$; der grösste gemeinsame Theiler von f_1 und f_1' sei $f_2(z)$. Dann wird

(14) $$f_2(z) = Z_3 \cdots Z_m^{m-2} \cdots$$

u. s. f. Es liefert daher, wie (12) und (13) zeigen,

$$\frac{f(z)}{f_1(z)} = Z_1 Z_2 Z_3 \cdots Z_m \cdots = 0$$

alle Wurzeln von $f(z) = 0$, und zwar eine jede nur als einfache Wurzel; ferner, wie die Hinzunahme von (14) lehrt,

$$\frac{f(z) f_2(z)}{f_1(z)^2} = Z_1 = 0$$

alle und nur die Wurzeln von $f(z) = 0$, welche einfach auftreten; ebenso

$$\frac{f_1(z) f_3(z)}{f_2(z)^2} = Z_2 = 0$$

alle und nur die Wurzeln von $f(z) = 0$, welche zweifach auftreten u. s. f.

Die Auflösung einer Gleichung mit vielfachen Wurzeln kann also durch einfache Divisionen auf die Auflösung einer oder mehrerer Gleichungen reducirt werden, welche nur einfache Wurzeln besitzen und Theiler der vorgelegten Gleichung sind.

§ 71. Zum Schlusse dieser Vorlesung wollen wir noch eine Anwendung der in den ersten Paragraphen besprochenen Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers auf die Zerlegung einer rationalen gebrochenen Function in Partialbrüche machen.

Es sei

$$\frac{h(z)}{k(z)}$$

ein Bruch, dessen Nenner das Product von zwei zu einander theilerfremden Functionen

$$k(z) = f(z) \cdot f_1(z), \qquad [f] = n, \quad [f_1] = n_1$$

ist; der Zähler $h(z)$ möge von niederem Grade sein, als der Nenner. Dann kann man nach der besprochenen Methode zwei Functionen ψ und φ bestimmen, für welche

$$\psi(z) \cdot f_1(z) + \varphi(z) \cdot f(z) = 1, \qquad [\psi] < n, \ [\varphi] < n_1$$

ist, und folglich wird

$$(\psi(z) \cdot h(z)) f_1(z) + (\varphi(z) \cdot h(z)) f(z) = h(z).$$

Ueberschreitet der Grad von $\psi \cdot h$ den Grad von f, so können wir

$$\psi(z) \cdot h(z) = f(z) \cdot q(z) + r(z), \quad [r] < n,$$
$$r(z) \cdot f_1(z) + (\varphi(z) h(z) + q(z) f_1(z)) f(z) = h(z)$$

setzen, und weil ja

$$[r \cdot f_1] < n + n_1, \quad [h] < n + n_1$$

ist, so muss hierbei auch

$$r_1(z) = \varphi(z)h(z) + q(z)f_1(z)$$

von geringerem als dem n_1^{ten} Grade sein; und also ist

$$(15) \qquad \frac{h(z)}{f(z)f_1(z)} = \frac{r(z)}{f(z)} + \frac{r_1(z)}{f_1(z)}; \qquad [r] < [f], \quad [r_1] < [f_1].$$

Man hat sonach $h(z):k(z)$ in ein Aggregat zweier Brüche zerlegt, deren Nenner die zu einander theilerfremden Factoren $f(z)$ und $f_1(z)$ von $k(z)$, und deren Zähler von geringeren Graden als die Nenner sind.

Es ist leicht einzusehen, dass eine solche Zerlegung eindeutig bestimmt ist.

Ferner sei bemerkt, dass über die Realität der Coefficienten von f und f_1 nichts vorausgesetzt ist; unsere Methode ermöglicht daher die Zerlegung des Bruches $h:k$ in Partialbrüche

$$(16) \qquad \frac{h(z)}{k(z)} = \sum \frac{t_\lambda(z)}{(z-z_\lambda)^{m_\lambda}}, \qquad [t_\lambda] < m_\lambda,$$

wenn, in ihre Linearfactoren aufgelöst, die Function

$$k(z) = \Pi(z - z_\lambda)^{m_\lambda}$$

ist.

Wenn wir hierbei nach § 19, (12ª)

$$t_\lambda(z) = t_\lambda(z_\lambda) + \frac{t_\lambda'(z_\lambda)}{1!}(z - z_\lambda) + \frac{t_\lambda''(z_\lambda)}{2!}(z - z_\lambda)^2 + \cdots$$

setzen, dann ergiebt sich die Formel

$$(16^a) \quad \frac{h(z)}{k(z)} = \sum \left\{ \frac{t_\lambda(z_\lambda)}{(z-z_\lambda)^{m_\lambda}} + \frac{t_\lambda'(z_\lambda)}{1!(z-z_\lambda)^{m_\lambda-1}} + \frac{t_\lambda''(z_\lambda)}{2!(z-z_\lambda)^{m_\lambda-2}} + \cdots \right\}.$$

Jeder vorkommende Partialbruch hat als Zähler eine Constante. Die Formel (16ª) ist, wie man sieht, eine Verallgemeinerung der in § 39, (8) gegebenen Partialbruchzerlegung, bei welcher die Voraussetzung gemacht worden war, dass jedes m_λ den Werth 1 besitze.

Wir wollen zeigen, dass die damalige Bestimmung der Coefficienten aus der jetzt gegebenen sich ergiebt. Der Voraussetzung nach ist hier $k(z)$ durch $(z - z_\lambda)^{m_\lambda}$ aber durch keine höhere Potenz dieses Wurzelfactors theilbar. Deshalb gilt die Entwickelung (§ 19)

$$k(z) = \frac{k^{(m_\lambda)}(z_\lambda)}{m_\lambda!}(z - z_\lambda)^{m_\lambda} + \frac{k^{(m_\lambda+1)}(z_\lambda)}{(m_\lambda+1)!}(z - z_\lambda)^{m_\lambda+1} + \cdots,$$

wobei der erste Coefficient nicht verschwindet, und es wird

$$\left| \frac{h(z)}{k(z)}(z - z_\lambda)^{m_\lambda} \right|_{z=z_\lambda} = \frac{m_\lambda! h(z_\lambda)}{k^{(m_\lambda)}(z_\lambda)}.$$

Aus (16ª) folgt daher, wenn man mit $(z - z_\lambda)^{m_\lambda}$ multiplicirt und $z = z_\lambda$ setzt, zufolge des eben erhaltenen Resultates:

$$t_\lambda(z_\lambda) = \frac{m_\lambda!\, h(z_\lambda)}{k^{(m_\lambda)}(z_\lambda)}.$$

Für $m_\lambda = 1$ kommt man demnach zu den früher gegebenen Werthen des § 39 zurück.

Siebente Vorlesung.

Reihenentwickelung einer rationalen Function.

§ 72. Bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier Functionen f und f_1 haben wir in der Gleichung (3) von § 62, nämlich in

$$f_1 \cdot \psi_\lambda - f \cdot \varphi_\lambda = f_{\lambda+1}, \tag{1}$$
$$[f] = n, \quad [f_\lambda] = n - n_\lambda; \quad [\psi_\lambda] = n_\lambda, \quad [\varphi_\lambda] = n_\lambda - n_1$$

die Lösung der Aufgabe gefunden, zwei ganze Functionen Ψ und Φ so zu bestimmen, dass, wenn

$$f_1 \Psi - f\Phi = F \tag{2}$$

gesetzt wird, die Summe der Gradzahlen

$$[\Psi] + [F] \leqq n - 1 \tag{3}$$

wird. Dieser Bedingung wird zunächst in der That durch die Functionen ψ_λ, φ_λ genügt, da wegen $n_{\alpha+1} > n_\alpha$ die Summe

$$n_\lambda + (n - n_{\lambda+1}) = n - (n_{\lambda+1} - n_\lambda) < n$$

ist. Es folgt aber auch weiter, dass nur diese Functionen ψ_λ, φ_λ, $f_{\lambda+1}$ den Forderungen genügen, sobald man von vorhandenen gemeinsamen Factoren der drei Ausdrücke F, Φ, Ψ absieht. Denn wenn etwa

$$n_\lambda \leqq [\Psi] < n_{\lambda+1}$$

wird, dann ergiebt sich aus (3) zunächst

$$[F] \leqq n - n_\lambda - 1,$$

und folglich bleibt in der Gleichung

$$(\psi_\lambda \Phi - \varphi_\lambda \Psi) f = \Psi f_{\lambda+1} - \psi_\lambda F$$

der Grad der rechten Seite kleiner als n, während doch derjenige der linken Seite mindestens auf n steigt, falls die Klammer von Null verschieden ist. Demgemäss müssen beide Seiten verschwinden,

d. h. es wird

$$\Phi : \Psi : F = \varphi_\lambda : \psi_\lambda : f_{\lambda+1};$$

$$\Phi = \varphi_\lambda \cdot \Theta, \quad \Psi = \psi_\lambda \cdot \Theta, \quad F = f_{\lambda+1} \cdot \Theta. \tag{4}$$

Die hierbei auftretenden Verhältnisse wollen wir genauer untersuchen.

§ 73. Es sei unter der unwesentlichen Beschränkung, dass $n_1 > 0$ ist,

$$\begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n, \\ f_1(z) &= b_0 z^{n-n_1} + b_1 z^{n-n_1-1} + \cdots + b_{n-n_1}. \end{aligned} \tag{5}$$

Nun entwickeln wir den Quotienten $f_1 : f$ nach fallenden Potenzen der Variablen z in eine Reihe

$$\frac{f_1(z)}{f(z)} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots + c_{\lambda-1} z^{-\lambda} + \cdots; \tag{6}$$

hierbei wird $c_{n_1-1} z^{-n_1}$ das erste nicht verschwindende Glied sein. Wir setzen die Entwickelung nach fallenden Potenzen übrigens nur so weit fort, als sie jeweils gebraucht wird, und fügen dann das Restglied hinzu. Dadurch gehen wir der Frage nach Convergenz oder Divergenz, die bei einer unendlichen Reihe auftreten würde, aus dem Wege.

Um die Aufgabe des vorigen Paragraphen zu lösen, nehmen wir

$$\Psi(z) = \alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_{\nu-1} z + \alpha_\nu \qquad (\nu < n),$$

setzen dann fest, dass $\Phi(z)$ die in $(\Psi(z) f_1(z)) : f(z)$ enthaltene ganze Function sein soll, und suchen weiter die α so zu bestimmen, dass die Function

$$\Psi \frac{f_1}{f} - \Phi = F \cdot \frac{1}{f}$$

bei der Entwickelung nach fallenden Potenzen von z erst mit $z^{-(\nu+1)}$ oder einer noch späteren Potenz beginnt. Denn dann ist wegen

$$\left[\frac{F}{f}\right] \leqq -(\nu+1), \quad [F] \leqq n-\nu-1, \quad [F] + [\Psi] \leqq n-1$$

die Forderung (3) erfüllt. In

$$(\alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu)(c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots)$$

stimmen die Glieder mit negativen Exponenten von z mit denjenigen der Entwickelung von $F : f$ überein. Folglich sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} c_0\alpha_\nu &+ c_1\alpha_{\nu-1} + \cdots + c_\nu\alpha_0 &&= 0, \\ c_1\alpha_\nu &+ c_2\alpha_{\nu-1} + \cdots + c_{\nu+1}\alpha_0 &&= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots

und machen zunächst die Voraussetzung, dass $C_\nu \neq 0$ sei. Dann wird bis auf einen constanten Factor, der bei allen α gemeinsam auftritt,

$$\alpha_0 = C_\nu, \tag{9}$$

und die gesuchte Function wird gleichfalls bis auf diesen Factor

$$\Psi = \Psi_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{\nu-1} & 1 \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_\nu & z \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-1} & z^\nu \end{vmatrix}. \tag{9a}$$

§ 74. Durch (9a) wird dann sofort auch Φ und F bestimmt sein, wie in § 78 noch gezeigt werden soll. Aber schon hier kann man beweisen, dass diese zusammengehörigen Functionen Ψ, Φ, F keinen gemeinsamen Theiler, dessen Grad in z höher als Null ist, besitzen. Wäre nämlich

$$\Psi = \Psi^{(0)} \cdot u, \quad \Phi = \Phi^{(0)} \cdot u, \quad F = F^{(0)} \cdot u,$$

so würden ohne Aenderung der Grade der Functionen, der Gleichung (2) auch die Functionen

$$\Psi^{(0)} \cdot v, \quad \Phi^{(0)} \cdot v, \quad F^{(0)} \cdot v$$

genügen, sobald nur $[u] = [v]$ ist. Dann wären also die $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ nicht ihren Verhältnissen nach eindeutig bestimmt; und dies könnte nur eintreten, wenn in (7) sämmtliche aus den c zu bildenden Determinanten der ν^{ten} Ordnung verschwinden. Das widerspricht der gemachten Voraussetzung $C_\nu \neq 0$, und daher kann u nur eine Constante sein, wenn $\Psi^{(0)}$, $\Phi^{(0)}$, $F^{(0)}$ relativ prim sind. Daraus folgt weiter:

Es können eindeutige Lösungen (9a) nur für $\nu = n_1, n_2, n_3, \cdots$ bestehen, wenn dies die Ordnungszahlen derjenigen Determinanten der Reihe

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad \cdots$$

sind, welche von Null verschiedene Werthe haben. Bis auf constante Factoren stimmen daher

$$\Psi_{n_1}, \quad \Psi_{n_2}, \quad \Psi_{n_3}, \quad \cdots$$

mit den in der vorigen Vorlesung durch Division gefundenen Functionen

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_3, \quad \cdots$$

überein.

§ 75. Liegt der Grad ν einer zu bestimmenden Function Ψ_ν also zwischen zwei n_α, so ist die Lösung der Aufgabe aus § 72 nur in der Form

$$\Psi = \psi_\lambda \cdot \Theta, \quad \Phi = \varphi_\lambda \cdot \Theta, \quad F = f_{\lambda+1} \cdot \Theta$$

möglich, wobei für die Gradzahlen die Gleichung

$$[\Psi] = [\Theta] + [\psi_\lambda] = [\Theta] + n_\lambda = \nu$$

gelten wird. Dabei muss gleichzeitig

$$[F] = [\Theta] + [f_{\lambda+1}] = [\Theta] + n - n_{\lambda+1}$$

werden, und aus der Bedingung (3) folgt dann

$$2[\Theta] + n + n_\lambda - n_{\lambda+1} < n - 1,$$
$$2[\Theta] < (n_{\lambda+1} - n_\lambda) - 1.$$

Dies zeigt, dass

$$[\Psi] = \nu > n_\lambda \quad \text{aber} \quad [\Psi] = \nu < \frac{n_{\lambda+1} + n_\lambda}{2}$$

ist. Es giebt also nicht für jeden vorgeschriebenen Grad ν eine Lösung der Aufgabe des § 72, sondern nur für diejenigen Werthe von ν, die entweder mit einem der n_λ zusammenfallen, oder die von dem nächstkleineren n_λ um weniger als die halbe Differenz $\frac{1}{2}(n_{\lambda+1} - n_\lambda)$ entfernt sind. Die allgemeinste an Stelle von Ψ der Gleichung (2) genügende Function ν^{ten} Grades ist hiernach eine beliebige, durch Ψ_λ theilbare ganze Function, für welche der Grad des Quotienten kleiner als jeder der beiden Abstände der Zahl ν von den beiden Grenzen $(n_\lambda - 1)$ und $n_{\lambda+1}$ ist, zwischen denen sie liegt.

Bei den Veränderungen, welche die Functionen Ψ erfahren, während die Zahl ν nach einander die Werthe 1, 2, 3, $\cdots$ durchläuft, markiren die Zahlen n_λ die Anfangspunkte der wesentlich verschiedenen Intervalle. Für das ganze Intervall von $\nu = n_\lambda$ bis $\nu = n_{\lambda+1} - 1$ ist ψ_λ der grösste gemeinsame Theiler aller zugehörigen Functionen; der andere Factor ist eine beliebige Function eines bestimmten Grades, der für $\nu = n_\lambda$ gleich Null ist, mit wachsendem ν bis zur Mitte des Intervalls gleichmässig steigt, alsdann aber gleichmässig abnimmt und also am Ende des Intervalls bei $\nu = n_{\lambda+1} - 1$ den Werth Null wiedererlangt*).

§ 76. Wir wollen jetzt $\nu = n_\lambda$ annehmen und die α aus (7) bestimmt denken. Die Gleichungen (7) können wir als Recursionsformeln für die c auffassen. Ist $n_{\lambda+1} > n_\lambda + 1$, dann reicht die Gültigkeit derselben noch weiter. Nur um den Beweis einfacher zu schreiben, wollen wir das an einem Beispiele zeigen, durch welches aber der allgemeine Satz augenscheinlich wird. Es sei

*) Kronecker: Elimination einer Variablen aus zwei algebraischen Gleichungen. Berl. Ber. 1881. Juni.

$$c_0\alpha_2 + c_1\alpha_1 + c_2\alpha_0 = 0, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0; \qquad (\alpha_0 \neq 0);$$
$$c_1\alpha_2 + c_2\alpha_1 + c_3\alpha_0 = 0,$$

wir setzen

$$c_2\alpha_2 + c_3\alpha_1 + c_4\alpha_0 = \gamma_4, \quad c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1 + c_5\alpha_0 = \gamma_5, \cdots.$$

Ist auch $C_3 = 0$, so folgt

$$\alpha_0 \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & \gamma_4 \end{vmatrix} = \gamma_4 \cdot C_2 = 0,$$

so dass $\gamma_4 = 0$ wird. Ist weiter auch $C_4 = 0$, dann folgt ebenso

$$\alpha_0^2 \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_5 \\ 0 & 0 & \gamma_5 & \gamma_6 \end{vmatrix} = -\gamma_5^2 C_2 = 0,$$

so dass $\gamma_5 = 0$ wird. Ist dagegen jetzt $C_5 \neq 0$, so erkennt man ebenso, dass γ_6 von Null verschieden sein muss. So haben wir den Satz bewiesen: Ist $\nu = n_\lambda$, so giebt es genau $(n_{\lambda+1} - 1)$ Gleichungen

$$(7^a)\quad \gamma_{\varrho+\nu} \equiv c_\varrho\alpha_\nu + c_{\varrho+1}\alpha_{\nu-1} + \cdots + c_{\varrho+\nu}\alpha_0 = 0 \quad (\varrho = 0, 1, \cdots (n_{\lambda+1} - 2)),$$

bei denen die α die Coefficienten von

$$\mathfrak{P}(z) = \mathfrak{P}_\nu(z) = \alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

sind. Vermittels dieser Recursionsformeln (7^a) können c_{n_λ}, $c_{n_\lambda+1}$, $\cdots$ $c_{n_\lambda+1+n_\lambda-2}$ aus c_0, c_1, $\cdots c_{n_\lambda-1}$ berechnet werden. Von einer gewissen unteren Grenze an, die durch das höchste n_λ bestimmt wird, gilt die Recursionsreihe beliebig weit.

Die oben angewendete Determinantenumformung zeigt zugleich, da ja $C_{n_\lambda} \neq 0$, $C_{n_\lambda+1} \neq 0$ ist, während die zwischenliegenden C_ν verschwinden, dass

$$(10)\quad \alpha_0^\mu C_{n_\lambda+1} = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \gamma^\mu_{n_\lambda+1+n_\lambda-1} C_{n_\lambda} \qquad (\mu = n_{\lambda+1} - n_\lambda)$$

wird. Durch (9) ergiebt sich hieraus

$$(10^a)\quad C^{\mu-1}_{n_\lambda} C_{n_\lambda+1} = (-1)^{\frac{\mu(\mu-1)}{2}} \gamma^\mu_{n_\lambda+1+n_\lambda-1} \qquad (\mu = n_{\lambda+1} - n_\lambda).$$

§ 77. Die Resultate aus § 75 sind nicht direct aus dem vorgelegten Gleichungssysteme (7) abgeleitet. Nach den Betrachtungen über die Gültigkeit der Recursionsformeln ist es aber leicht, diese Lücke auszufüllen. Wir wollen dies an dem folgenden Beispiele

zeigen, welches allgemein genug ist, um den allgemeinen Fall überblicken zu lassen. Es sei

$$C_2 \neq 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = 0, \quad C_7 \neq 0.$$

Dann kann man nach dem vorigen Paragraphen die Gleichungen

$$\begin{aligned} &c_0u + c_1v + c_2w = 0, \quad c_3u + c_4v + c_5w = 0, \\ &c_1u + c_2v + c_3w = 0, \quad c_4u + c_5v + c_6w = 0, \qquad (w \neq 0) \\ &c_2u + c_3v + c_4w = 0, \quad c_5u + c_6v + c_7w = 0 \end{aligned}$$

befriedigen, und dabei wird unter Beibehaltung der Bezeichnung $\gamma_8, \gamma_9, \cdots$

$$c_6u + c_7v + c_8w = \gamma_8 \neq 0.$$

Es sei $\nu = 5$ vorgelegt; dann wäre (vgl. (7)) das Gleichungssystem zu lösen

$$\begin{aligned} c_0\alpha_5 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_2 + c_4\alpha_1 + c_5\alpha_0 &= 0, \\ c_1\alpha_5 + c_2\alpha_4 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_2 + c_5\alpha_1 + c_6\alpha_0 &= 0, \\ c_2\alpha_5 + c_3\alpha_4 + c_4\alpha_3 + c_5\alpha_2 + c_6\alpha_1 + c_7\alpha_0 &= 0, \\ c_3\alpha_5 + c_4\alpha_4 + c_5\alpha_3 + c_6\alpha_2 + c_7\alpha_1 + c_8\alpha_0 &= 0, \\ c_4\alpha_5 + c_5\alpha_4 + c_6\alpha_3 + c_7\alpha_2 + c_8\alpha_1 + c_9\alpha_0 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man jede der drei letzten Gleichungen mit w und addirt jedesmal die vorhergehende mit v und die zweitvorhergehende mit u multiplicirte dazu, so wird die umgewandelte dritte der Gleichungen identisch erfüllt; die vierte geht in $\gamma_8\alpha_0 = 0$, und die letzte in $\gamma_8\alpha_1 + \gamma_9\alpha_0 = 0$ über. Aus diesen Resultaten folgt $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 0$, und so erkennen wir, dass eine Function fünften Grades, die der Aufgabe genügt, nicht besteht; es tritt für sie, wie dies in § 75 gezeigt wurde, eine Function dritten Grades ein, für welche die Forderungen

$$\begin{aligned} c_0\alpha_5 + c_1\alpha_4 + c_2\alpha_3 + c_3\alpha_2 &= 0, \\ c_1\alpha_5 + c_2\alpha_4 + c_3\alpha_3 + c_4\alpha_2 &= 0 \end{aligned}$$

zu erfüllen sind. Es folgt aus den Gleichungen, durch welche u, v, w definirt werden, für ganz willkürliche p, q

$$\begin{aligned} (c_0u + c_1v + c_2w)q + (c_1u + c_2v + c_3w)p &= 0, \\ (c_1u + c_2v + c_3w)q + (c_2u + c_3v + c_4w)p &= 0, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} c_0(uq) + c_1(vq + up) + c_2(wq + vp) + c_3(wp) &= 0, \\ c_1(uq) + c_2(vq + up) + c_3(wq + vp) + c_4(wp) &= 0, \end{aligned}$$

und also wird ganz allgemein, da die nothwendige Zahl der willkürlichen Constanten vorhanden ist,

$$\begin{aligned} &\alpha_2 = wp, \quad \alpha_3 = wq + vp, \quad \alpha_4 = vq + up, \quad \alpha_5 = uq; \\ &\Psi = wpz^3 + (wq + vp)z^2 + (vq + up)z + uq \\ &\quad = (pz + q)(wz^2 + vz + u). \end{aligned}$$

Dies stimmt mit den Sätzen des § 75 überein, da ja der Factor zweiten Grades das zu $\nu = 2$ gehörige Ψ ist. Man sieht, dass unsere Ueberlegungen im allgemeinen Falle gar keine Aenderungen fordern, und so haben wir auch auf directem Wege die früheren Resultate wieder hergeleitet.

§ 78. Für Ψ hatten wir die Lösung

$$(9^a) \qquad \Psi = \alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu = \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{\nu-1} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_\nu & \cdots & c_{2\nu-1} & z^\nu \end{vmatrix}$$

gefunden. Es könnte rechts noch ein beliebiger constanter Factor angefügt werden. Das zugehörige Φ wird von hier aus durch die Bemerkung bestimmt, dass

$$(11) \qquad \Psi \frac{f_1}{f} - \Phi = (\alpha_0 z^\nu + \alpha_1 z^{\nu-1} + \cdots + \alpha_\nu)(c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots)$$

nur negative Potenzen von z enthalten darf. Somit ist

$$\Phi = \alpha_0(c_0 z^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-1}) + \alpha_1(c_0 z^{\nu-1} + \cdots + c_{\nu-2}) + \cdots + \alpha_{\nu-1} \cdot c_0,$$

und man bekommt Φ aus Ψ, wenn man in der Gleichung (9^a) z^ν, $z^{\nu-1}$, $\cdots$ z, 1 durch die hier auftretenden Factoren von α_0, α_1, $\cdots$ $\alpha_{\nu-1}$, α_ν entsprechend ersetzt. Es ist demnach

$$(12^a) \qquad \Phi = |\, c_\alpha, c_{\alpha+1}, \cdots c_{\alpha+\nu-1}, c_0 z^{\alpha-1} + c_1 z^{\alpha-2} + \cdots + c_{\alpha-1} \,|$$
$$(\alpha = 0, 1, 2, \cdots \nu).$$

Man erkennt ohne Weiteres die folgenden Umformungen von (9^a) und (12^a), die auf den einfachsten Determinantensätzen beruhen,

$$(9^b) \qquad \Psi = |\, z c_{p+q} - c_{p+q+1} \,| \qquad (p, q = 0, 1, \cdots (\nu - 1)),$$

$$(12^b) \qquad \Phi = -\begin{vmatrix} 0 & c_0 & \cdots & c_{\nu-1} \\ c_0 & z c_0 - c_1 & \cdots & z c_{\nu-1} - c_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu-1} & z c_{\nu-1} - c_\nu & \cdots & z c_{2\nu-2} - c_{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir wegen $\Psi f_1 - \Phi f = F$ die Darstellung

$$(13) \qquad F = \begin{vmatrix} f_1 & c_0 & \cdots & c_{\nu-1} \\ c_0 f & z c_0 - c_1 & \cdots & z c_{\nu-1} - c_\nu \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\nu-1} f & z c_{\nu-1} - c_\nu & \cdots & z c_{2\nu-2} - c_{2\nu-1} \end{vmatrix}.$$

Für F werden wir noch einen anderen Ausdruck herleiten, um bequem das höchste Glied dieser Function bestimmen zu können. Dabei wollen wir die Bezeichnung aus (7^a), nämlich

$$\gamma_{\varrho+\nu} = c_\varrho \alpha_\nu + c_{\varrho+1} \alpha_{\nu-1} + \cdots + c_{\varrho+\nu} \alpha_0$$

benutzen und stellen, wieder durch die Vergleichung mit (9ª), die Determinantenform der γ fest:

$$(7^b) \qquad \gamma_{\varrho+\nu} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{\nu-1} & c_\varrho \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_\nu & c_{\varrho+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-1} & c_{\varrho+\nu} \end{vmatrix}.$$

Vom Ausdrucke (11) wissen wir, dass er lediglich Glieder mit negativen Exponenten von z enthält. Diese liefern zusammengefasst

$$\sum_{\varrho=0,1\cdots} z^{-\varrho-1}(\alpha_\nu c_\varrho + \alpha_{\nu-1}c_{\varrho+1} + \cdots + \alpha_0 c_{\varrho+\nu}) = \sum_{\varrho=0,1\cdots} z^{-\varrho-1}\gamma_{\varrho+\nu}$$
$$= \sum_\sigma z^{-\sigma-1}\gamma_{\sigma+\nu} \qquad (\sigma = (n_{\lambda+1}-1),\ n_{\lambda+1},\ \cdots),$$

weil ja nach § 76 die Gleichungen

$$\gamma_\nu = 0,\ \gamma_{\nu+1} = 0,\ \cdots\ \gamma_{\nu+n_{\lambda+1}-2} = 0 \qquad (\nu = n_\lambda)$$

gelten. Wenn wir der bequemeren Schreibart wegen

$$n_\lambda = \nu,\quad n_{\lambda+1} = \nu'$$

setzen, dann wird sonach der Complex negativer Potenzen in (11) gleich

$$\sum_{\tau=0,1,\cdots} z^{-\nu'-\tau}\gamma_{\nu+\nu'+\tau-1}.$$

Nun ist $F = f(\Psi\frac{f_1}{f} - \Phi)$, und also, falls man

$$(5) \qquad f = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n$$

schreibt,

$$\begin{aligned} F &= f\sum_{\tau=0,1,\cdots} z^{-\nu'-\tau}\gamma_{\nu+\nu'+\tau-1} \\ &= \gamma_{\nu+\nu'-1}(a_0 z^{n-\nu'} + a_1 z^{n-\nu'-1} + \cdots + a_{n-\nu'}) \\ &+ \gamma_{\nu+\nu'}(a_0 z^{n-\nu'-1} + a_1 z^{n-\nu'-2} + \cdots + a_{n-\nu'-1}) \\ &+ \gamma_{\nu+\nu'+1}(a_0 z^{n-\nu'-2} + a_1 z^{n-\nu'-3} + \cdots + a_{n-\nu'-2}) \\ &+ \quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &+ \gamma_{n+\nu-2}(a_0 z + a_1) + \gamma_{n+\nu-1}\cdot a_0. \end{aligned} \qquad (13^a)$$

Die einzelnen Klammern brauchten hier nicht weiter fortgesetzt zu werden, da ja doch F keine negativen Potenzen von z enthält. Die Function F steigt bis zum Grade $(n - n_{\lambda+1})$ auf, und ihr höchster Coefficient ist

$$(14) \qquad a_0\gamma_{n_\lambda+n_{\lambda+1}-1} = a_0 \begin{vmatrix} c_0 & \cdots & c_{n_\lambda-1} & c_{n_{\lambda+1}-1} \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n_\lambda} & \cdots & c_{2n_\lambda-1} & c_{n_\lambda+n_{\lambda+1}-1} \end{vmatrix}.$$

Die Function F selbst hat die Form

$$(13^b)\quad F=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{n_\lambda-1} & \sum c_{\varrho-1} f^{(\varrho)} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_{n_\lambda} & c_{n_\lambda+1} & \cdots & c_{2n_\lambda-1} & \sum c_{n_\lambda+\varrho-1} f^{(\varrho)} \end{vmatrix} \qquad (\varrho = n_{\lambda+1}, \cdots n),$$

wobei die $f^{(\varrho)}$ durch die Gleichungen

$$f^{(\varrho)}(z) = a_0 z^{n-\varrho} + a_1 z^{n-\varrho-1} + \cdots + a_{n-\varrho}$$

definirt werden. Dies Letzte ergiebt sich sofort, wenn man die Determinanten (7^b) in die Form (13^a) von F einträgt.

Die drei Functionen Ψ, Φ, F unterscheiden sich von ψ_ν, φ_ν, $f_{\nu+1}$ nur durch constante Factoren, so dass man

$$\begin{aligned} \psi_\lambda C_{n_\lambda} &= \omega_\lambda \Psi, & \varphi_\lambda C_{n_\lambda} &= \omega_\lambda \Phi, & f_{\lambda+1} C_{n_\lambda} &= \omega_\lambda F, \\ \psi_{\lambda+1} C_{n_{\lambda+1}} &= \omega_{\lambda+1} \Psi', & \varphi_{\lambda+1} C_{n_{\lambda+1}} &= \omega_{\lambda+1} \Phi', & f_{\lambda+2} C_{n_{\lambda+1}} &= \omega_{\lambda+1} F' \end{aligned}$$

setzen kann, wobei $\Psi', \cdots$ die entsprechend für $\nu = n_{\lambda+1}$ gebildeten Functionen sind. Man hat demnach

$$f_{\lambda+1}\psi_{\lambda+1} C_{n_\lambda} C_{n_{\lambda+1}} = \omega_\lambda \omega_{\lambda+1} F \Psi'.$$

Nach § 66 ist der höchste Coefficient von $f_{\lambda+1}\psi_{\lambda+1}$ gleich demjenigen von f, also gleich a_0, und danach erhält man aus der letzten Gleichung durch Gleichsetzung der höchsten Coefficienten rechts und links unter Berücksichtigung von (14) und (9)

$$a_0 C_{n_\lambda} C_{n_{\lambda+1}} = \omega_\lambda \omega_{\lambda+1} a_0 \gamma_{n_\lambda+n_{\lambda+1}-1} C_{n_{\lambda+1}}$$

und

$$\omega_\lambda \omega_{\lambda+1} = \frac{C_{n_\lambda}}{\gamma_{n_\lambda+n_{\lambda+1}-1}}$$

$$(15)\qquad = \frac{|\, c_{g+h} \,|}{|\, c_{i+k} \,|} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 0, 1, \cdots n_\lambda - 1 \\ i = 0, 1, \cdots n_\lambda - 1, n_{\lambda+1} - 1 \\ k = 0, 1, \cdots n_\lambda \end{pmatrix}.$$

Nimmt man hierzu den aus $\psi_1 C_{n_1} = \omega_1 \Psi$ zu erschliessenden Werth von ω_1, dann lassen sich durch (15) die ω der Reihe nach bestimmen. Aus $\psi_1 C_{n_1} = \omega_1 \Psi$ geht zunächst hervor, dass ω_1 gleich dem höchsten Coefficienten von ψ_1 d. h. nach § 62, (5) gleich dem von g_1 und also bei

$$(5)\qquad f_1(z) = b_0 z^{n-n_1} + b_1 z^{n-n_1-1} + \cdots + b_{n-n_1}$$

gleich $(a_0 : b_0)$ ist. Damit haben wir die geforderte Bestimmung durch

$$\omega_1 = \frac{a_0}{b_0}$$

vollendet.

§ 79. Nach den abgeleiteten Resultaten erscheint es wünschenswerth, zunächst die expliciten Ausdrücke der c_x durch die a_x und die b_x, und dann die expliciten Ausdrücke der Ψ, Φ, F gleichfalls durch die a_x und die b_x herzustellen. Wir setzen zu dem Zwecke vorübergehend

$$(c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + \cdots)(a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n) = \beta_0 z^{n-1} + \beta_1 z^{n-2} + \cdots \beta_{n-1},$$

so dass zwischen den β und den Coefficienten b von f_1 die Beziehungen bestehen, dass

$$b_0 = \beta_{n_1-1},\ b_1 = \beta_{n_1},\ \cdots\ b_{n-n_1} = \beta_{n-1}$$

wird, während man gleichzeitig

$$\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 0,\ \cdots\ \beta_{n_1-2} = 0$$

hat. Vermöge der Definition der β folgt

$$a_0 c_\lambda + a_1 c_{\lambda-1} + \cdots + a_\lambda c_0 = \beta_\lambda = b_{\lambda+1-n_1} \tag{16}$$

$(a_\lambda = 0$ für $\lambda > n$; $b_\mu = 0$ für $\mu < 0$ und $\mu > n - n_1)$.

Die leicht zu berechnenden Anfangswerthe für die β_x geben

$$a_0 c_0 = \beta_0,\quad a_0^2 c_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{vmatrix},\quad a_0^3 c_2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 & a_2 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix};$$

man erkennt durch strenge Induction, wenn man die Determinante nach den Elementen der letzten Spalte entwickelt,

$$a_0^{\nu+1} c_\nu = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_\nu \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_\nu \end{vmatrix} \tag{17}$$

und daraus, indem man von den β zu den b zurückgeht,

$$a_0^{\nu-n_1+2} c_\nu = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{\nu+1-n_1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{\nu-n_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{\nu+1-n_1} \end{vmatrix}. \tag{17a}$$

Hiermit wäre der ersten Forderung genügt. — Um die Determinanten für Ψ, Φ, F umzuwandeln, verfahren wir folgendermassen: Aus (9a) erhält man unter Berücksichtigung von (16)

$$(-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} a_0^{2\nu} \Psi = \begin{vmatrix} c_\nu & c_{\nu+1} & \cdots & c_{2\nu-1} & z^\nu \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ c_0 & c_1 & \cdots & c_{\nu-1} & 1 \end{vmatrix} a_0^{2\nu}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{\nu-1} & c_\nu & \cdots & c_{2\nu-1} & z^\nu \\ 0 & c_0 & c_1 & \cdots & c_{\nu-2} & c_{\nu-1} & \cdots & c_{2\nu-2} & z^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_0 & \cdots & c_{\nu-1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2\nu-1} & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{2\nu-1} & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-2} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_\nu & 0 \\ \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{2\nu-1} & z^\nu \\ 0 & \beta_0 & \beta_1 & \cdots & \beta_{2\nu-2} & z^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \beta_{\nu-1} & 1 \end{vmatrix} \quad = a_0^{n_1-1} \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-n_1} & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2\nu-n_1-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu & 0 \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2\nu-n_1} & z^\nu \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2\nu-n_1-1} & z^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu-n_1} & 1 \end{vmatrix}$$

und gelangt daher zu

$$(18)\quad (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} a_0^{2\nu-n_1+1} \Psi = \left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-n_1} & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2\nu-n_1-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu & 0 \end{vmatrix}\right\} (\nu+1-n_1 \text{ Zeilen})$$

$$\left.\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{2\nu-n_1} & z^\nu \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2\nu-n_2-1} & z^{\nu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu-n_1} & 1 \end{vmatrix}\right\} (\nu+1 \text{ Zeilen});$$

ebenso ergiebt sich

$$(19)\quad (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} a_0^{2\nu-n_1+1} \Phi = \left.\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-n_1} & z^{\nu-n_1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2\nu-n_1-1} & z^{\nu-n_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu & 1 \end{vmatrix}\right\} (\nu+1-n_1 \text{ Zeilen})$$

$$\left.\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & \cdots & b_{2\nu-n_1} & 0 \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2\nu-n_1-1} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu-n_1} & 0 \end{vmatrix}\right\} (\nu+1 \text{ Zeilen}).$$

Durch Combination von (18) und (19) erhalten wir nach (2)

$$(20)\quad (-1)^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} a_0^{2\nu-n_1+1} F = \left|\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-n_1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2\nu-n_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2\nu-n_1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2\nu-n_1-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu-n_1} \end{array}\right| \begin{array}{l} z^{\nu-n_1}\cdot f \\ z^{\nu-n_1-1}\cdot f \\ \cdot \\ 1\cdot f \\ z^{\nu}\cdot f_1 \\ z^{\nu-1}\cdot f_1 \\ \cdot \\ 1\cdot f_1 \end{array} \begin{array}{l} \Big\} (\nu+1-n_1 \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ \\ \Big\} (\nu+1 \text{ Zeilen}), \end{array}$$

und aus (18), da der Coefficient von z^ν in Ψ wegen (9) gleich C_ν ist,

$$(21)\quad (-1)^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} a_0^{2\nu-n_1} C_\nu = \left|\begin{array}{llll} a_0 & a_1 & \cdots & a_{2\nu-n_1-1} \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{2\nu-n_1-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_\nu \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{2\nu-n_1-1} \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{2\nu-n_1-2} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_{\nu-n_1} \end{array}\right| \begin{array}{l} \Big\} (\nu-n_1 \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ \\ \Big\} (\nu \text{ Zeilen}). \end{array}$$

In den Formeln der beiden letzten Seiten ist jedes a, dessen Index grösser wird als n und jedes b, dessen Index grösser wird als $(n-n_1)$, durch Null zu ersetzen.

Achte Vorlesung.

Recurrirende Reihen.

§ 80. Für die in der vorigen Vorlesung behandelte Reihe

$$(1)\qquad c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots + c_\lambda z^{-\lambda-1} + \cdots$$

haben wir in § 76, (7^a) abbrechende Recursionsformeln zwischen den Coefficienten und in § 79, (16) eine bis ins Unendliche hin gültige Recursionsformel

$$(2)\qquad a_0 c_{n+\varkappa} + a_1 c_{n+\varkappa-1} + \cdots + a_n c_\varkappa = 0 \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \cdots)$$

kennen gelernt. Besteht für eine Reihe von der Form (1) eine solche Formel (2), so wird diese unendliche Reihe als eine recurrirende Reihe bezeichnet. Wir wollen diese Art von unendlichen Reihen jetzt betrachten und zunächst voraussetzen, dass wir nur solche Werthe für die Variable z annehmen, für welche die Reihen convergiren;

über den Bereich der Convergenz werden wir bald ins Klare kommen. Wir hätten, wie bisher, so auch hier nur endliche Reihen nebst ihrem Restgliede zu untersuchen brauchen, allein die Bequemlichkeit der Darstellung ist für die unendlich ausgedehnten Reihen grösser.

Es sei also die unendliche Reihe, welche nach absteigenden Potenzen von z fortschreitet,

$$(3)\quad \omega(z) = d_{-k}z^k + d_{-k+1}z^{k-1} + \cdots + d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_\alpha z^{-\alpha} + \cdots$$

so beschaffen, dass für jedes α, welches grösser als die feste Zahl m ist, die lineare homogene Gleichung

$$(4)\quad d_\alpha q_0 + d_{\alpha-1}q_1 + d_{\alpha-2}q_2 + \cdots + d_{\alpha-n}q_n = 0 \qquad (q_0, \cdots q_n \neq 0)$$

zwischen den $(n+1)$ auf einander folgenden Coefficienten d_α, $d_{\alpha-1}$, $\cdots$ $d_{\alpha-n}$ gilt, in welcher die q constante Werthe besitzen. Für $\alpha = m$ soll die Gleichung noch nicht gelten. Unter diesen Voraussetzungen heisst die Reihe (3) eine recurrirende Reihe n^{ter} Ordnung.

Wenn wir nun $\omega(z)$ mit der ganzen Function n^{ten} Grades

$$(5)\qquad h(z) = q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_{n-1}z^1 + q_n$$

multipliciren, so ergiebt sich das Product

$$\omega(z)\cdot h(z) = \sum_{\alpha=-k,\,-k+1,\cdots} (d_\alpha q_0 + d_{\alpha-1}q_1 + \cdots + d_{\alpha-n}q_n) z^{n-\alpha},$$

worin alle d, deren Index negativ und kleiner als $(-k)$ ist, gleich Null gesetzt werden müssen. Infolge unserer Voraussetzung über die Gültigkeit von (4) wird diese Summe mit dem Gliede z^{n-m} abbrechen; wir können setzen:

$$(6)\quad \omega(z).h(z) = c_0 \cdot z^{n+k} + c_1 z^{n+k-1} + \cdots + c_{k+m}z^{n-m}$$
$$= z^{n-m}(c_0 z^{m+k} + c_1 z^{m+k-1} + \cdots + c_{m+k}) = z^{n-m}g(z)$$

und erhalten also

$$(7)\qquad \omega(z) = \frac{z^{n-m}g(z)}{h(z)} \quad \text{oder} \quad = \frac{g(z)}{z^{m-n}h(z)},$$

d. h. jede recurrirende Reihe n^{ter} Ordnung stimmt mit der Entwickelung eines rationalen Bruches nach fallenden Potenzen der Variablen überein. Dabei ist der Nenner (bis auf eine bei $n < m$ auftretende Potenz z^{m-n}) eine ganze Function n^{ten} Grades, die für $z = 0$ nicht verschwindet.

§ 81. Wird umgekehrt eine ganz allgemeine, rationale Function von z

$$\frac{g_1(z)}{z^r \cdot h(z)} \qquad (h(0) \neq 0;\ r \geq 0)$$

nach fallenden Potenzen der Variablen in eine Reihe entwickelt

$$= \delta_{-k} \cdot z^k + \delta_{-k+1} \cdot z^{k-1} + \cdots + \delta_0 + \delta_1 \cdot z^{-1} + \delta_2 \cdot z^{-2} + \cdots,$$

und nehmen wir an, $h(z)$ besitze die Form (5) und $g_1(z)$ sei vom Grade t, so muss das Product

$$(\delta_{-k} z^k + \cdots + \delta_0 + \delta_1 z^{-1} + \cdots) z^r \cdot (q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_{n-1} z + q_n)$$

eine ganze Function vom Grade t werden, und also erstens $k + r + n = t$ und zweitens

$$\delta_\alpha q_0 + \delta_{\alpha-1} q_1 + \delta_{\alpha-2} q_2 + \cdots + \delta_{\alpha-n} q_n = 0$$

für alle Werthe

$$\alpha = n + r + 1, \quad n + r + 2, \quad n + r + 3, \quad \cdots$$

sein. Entwickelt man also eine gebrochene rationale Function, deren Nenner bis auf eine Potenz z^r gleich einer für $z = 0$ nicht verschwindenden Function n^{ten} Grades ist, nach abnehmenden Potenzen der Variablen, so entsteht eine recurrirende Reihe n^{ter} Ordnung.

§ 82. Die Existenz einer Recursionsformel (4) schliesst die von anderen Recursionsformeln für dieselbe Reihe (3) nicht aus. In der That, da ja mit

$$\omega(z) = \frac{g(z)}{h(z)} \quad \text{auch} \quad \omega(z) = \frac{g(z)\,\Theta(z)}{h(z)\,\Theta(z)}$$

ist, wobei wir unter $\Theta(z)$ eine beliebige ganze Function irgend welchen Grades

$$\Theta(z) = z^\lambda (p_0 z^\nu + \cdots + p_\nu) \qquad (p_\nu \neq 0)$$

verstehen, so gelten neben (4) auch Recursionsformeln $(\nu + n)^{\text{ter}}$ Ordnung von der Gestalt

$$d_\alpha \cdot (p_0 q_0) + d_{\alpha-1}(p_0 q_1 + p_1 q_0) + \cdots + d_{\alpha-n-\nu+1}(p_{\nu-1} q_n + p_\nu q_{n-1}) + d_{\alpha-n-\nu} \cdot (p_\nu q_n) = 0.$$

Ist (4) die Recursionsformel niedrigster Ordnung für (3), so kann der Bruch, dessen Entwickelung (3) liefert,

$$\omega(z) = \frac{g(z)}{h(z)}, \tag{7}$$

abgesehen von Potenzen z^r der Variablen, nicht gehoben werden. Denn nach den eben auseinandergesetzten Eigenschaften recurrirender Reihen würde dem gekürzten Bruche eine Recursionsformel von noch niederer Ordnung zukommen.

§ 83. Damit die erste der Formeln (4), nämlich die für $\alpha = (m + 1)$, also

$$d_{m+1} q_0 + d_m q_1 + \cdots + d_{m+1-n} q_n = 0$$

auch die Anfangsglieder der Reihe (3) also jedenfalls d_{-k} umfasse,

muss $(m+1-n) \leqq -k$, $(m+k) \leqq (n-1)$, und also, wie man aus (6) ersieht, der Zähler des zu entwickelnden Bruches, abgesehen von einer Potenz z^r, von geringerem Grade als der Nenner sein, und das reicht auch dafür aus. Bei der Entwickelung eines Bruches, bei dem der Grad des Nenners um eins grösser ist, als der des Zählers,

$$(8)\quad \frac{e_0 z^{n-1} + e_1 z^{n-2} + \cdots + e_{n-1}}{q_0 z^n + q_1 z^{n-1} + \cdots + q_n} = d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3} + \cdots$$

gilt demnach die Reihe der Gleichungen

$$\begin{aligned} &d_{n+1}q_0 + d_n q_1 \quad + d_{n-1}q_2 + \cdots + d_1 q_n = 0,\\ &d_{n+2}q_0 + d_{n+1}q_1 + d_n q_2 \quad + \cdots + d_2 q_n = 0,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

beliebig weit, und folglich werden aus der Determinantenreihe

$$(9)\qquad |\, d_1 \,|, \quad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_2 & d_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_2 & d_3 & d_4 \\ d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix}, \cdots$$

alle auf

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \cdots & d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_n & d_{n+1} & \cdots & d_{2n-1} \end{vmatrix}$$

folgenden verschwinden. Denn es sind ja alle

$$|\, d_\alpha \; d_{\alpha+1} \cdots d_{\alpha+n-1} \,| \qquad (\alpha = h_1, h_2, \cdots h_n)$$

mit beliebigen $h_1, h_2, \cdots$ gleich Null, und daraus folgt die Richtigkeit der Behauptung. Dieser Satz bleibt auch dann bestehen, wenn einige der ersten e etwa $e_0, e_1, \cdots e_r$ verschwinden.

Wenn umgekehrt bei der Entwickelung

$$\omega(z) = d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3} + \cdots$$

von den Determinanten der Reihe (9) alle auf

$$D_m = |\, d_h \; d_{h+1} \cdots d_{h+m-1} \,| \qquad (h = 1, 2, \cdots m)$$

folgenden gleich Null werden, während D_m selbst noch nicht gleich Null ist, dann ist die Reihe recurrirend von der m^{ten} Ordnung und gleich einer gebrochenen Function, deren Nenner vom Grade m ist, und die sich nicht weiter heben lässt. Denn in der That folgt aus

$$\begin{vmatrix} d_1 & \cdots & d_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_m & \cdots & d_{2m-1} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & d_{m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m+1} & \cdots & d_{2m+1} \end{vmatrix} = 0,$$

dass das Gleichungssystem

$$d_h x_m + d_{h+1} x_{m-1} + \cdots + d_{h+m} x_0 = 0 \qquad (h = 1, 2, \cdots m+1)$$

von gemeinsamen Factoren aller x abgesehen ein einziges Lösungssystem

$$x_m : x_{m-1} : \cdots : x_0 = q_m : q_{m-1} : \cdots : q_0 \qquad (q_0 \neq 0)$$

besitzt, so dass also

$$\begin{aligned} d_{m+1}q_0 + d_m q_1 + \cdots + d_1 q_m &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ d_{2m+1}q_0 + d_{2m}q_1 + \cdots + d_{m+1}q_m &= 0 \end{aligned}$$

wird. Aus dem Verschwinden der nächsten Determinante in (9) folgt dann, wenn man

$$d_{2m+2}q_0 + d_{2m+1}q_1 + \cdots + d_{m+2}q_m = \delta_{2m+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

setzt, genau wie im § 76, dass

$$q_0^2 \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & d_{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_{m+2} & \cdots & d_{2m+3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & \cdots & d_m & d_{m+1} & d_{m+2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d_m & \cdots & d_{2m-1} & d_{2m} & d_{2m+1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \delta_{2m+2} \\ 0 & \cdots & 0 & \delta_{2m+2} & \delta_{2m+3} \end{vmatrix} = -\delta_{2m+2}^2 D_m$$

und also auch δ_{2m+2} verschwindet, u. s. w. Die Recursionsformel gilt demnach ganz allgemein, und folglich nach § 80 die Darstellung von $\omega(z)$ als gebrochene Function. Wir können somit den Satz aussprechen: Wenn in der Entwickelung von (8) für die Coefficienten von $\omega(z)$ alle auf

$$\begin{vmatrix} d_1 & \cdots & d_m \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ d_m & \cdots & d_{2m-1} \end{vmatrix} = D_m \qquad (m < n)$$

folgenden Determinanten der Reihe (9) verschwinden, während D_m von Null verschieden ist, dann haben Zähler und Nenner von (8) einen Factor vom Grade $(n-m)$ gemeinsam, aber keinen von höherem Grade.

§ 84. Dies Resultat können wir auf unsere in § 74 aufgestellte Reihe $C_1, C_2, C_3, \cdots$ d. h.

$$|c_0|, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix}, \cdots$$

anwenden. Da hier

$$\frac{f_1(z)}{f(z)} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots,$$

wobei der Nenner vom Grade n und der Zähler vom Grade $n - n_1 < n$ ist, so muss in der Reihe der Determinanten jedenfalls

(11) $$C_{n+1} = 0, \quad C_{n+2} = 0, \quad C_{n+3} = 0, \cdots$$

sein, wie aus § 81 folgt. Die charakteristischen Bedingungen dafür, dass $f(z)$ und $f_1(z)$ als grössten gemeinsamen Theiler eine Function ν^{ten} Grades besitzen, sind

$$C_{n+1-\nu} = 0, \quad C_{n+2-\nu} = 0, \quad \cdots \quad C_n = 0.$$

§ 85. Die einfachste recurrirende Reihe entsteht bei der Entwickelung von $\frac{1}{a_0 z + a_1}$. Diese heisst die geometrische Reihe; sie hat die Form

$$\frac{1}{a_0 z + a_1} = \frac{1}{a_0} z^{-1} - \frac{a_1}{a_0^2} z^{-2} + \frac{a_1^2}{a_0^3} z^{-3} - \frac{a_1^3}{a_0^4} z^{-4} + \cdots$$

und convergirt für alle Werthe von z, für welche man hat

$$|z| > \left|\frac{a_1}{a_0}\right|$$

d. h. für alle Werthe von z, deren absoluter Betrag grösser ist als derjenige der Wurzel von

$$a_0 z + a_1 = 0.$$

Hieraus folgt, wenn man unseren Bruch in die m^{te} Potenz erhebt und dann mit einer ganzen Function multiplicirt, dass auch die Entwickelungen der Brüche

$$\frac{1}{(a_0 z + a_1)^m}; \quad \frac{\varphi(z)}{(a_0 z + a_1)^m}$$

nach abnehmenden Potenzen von z für denselben Werthbereich convergiren, wenn m eine beliebige ganze, positive Zahl bedeutet. Setzen wir nun allgemein

$$g(z) = e_0 z^{n-1} + e_1 z^{n-2} + \cdots + e_{n-1},$$
$$h(z) = (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_\nu)^{m_\nu},$$
$$\left(\sum m_\alpha = n\right)$$

und nach § 71, (16)

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \sum \frac{\varphi_\alpha(z)}{(z - z_\alpha)^{m_\alpha}} \qquad [\varphi_\alpha] < m_\alpha,$$

dann können wir aus den eben erhaltenen Resultaten schliessen, dass die Entwickelung nach abnehmenden Potenzen von z für alle Werthe z convergirt, deren absoluter Betrag die absoluten Beträge aller Wurzeln von $h(z) = 0$ übertrifft.

§ 86. Ist, nach fallenden Potenzen von z entwickelt,

$$\frac{g(z)}{h(z)} = d_{-k}z^k + d_{-k+1}z^{k-1} + \cdots + d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \cdots + d_\alpha z^{-\alpha} + \cdots,$$

$$\frac{\gamma(z)}{\eta(z)} = \delta_{-l}z^l + \delta_{-l+1}z^{l-1} + \cdots + \delta_0 + \delta_1 z^{-1} + \delta_2 z^{-2} + \cdots + \delta_\alpha z^{-\alpha} + \cdots,$$

$$\frac{g(z)\eta(z) + \gamma(z)h(z)}{h(z)\eta(z)} = D_{-m}z^m + \cdots + D_0 + D_1 z^{-1} + \cdots + D_\alpha z^{-\alpha} + \cdots,$$

$$(D_\alpha = d_\alpha + \delta_\alpha),$$

wobei g und h, γ und η keinen gemeinsamen Theiler haben sollen, dann bilden die Coefficienten

d_α	eine	recurrirende	Reihe	$[h]^{\text{ter}}$	Ordnung,
δ_α	„	„	„	$[\eta]^{\text{ter}}$	„
$D_\alpha = d_\alpha + \delta_\alpha$	„	„	„	$[h] + [\eta]^{\text{ter}}$	„

Addirt man die entsprechenden Glieder d_α und δ_α (oder auch allgemeiner d_α und $\delta_{\alpha+k}$ bei festem Index k) zweier recurrirender Reihen, so bilden die entstehenden Summen eine neue recurrirende Reihe, deren Ordnung im Allgemeinen gleich der Summe der Ordnungen der beiden ersten ist.

Wenn umgekehrt eine recurrirende Reihe

$$D_{-m}z^m + D_{-m+1}z^{m-1} + \cdots + D_0 + D_1 z^{-1} + \cdots + D_\alpha z^{-\alpha} + \cdots$$

der Entwickelung einer Function entstammt, deren Nenner das Product zweier rationalen Functionen $h(z)$ und $\eta(z)$ ist, die zu einander theilerfremd ist, dann kann die recurrirende Reihe als Summe zweier anderen aufgefasst werden, deren Recursionsgesetze von $h(z)$ bez. von $\eta(z)$ abhängen.

§ 87. Wir wollen jetzt, im Anschlusse an die Formel (4), nach der Darstellung der d_α durch $d_1, \cdots d_n$ fragen. Der bequemeren Bezeichnung halber schreiben wir aber in dieser Recursionsformel $q_0 = -1$ und nehmen also

$$(4^a)\quad d_\alpha = d_{\alpha-1}q_1 + d_{\alpha-2}q_2 + \cdots + d_{\alpha-n}q_n \qquad (\alpha = n,\ n+1,\ \cdots).$$

Hieraus erhält man der Reihe nach die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
d_n &= d_{n-1}q_1 + d_{n-2}q_2 + \cdots + d_0 q_n,\\
(12)\quad d_{n+1} &= d_{n-1}(q_1^2 + q_2) + d_{n-2}(q_1 q_2 + q_3) + \cdots + d_1(q_1 q_{n-1} + q_n) + d_0 q_1 q_n,\\
d_{n+2} &= d_{n-1}(q_1^3 + 2q_1 q_2 + q_3) + d_{n-2}(q_1^2 q_2 + q_1 q_3 + q_2^2 + q_4) + \cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und kann allgemein bezeichnen

$$(13)\qquad d_k = d_{n-1}Q_k^{(n-1)} + d_{n-2}Q_k^{(n-2)} + \cdots + d_0 Q_k^{(0)}.$$

Die zu lösende Aufgabe besteht in der Berechnung der Grössen $Q_k^{(h)}$.

Setzt man in der ersten Gleichung von (12) $d_h = 1$ und alle anderen $d_0, d_1, \cdots d_{n-1}$ gleich 0, so erhält man $d_n = q_{n-h} = Q_n^{(h)}$; dann folgt bei derselben Annahme über die Anfangsglieder aus der zweiten Gleichung von (12) $d_{n+1} = q_1 q_{n-h} + q_{n-h+1} = Q_{n+1}^{(h)}$, aus der dritten $d_{n+2} = Q_{n+2}^{(h)}$, u. s. w. Die Grössen $Q_n^{(h)}$, $Q_{n+1}^{(h)}$, $\cdots$ sind also auch der Formelreihe (4^a) unterworfen. Soeben sahen wir dabei, dass zuerst für die Anfangsglieder die Gleichungsreihe

$$
\begin{aligned}
Q_n^{(h)} &= q_{n-h}, \\
Q_{n+1}^{(h)} &= q_1 Q_n^{(h)} + q_{n+1-h}, \\
Q_{n+2}^{(h)} &= q_1 Q_{n+1}^{(h)} + q_2 Q_n^{(h)} + q_{n+2-h}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Q_{n+h}^{(h)} &= q_1 Q_{n+h-1}^{(h)} + q_2 Q_{n+h-2}^{(h)} + \cdots + q_h Q_n^{(h)} + q_n,
\end{aligned} \tag{14}
$$

und von nun ab die Formel (4^a) in der Gestalt

$$
Q_{n+k}^{(h)} = q_1 Q_{n+k-1}^{(h)} + q_2 Q_{n+k-2}^{(h)} + \cdots + q_k Q_n^{(h)} \qquad (k > h) \tag{15}
$$

gilt, wobei jetzt alle q_k, deren Index λ grösser als n ist, gleich Null gesetzt werden müssen.

Um die $Q_k^{(h)}$ zu bestimmen, setzen wir die Borchardt'sche erzeugende Function an:

$$
f(u) = Q_n^{(h)} + Q_{n+1}^{(h)} u + Q_{n+2}^{(h)} u^2 + \cdots;
$$

dann folgt unter Benutzung der eben aufgestellten Recursionsformeln (14) und (15)

$$
\begin{aligned}
f(u)(1 - q_1 u - q_2 u^2 - \cdots - q_n u^n) &= Q_n^{(h)} + (Q_{n+1}^{(h)} - q_1 Q_n^{(h)}) u \\
&\quad + (Q_{n+2}^{(h)} - q_1 Q_{n+1}^{(h)} - q_2 Q_n^{(h)}) u^2 + \cdots \\
&\quad + (Q_{n+h}^{(h)} - q_1 Q_{n+h-1}^{(h)} - \cdots - q_h Q_n^{(h)}) u^h \\
&= q_{n-h} + q_{n+1-h} u + q_{n+2-h} u^2 + \cdots + q_n u^h
\end{aligned}
$$

und also die Darstellung

$$
f(u) = \frac{q_{n-h} + q_{n+1-h} u + q_{n+2-h} u^2 + \cdots + q_n u^h}{1 - q_1 u - q_2 u^2 - \cdots - q_n u^n}.
$$

Hieraus erkennt man ähnlich wie oben, vgl. auch § 89, dass die bisherige formale Ableitung auch für einen gewissen Werthebereich des u wirklich convergirt.

Es kommt noch darauf an, die jetzt gefundene Form für $f(u)$ in eine nach wachsenden Potenzen von u fortschreitende Reihe zu entwickeln. Der Coefficient von u^k in dieser Reihe liefert dann die Grösse $Q_{n+k}^{(h)}$.

Da aber nach dem polynomischen Lehrsatze

$$\frac{1}{1 - q_1 u - q_2 u^2 - \cdots - q_n u^n}$$

$$= 1 + \sum \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \cdots p_n!} q_1^{p_1} q_2^{p_2} \cdots q_n^{p_n} u^{p_1 + 2p_2 + \cdots + n p_n}$$

ist, wobei die Summe über Null und alle positiven Werthe von p_1, p_2, $\cdots$ erstreckt werden muss, für welche $p_1 + p_2 + \cdots + p_n > 0$ ist, so gewinnt man das Resultat

(16) $Q_{n+k}^{(h)} = q_{n-h} \sum(k) + q_{n+1-h} \sum(k-1) + \cdots + q_n \sum(k-h)$.

Dabei bedeutet $\sum(0) = 1$, und $\sum(k)$ wird für jedes positive ganze k durch

(17) $\sum(k) = \sum \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)!}{p_1!\, p_2! \cdots p_n!} q_1^{p_1} q_2^{p_2} \cdots q_n^{p_n}$, $(p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = k)$

definirt. Die Formel (16) gestaltet sich im Falle $h = 0$ besonders einfach, nämlich

(18) $$Q_{n+k}^{(0)} = q_n \sum(k).$$

§ 88. Geht man bei der Iterirung von $d_n = d_{n-1} q_1 + \cdots$ aus, so erhält man

(19) $$d_{k+1} = Q_{k+1}^{(n-1)} d_{n-1} + Q_{k+1}^{(n-2)} d_{n-2} + \cdots;$$

wählt man dagegen $d_{n+1} = d_n q_1 + d_{n-1} q_2 + \cdots$ zum Ausgangspunkte, so findet man

$$\begin{aligned} d_{k+1} &= Q_k^{(n-1)} \cdot d_n + Q_k^{(n-2)} \cdot d_{n-1} + \cdots + Q_k^{(0)} \cdot d_1 \\ (20) \quad &= Q_k^{(n-1)}(q_1 d_{n-1} + q_2 d_{n-2} + \cdots + q_n d_0) + Q_k^{(n-2)} \cdot d_{n-1} + \cdots + Q_k^{(0)} \cdot d_1 \\ &= (Q_k^{(n-1)} \cdot q_1 + Q_k^{(n-2)}) d_{n-1} + (Q_k^{(n-1)} \cdot q_2 + Q_k^{(n-3)}) d_{n-2} + \cdots \end{aligned}$$

und die Vergleichung der beiden Ausdrücke (19) und (20) liefert uns dann

$$\begin{gathered} Q_{k+1}^{(n-1)} = Q_k^{(n-1)} \cdot q_1 + Q_k^{(n-2)}, \quad Q_{k+1}^{(n-2)} = Q_k^{(n-1)} \cdot q_2 + Q_k^{(n-3)}, \quad \cdots \\ (21) \qquad Q_{k+1}^{(0)} = Q_k^{(n-1)} \cdot q_n. \end{gathered}$$

Das letzte Resultat giebt durch Zusammenstellung mit (18)

(22) $$Q_{n+k}^{(n-1)} = \sum(k+1),$$

und daher ist, wenn man in (16) für h den Werth $(n-1)$ setzt,

(23) $\sum(k+1) = q_1 \sum(k) + q_2 \sum(k-1) + \cdots + q_n \sum(k-n+1)$.

Aus (21) entnehmen wir ferner der Reihe nach die Werthe für die Q mit abnehmenden oberen Indices, indem wir dabei (22) als Ausgangsformel benutzen,

$$Q_{n+k}^{(n-2)} = \sum(k+2) - q_1 \sum(k+1),$$

(24) $$Q_{n+k}^{(n-3)} = \sum(k+3) - q_1 \sum(k+2) - q_2 \sum(k+1),$$

. . . . . .

Die letzten Formeln liefern für die Berechnung der $Q_k^{(h)}$ mit hohem oberen Index bequemere Methoden als die Formeln (16).

Aus (23) kann man noch den Determinantensatz

$$\begin{vmatrix} \sum(k) & \sum(k-1) & \cdots & \sum(k-n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum(k-n) & \sum(k-n-1) & \cdots & \sum(k-2n) \end{vmatrix} = 0 \qquad (k \geqq 2n)$$

ablesen. (23) zeigt offenbar, dass auch die durch (17) definirten $\sum(k)$ einer recurrirenden Reihe angehören.

Die hier soeben behandelte Aufgabe ist uns in anderer Form schon früher begegnet. Aus dem Umstande, dass x_1 eine Wurzel der Gleichung

$$x^n - c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

ist, folgt nach einander

$$x_1^n = c_1 x_1^{n-1} - c_2 x_1^{n-2} + c_3 x_1^{n-3} - \cdots \mp c_n,$$

$$x_1^{n+1} = (c_1^2 - c_2) x_1^{n-1} - (c_1 c_2 - c_3) x_1^{n-2} + (c_1 c_3 - c_4) x_1^{n-3} - \cdots,$$

$$x_1^{n+2} = (c_1^3 - 2c_1 c_2 + c_3) x_1^{n-1} - (c_1^2 c_2 - c_1 c_3 - c_2^2 + c_4) x_1^{n-2} + \cdots,$$

und die Coefficienten der Potenzen x_1^{n-1}, x_1^{n-2}, $\cdots$ auf der rechten Seite folgen einem ähnlichen Bildungsgesetze wie die Coefficienten in (13). Die Aenderung, der wir die aus den q gebildeten Coefficienten unterwerfen müssen, um auf die aus den c gebildeten zu kommen, beruht nur darin, dass alle Glieder, deren Factorenzahl gerade ist, das entgegengesetzte Vorzeichen von denjenigen erhalten, deren Factorenanzahl ungerade ist. (Vgl. § 101.)

§ 89. Setzen wir in den Betrachtungen der Paragraphen 80—86 ζ für s^{-1} ein, so lassen sich alle unsere Resultate sofort auf Reihen ausdehnen, die statt nach fallenden nach steigenden Potenzen von ζ fortschreiten. Die Werthe, für welche hier Convergenz eintritt, sind die, deren absoluter Betrag kleiner ist, als die absoluten Beträge sämmtlicher Wurzelpunkte des Nenners; kommen negative Potenzen von ζ in endlicher Anzahl vor, so muss man natürlich von dem Werthe $\zeta = 0$ Abstand nehmen.

Die Betrachtungen des Paragraphen 87 haben übrigens bereits auf derartige Reihen geführt, als es sich um die Aufstellung der erzeugenden Function $f(u)$ handelte. Vgl. auch die Anmerkung auf S. 2.

Neunte Vorlesung.

Die symmetrischen Functionen.

§ 90. Bedeuten $z_1, z_2, \cdots z_n$ willkürliche Grössen, und setzen wir

$$(1)\quad (z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_n) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n,$$

dann charakterisiren sich die z_λ als Wurzeln und die c_λ als Coefficienten der Gleichung

$$(2)\qquad f(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0.$$

Durch die Gleichsetzung der Potenzen von z mit gleichen Exponenten links und rechts in der Gleichung (1) ergiebt sich

$$(3)\quad \begin{aligned} z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} + z_n &= c_1, \\ z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n &= c_2, \\ z_1 z_2 z_3 + \cdots + z_{n-2} z_{n-1} z_n &= c_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ z_1 z_2 z_3 \cdots z_n &= c_n, \end{aligned}$$

und dadurch wird der Zusammenhang zwischen den Coefficienten und den Wurzeln jeder algebraischen Gleichung (2) vermittelt, bei der die höchste Potenz des Gleichungspolynoms 1 als Coefficienten hat. Wäre das nicht der Fall, und hiesse das erste Glied $c_0 z^n$, so müssten die rechten Seiten in (3) noch sämmtlich durch c_0 dividirt werden.

Eine wichtige Eigenschaft der Functionen auf den linken Seiten in (3) beruht darin, dass sie sich nicht ändern, wenn man die $z_1, \cdots z_n$ beliebig ihre Plätze tauschen lässt, oder mit anderen Worten, wenn man an Stelle der Indices $1, 2, \cdots n$ eine beliebige Permutation derselben hinschreibt. Nennen wir den Uebergang von einer solchen Anordnung der $z_1, z_2, \cdots z_n$ zu irgend einer anderen eine Substitution, und eine Function der $z_1, z_2, \cdots z_n$, welche bei jeder Substitution ihrer Form nach ungeändert bleibt, eine symmetrische Function, so haben wir in den linken Seiten von (3) symmetrische Functionen. Ihrer besonderen Einfachheit halber sollen sie als elementare symmetrische Functionen bezeichnet werden.

Aus dem Begriffe der symmetrischen Functionen folgt, dass, wenn der Complex

$$a\, z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_n^\delta$$

eines ihrer Glieder bildet, auch jeder andere Complex zu ihren Gliedern gehört, welcher aus dem aufgeschriebenen durch Substitutionen der unteren Indices unter einander entsteht. Diese Gesammtheit wollen wir durch

(4) $$a S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_n^\delta)$$

bezeichnen. Man sieht, dass jede ganze, symmetrische Function in eine Anzahl derartiger eintypiger S zerfällt; durch jeden Ausdruck (4) ist ein besonderer Typus von symmetrischen Functionen charakterisirt.

Die linken Seiten von (3) werden nach dieser Bezeichnung

$$S(z_1), \quad S(z_1 z_2), \quad S(z_1 z_2 z_3), \quad \cdots S(z_1 z_2 \cdots z_n);$$

natürlich können sie aber auch

$$S(z_\alpha), \quad S(z_\alpha z_\beta), \quad S(z_\alpha z_\beta z_\gamma), \quad \cdots$$

geschrieben werden.

§ 91. Die Summen gleich hoher Potenzen der z geben gleichfalls besonders einfache symmetrische Functionen. Wir wollen sie Potenzsummen nennen und bezeichnen

$$S(z_1^\lambda) = s_\lambda \qquad (s_0 = n).$$

Es ist jedes s_λ als ganze, ganzzahlige Function der $c_1, \cdots c_n$ darstellbar. Zum Beweise betrachten wir zuerst den Ausdruck

$$z_x^\alpha - c_1 z_x^{\alpha-1} + c_2 z_x^{\alpha-2} - \cdots \pm c_\alpha \qquad (\alpha \leqq n).$$

Wir wollen für den Augenblick die ganze Function

(2a) $$\frac{f(z)}{z - z_x} = z^{n-1} - c_1^{(x)} z^{n-2} + c_2^{(x)} z^{n-3} - \cdots \pm c_{n-1}^{(x)}$$

setzen. Dann ist, wie man sofort erkennt,

$$\begin{aligned} c_1 &= z_x + c_1^{(x)}, \\ c_2 &= z_x c_1^{(x)} + c_2^{(x)}, \\ c_3 &= z_x c_2^{(x)} + c_3^{(x)}, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} z_x^\alpha - c_1 z_x^{\alpha-1} + c_2 z_x^{\alpha-2} - \cdots \pm c_\alpha &= z_x^\alpha - (z_x + c_1^{(x)}) z_x^{\alpha-1} + (z_x c_1^{(x)} + c_2^{(x)}) z_x^{\alpha-2} - \cdots \\ &= \pm c_\alpha^{(x)}, \end{aligned}$$

und summirt man über $x = 1, 2, \cdots n$, so entsteht die Formel

$$s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - \cdots \pm c_\alpha s_0 = \pm \sum_{x=1}^{n} c_\alpha^{(x)}.$$

Aus (2a) ersehen wir, dass die $c_1^{(x)}, c_2^{(x)}, \cdots$ die elementaren, symmetrischen Functionen von $z_1, \cdots z_{x-1}, z_{x+1}, \cdots z_n$ sind. Daher kommt jedes Glied auf der rechten Seite der letzten Gleichung auch als Glied von c_α vor, und umgekehrt jedes Glied von c_α in $(n - \alpha)$ der Grössen $c_{\alpha'}^{(x)}$; also ist die Summe rechts $= (n - \alpha) c_\alpha$, und wir haben die Recursionsformel

(5) $$s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - \cdots \pm \alpha c_\alpha = 0 \qquad (\alpha \leqq n).$$

Ferner folgt aus (1) durch Multiplication mit $z^{\alpha-n}$ für jedes z_k

$$z_k^\alpha - c_1 z_k^{\alpha-1} + c_2 z_k^{\alpha-2} - \cdots \pm c_n z_k^{\alpha-n} = 0 \qquad (\alpha \geqq n)$$

und durch Summation nach k die weitere Recursionsformel

$$(6) \qquad s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - \cdots \pm c_n s_{\alpha-n} = 0 \qquad (\alpha \geqq n).$$

Die Formeln (5) und (6) beweisen den obigen Satz, da sie der Reihe nach $s_1, s_2, \cdots$ aus $s_0 = n$ berechnen lehren. Sie wurden zuerst von Newton aufgestellt und heissen nach ihm*).

Wir wollen sie auf eine andere Art nochmals ableiten. Früher, § 36, (4a) hatten wir

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z - z_1} + \frac{1}{z - z_2} + \cdots + \frac{1}{z - z_n}$$

und folgern daraus die Entwickelung nach fallenden Potenzen von z

$$= \frac{1}{z}\left[\left(1 + \frac{z_1}{z} + \frac{z_1^2}{z^2} + \cdots\right) + \left(1 + \frac{z_2}{z} + \frac{z_2^2}{z^2} + \cdots\right) + \cdots\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[s_0 + \frac{s_1}{z} + \frac{s_2}{z^2} + \cdots + \frac{s_m}{z^m} + R_m\right],$$

wobei das Restglied

$$R_m = \frac{z_1^m}{z^{m-1}(z - z_1)} + \frac{z_2^m}{z^{m-1}(z - z_2)} + \cdots$$

wird. Weiter ersehen wir hierdurch

$$nz^{n-1} - (n-1)c_1 z^{n-2} + (n-2)c_2 z^{n-3} - \cdots$$

$$= (z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots)\left(\frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \cdots + \frac{R_m}{z}\right);$$

multiplicirt man rechts aus und vergleicht die Coefficienten entsprechender Potenzen von z, wobei zu beachten ist, dass links keine negativen Exponenten vorkommen, dann erhält man wieder die beiden Reihen Newton'scher Formeln.

§ 92. Formeln von der Art (5) oder (6), mittels deren ein jedes s_α durch frühere $s_{\alpha-1}, \cdots$ berechnet wird, geben recurrirende Darstellungen. Ihnen gegenüber steht die independente Darstellung der s_α direct durch die c. Eine solche wollen wir jetzt ableiten.

In (1) setzen wir $\frac{1}{z}$ an die Stelle von z und multipliciren beide Seiten mit z^n; so entsteht

$$1 - c_1 z + c_2 z^2 - c_3 z^3 + \cdots \pm c_n z^n = (1 - z_1 z)(1 - z_2 z) \cdots (1 - z_n z);$$

wir nehmen hiervon die Ableitung und dividiren sie durch die Function

*) Newton: Arithmetica universalis p. 192, ed. Lugd.

selbst, dann ergiebt sich nach Aenderung der Vorzeichen

$$\frac{c_1 - 2c_2 z + 3c_3 z^2 - \cdots \mp n c_n z^{n-1}}{1 - c_1 z + c_2 z^2 - \cdots \pm c_n z^n} = \frac{z_1}{1 - z_1 z} + \frac{z_2}{1 - z_2 z} + \cdots + \frac{z_n}{1 - z_n z}.$$

Jetzt wollen wir beide Seiten nach steigenden Potenzen von z entwickeln, bis zu einem Gliede mit beliebig hohem Exponenten gehen und das Restglied hinzufügen, um aller Convergenzbetrachtungen überhoben zu sein. Die rechte Seite liefert dabei

$$s_1 + s_2 z + s_3 z^2 + \cdots + s_\mu z^{\mu-1} + \cdots;$$

die linke mit Hülfe des polynomischen Lehrsatzes

$$(c_1 - 2c_2 z + 3c_3 z^2 - \cdots \mp n c_n z^{n-1}) \left(1 + \sum_{k=1,\cdots} [c_1 z - c_2 z^2 + c_3 z^3 - \cdots]^k\right)$$

$$= (c_1 - 2c_2 z + \cdots)\left(1 + \sum_{k=1,\cdots} \sum_{\lambda_1+\lambda_2+\cdots=k} \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4\cdots} k!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \cdots}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!} z^{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots}\right)$$

$$= (c_1 - 2c_2 z + \cdots) \sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!} z^{\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n},$$

wobei die letzte Summe auf alle Zahlencombinationen von $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ der Reihe 0, 1, 2, $\cdots$ zu erstrecken ist. Nehmen wir aus diesem Producte nun alle Glieder heraus, die $z^{\mu-1}$ als zugehörige Potenz von z haben, so ist der Coefficient von $z^{\mu-1}$ gleich s_μ. Diese Glieder setzen sich aus den folgenden zusammen:

$$\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\lambda_2+\cdots)!\, c_1^{\lambda_1+1} c_2^{\lambda_2} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu-1)$$

$$2\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+1+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\lambda_2+\cdots)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2+1} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu-2)$$

$$3\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\lambda_2+\cdots)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} c_3^{\lambda_3+1} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu-3)$$

. . . . . .

Führt man in der ersten Sorte von Gliedern $\lambda_1 + 1$ statt λ_1 als Summationsbuchstaben ein, in der zweiten $\lambda_2 + 1$ statt λ_2, in der dritten $\lambda_3 + 1$ statt λ_3 u. s. w., dann erhält man für dieselben Glieder die neuen Formen

$$\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \cdots c_n^{\lambda_n}}{(\lambda_1-1)!\,\lambda_2! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu)$$

$$2\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,(\lambda_2-1)! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu)$$

$$3\sum \frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots} (\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!\, c_1^{\lambda_1} c_2^{\lambda_2} \cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\,(\lambda_3-1)! \cdots \lambda_n!}, \qquad (\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu)$$

. . . . . .

und daher wird ihre Gesammtsumme

$$(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3+\cdots)\sum\frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!\,c_1^{\lambda_1}\cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}$$
$$=\mu\cdot\sum\frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!\,c_1^{\lambda_1}\cdots c_n^{\lambda_n}}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}.$$

Unser Schlussresultat giebt somit die Waring'sche Formel*)

$$(7)\quad s_\mu=\mu\cdot\sum\frac{(-1)^{\lambda_2+\lambda_4+\cdots}(\lambda_1+\cdots+\lambda_n-1)!}{\lambda_1!\,\lambda_2!\cdots\lambda_n!}c_1^{\lambda_1}\cdots c_n^{\lambda_n}\quad(\lambda_1+2\lambda_2+\cdots+n\lambda_n=\mu).$$

Beispielsweise sei $n=3$, $\mu=4$. Dann hat man die vier Möglichkeiten für die Wahl der λ

$$\begin{aligned}&\lambda_1=4;\\&\lambda_1=2,\quad\lambda_2=1;\\&\lambda_1=1,\quad\lambda_3=1;\\&\lambda_2=2,\end{aligned}\qquad(\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=4),$$

so dass

$$s_4=4\left(\frac{3!}{4!}c_1^4-\frac{2!}{2!\,1!}c_1^2c_2+\frac{1!}{1!\,1!}c_1c_3+\frac{1!}{2!}c_2^2\right)$$
$$=c_1^4-4c_1^2c_2+4c_1c_3+2c_2^2.$$

§ 93. Uebrigens kann man die $s_1, s_2, \cdots s_\mu, \cdots$ auch leicht vermittels der Newton'schen Gleichungen durch die $c_1, c_2, \cdots c_n$ in Form einer Determinante ausdrücken. Denn aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}&s_\alpha-c_1s_{\alpha-1}+c_2s_{\alpha-2}-\cdots+(-1)^{\alpha+1}c_{\alpha-1}s_1=(-1)^{\alpha+1}\alpha c_\alpha,\\&-s_{\alpha-1}+c_1s_{\alpha-2}-\cdots+(-1)^{\alpha+1}c_{\alpha-2}s_1=(-1)^{\alpha+1}(\alpha-1)c_{\alpha-1},\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&(-1)^{\alpha+1}s_1=(-1)^{\alpha+1}1\cdot c_1\end{aligned}$$

folgt sofort

$$(8)\quad s_\alpha=(-1)^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}}\begin{vmatrix}\alpha c_\alpha & c_{\alpha-1} & c_{\alpha-2} & \cdots & c_1\\(\alpha-1)c_{\alpha-1} & c_{\alpha-2} & c_{\alpha-3} & \cdots & 1\\\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\1\cdot c_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\end{vmatrix}.$$

Diese Formel gilt nicht nur für $\alpha\leqq n$, sondern auch, falls nur $c_{n+x}=0$ gesetzt wird, für alle $\alpha>n$.

§ 94. Auf demselben Wege kann man umgekehrt c_α durch die s ausdrücken. Das ergiebt die nicht mehr ganzzahlige Darstellung von c_α

*) Waring: Meditationes algebraicae; edit. 3; Cambr. 1770; p. 1.

$$(9)\qquad \alpha!\, c_\alpha = (-1)^{\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}} \begin{vmatrix} s_\alpha & s_{\alpha-1} & \cdots & s_2 & s_1 \\ s_{\alpha-1} & s_{\alpha-2} & \cdots & s_1 & (\alpha-1) \\ s_{\alpha-2} & s_{\alpha-3} & \cdots & (\alpha-2) & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_2 & s_1 & \cdots & 0 & 0 \\ s_1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dies gilt für jedes α, wenn $c_{n+\varkappa} = 0$ gesetzt wird.

Zu einer, der Waring'schen entsprechenden Darstellung von c_μ durch die $s_1, s_2, \cdots$ kann man unter Benutzung der Exponentialfunction auf folgendem Wege gelangen. Wir hatten gefunden

$$1 - c_1 z + c_2 z^2 - c_3 z^3 + \cdots \pm c_n z^n = (1 - z_1 z)(1 - z_2 z)\cdots(1 - z_n z);$$

die rechte Seite wandelt sich um in

$$= e^{\sum \log(1 - z_\alpha z)} = e^{-\sum\left(s_\alpha z + \frac{s_\alpha^2 z^2}{2} + \frac{s_\alpha^3 z^3}{3} + \cdots\right)} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots n)$$

$$= e^{-s_1 z} e^{-\frac{s_2 z^2}{2}} e^{-\frac{s_3 z^3}{3}} \cdots$$

$$= \sum_{\varkappa_1=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa_1} \frac{(s_1 z)^{\varkappa_1}}{\varkappa_1!} \sum_{\varkappa_2=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa_2} \frac{(s_2 z^2)^{\varkappa_2}}{\varkappa_2!\, 2^{\varkappa_2}} \sum_{\varkappa_3=0}^{\infty} (-1)^{\varkappa_3} \frac{(s_3 z^3)^{\varkappa_3}}{\varkappa_3!\, 3^{\varkappa_3}} \cdots$$

$$= \sum \frac{(-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\tau}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_\tau!} \binom{s_1}{1}^{\varkappa_1} \binom{s_2}{2}^{\varkappa_2} \cdots \binom{s_\tau}{\tau}^{\varkappa_\tau} z^{\varkappa_1+2\varkappa_2+\cdots+\tau\varkappa_\tau},$$

wobei die Summe über eine beliebige Anzahl τ der $\varkappa$ und über alle Werthe jedes $\varkappa_\alpha$ von 0 bis ∞ zu erstrecken ist. Vergleicht man die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z, so folgt

$$(10)\qquad (-1)^\mu c_\mu = \sum_{(\varkappa)} \frac{(-1)^{\varkappa_1+\varkappa_2+\cdots+\varkappa_\tau}}{\varkappa_1!\,\varkappa_2!\cdots\varkappa_\tau!} \begin{bmatrix} s_1 \\ 1 \end{bmatrix}^{\varkappa_1} \begin{bmatrix} s_2 \\ 2 \end{bmatrix}^{\varkappa_2} \cdots \begin{bmatrix} s_\tau \\ \tau \end{bmatrix}^{\varkappa_\tau}$$

$$(\varkappa_1 + 2\varkappa_2 + 3\varkappa_3 + \cdots + \tau\varkappa_\tau = \mu).$$

Wird μ grösser als n gewählt, so ist der Werth der rechten Seite $= 0$.

Wir wollen hier noch die Werthe der s_α durch die c_α und die Werthe der c_α durch die s_α ausgedrückt für die niedrigsten Werthe von α notiren; sie sind den abgeleiteten allgemeinen Formeln entnommen. Es ist

$$\begin{aligned} s_1 &= c_1, \\ s_2 &= c_1^2 - 2c_2, \\ s_3 &= c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3, \\ s_4 &= c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4, \\ s_5 &= c_1^5 - 5c_1^3c_2 + 5c_1^2c_3 + 5c_1c_2^2 - 5c_1c_4 - 5c_2c_3 + 5c_5, \\ &\cdots\cdots\cdots

und umgekehrt

$$1!\,c_1 = s_1,$$
$$2!\,c_2 = s_1^2 - s_2,$$
$$3!\,c_3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 2s_3,$$
$$4!\,c_4 = s_1^4 - 6s_1^2 s_2 + 8s_1 s_3 + 3s_2^2 - 6s_4,$$
$$5!\,c_5 = s_1^5 - 10s_1^2 s_2 + 20s_1^2 s_3 + 15s_1 s_2^2 - 30s_1 s_4 - 20s_2 s_3 + 24s_5.$$

§ 95. Wir wollen weiter noch erwähnen, dass eine grosse Formelfülle für die Beziehungen der c und der s untereinander abgeleitet werden kann. Wenn man beispielsweise in (6) die Gleichung für $(\alpha + n)$ mit 1, die für $(\alpha + n - 1)$ mit c_1, die für $(\alpha + n - 2)$ mit c_2, $\cdots$, die für α mit c_n multiplicirt und alle Producte addirt, dann erhält man eine Reihe von Beziehungen

$$(11)\quad s_{\alpha+n} + s_{\alpha+n-2}(2c_2 - c_1^2) + s_{\alpha+n-4}(2c_4 - 2c_1 c_3 + c_2^2) + \cdots = 0,$$

so dass Recursionsformeln entstehen, durch die $s_{\alpha+n}$ von den vorhergehenden $s_{\alpha+n-2}$, $s_{\alpha+n-4}$, $\cdots$ abhängig erscheint.

Wie aus (6) die Formel

$$(6^a)\quad \begin{vmatrix} s_\alpha & s_{\alpha-1} & \cdots & s_{\alpha-n} \\ s_{\alpha+1} & s_\alpha & \cdots & s_{\alpha-n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{\alpha+n} & s_{\alpha+n-1} & \cdots & s_\alpha \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha \geqq n),$$

so folgt aus (11) die ähnlich gebildete

$$(11^a)\quad \begin{vmatrix} s_\alpha & s_{\alpha-2} & \cdots & s_{\alpha-2n} \\ s_{\alpha+1} & s_{\alpha-1} & \cdots & s_{\alpha-2n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{\alpha+n} & s_{\alpha+n-2} & \cdots & s_{\alpha-n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha \geqq 2n).$$

Die Existenz dieser Formel ergiebt sich übrigens leicht aus der Bemerkung, dass s_2, s_4, s_6, $\cdots$ die Summen der ersten, zweiten, dritten, $\cdots$ Potenzen der Wurzeln der Gleichung

$$(\zeta - z_1^2)(\zeta - z_2^2)\cdots(\zeta - z_n^2) = 0$$

sind. Daraus erkennt man dann auch die Bedeutung der Coefficienten in (11).

In ähnlicher Weise kann man weitergehen. Setzen wir

$$(1^a)\quad \begin{aligned}&(\zeta - z_1^3)(\zeta - z_2^3)\cdots(\zeta - z_n^3) \\ &\quad = \zeta^n - C_1^{(3)}\zeta^{n-1} + C_2^{(3)}\zeta^{n-2} - \cdots \pm C_n^{(3)} = 0,\end{aligned}$$

so werden die Potenzsummen dieser Gleichung durch s_3, s_6, s_9, $\cdots$ entsprechend der Formel (6) gegeben, und man erhält

$$s_\alpha - C_1^{(3)} s_{\alpha-3} + C_2^{(3)} s_{\alpha-6} - \cdots \pm C_n^{(3)} s_{\alpha-3n} = 0 \qquad (\alpha \geq 3n)$$

nicht nur für alle durch 3 theilbaren, sondern für alle ganzen α, wie

man erkennt, wenn man in (1^a) für ξ einsetzt $z_\lambda^3 p$, dann mit 1 oder z_λ oder z_λ^2 multiplicirt und endlich über alle $\lambda = 1, 2, \cdots n$ summirt. Es gilt demnach auch

$$\begin{vmatrix} s_\alpha & s_{\alpha-3} & \cdots & s_{\alpha-3n} \\ s_{\alpha+1} & s_{\alpha-2} & \cdots & s_{\alpha-3n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ s_{\alpha+n} & s_{\alpha+n-3} & \cdots & s_{\alpha-2n} \end{vmatrix} = 0 \qquad (\alpha \geqq 3n).$$

Diese Formelreihe lässt sich natürlich fortsetzen, doch wollen wir hier auf weitere Einzelheiten nicht eingehen.

§ 96. In § 91 hatten wir die Aufgabe gelöst, die Potenzsummen s_λ durch die elementaren, symmetrischen Functionen darzustellen. Gelänge es nun jetzt, jede ganze, symmetrische Function der $z_1, z_2, \cdots z_n$ als ganze, ganzzahlige Function der $s_1, s_2, \cdots$ auszudrücken, dann hätten wir damit gezeigt: Jede ganze, ganzzahlige, symmetrische Function von n Elementen $z_1, z_2, \cdots z_n$ ist eine ganze, ganzzahlige Function der elementaren, symmetrischen Functionen $c_1, c_2, \cdots c_n$ dieser n Grössen z.

Wir brauchen nach § 90, (4) den Beweis nur für Functionen von der Form

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa z_{k+1}^\lambda)$$

zu führen, und können, da er für $S(z_1^\alpha)$, d. h. für die s_α bereits erledigt ist, sogar voraussetzen, er sei schon für alle

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa)$$

bei k Elementen mit beliebigen Exponenten bereits geliefert. Durch den Schluss von k auf $(k+1)$ gewinnt man dann den Beweis für das allgemeine Theorem.

Wir betrachten das Ergebniss der Multiplication

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa) \cdot S(z_1^\lambda).$$

Jedes Glied dieses Products wird, je nachdem der Factor, welcher dem zweiten S entnommen ist, ein z enthält, welches in dem Factor vorkommt oder nicht vorkommt, der dem ersten S entstammt, zu einem $S(z_1^{\alpha+\lambda} z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa)$, $S(z_1^\alpha, z_2^{\beta+\lambda}, \cdots z_k^\varkappa)$, $\cdots$ oder zu $S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa z_{k+1}^\lambda)$ gehören. Dabei kann jedes Glied eines der ersten S nur einmal auftreten, gleichgültig, wie die Exponenten $\alpha, \beta, \cdots \lambda$ beschaffen sind; dagegen tritt ein jedes der Glieder des zweiten S genau $q$mal auf, wenn q der Exponenten $\alpha, \beta, \cdots \varkappa, \lambda$ gleich λ sind. Also ist

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa z_{k+1}^\lambda)$$
$$= \frac{1}{q}\left(S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa)\, S(z_1^\lambda) - S(z_1^{\alpha+\lambda} z_2^\beta \cdots z_k^\varkappa) - S(z_1^\alpha z_2^{\beta+\lambda} \cdots z_k^\varkappa) - \cdots\right),$$

und damit ist der allgemeine Satz bis auf den einen Punkt bewiesen, dass die Darstellung auch ganzzahlig sei.

In der That findet man z. B.

$$S(z_1^\alpha z_1^\beta) = s_\alpha s_\beta - s_{\alpha+\beta}; \quad S(z_1^\alpha z_2^\alpha) = \frac{1}{2}(s_\alpha^2 - s_{2\alpha});$$

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta z_3^\gamma) = s_\alpha s_\beta s_\gamma - (s_{\alpha+\beta}s_\gamma + s_{\beta+\gamma}s_\alpha + s_{\gamma+\alpha}s_\beta) + 2s_{\alpha+\beta+\gamma};$$

$$S(z_1^\alpha z_2^\alpha z_3^\beta) = \frac{1}{2}(s_\alpha^2 s_\beta - 2s_\alpha s_{\alpha+\beta} - s_{2\alpha}s_\beta + 2s_{2\alpha+\beta});$$

$$S(z_1^\alpha z_2^\alpha z_3^\alpha) = \frac{1}{6}(s_\alpha^3 - 3s_\alpha s_{2\alpha} + 2s_{3\alpha});$$

$$(\alpha \neq \beta \neq \gamma).$$

Hier ist nun ersichtlich, dass bei der Darstellung der ganzen, ganzzahligen, symmetrischen Functionen durch die Potenzsummen der Elemente gebrochene Coefficienten auftreten; und es ist nicht ohne Weiteres klar, dass beim Uebergange zu den elementaren, symmetrischen Functionen diese Brüche wegfallen. Wir wollen deswegen die eben besprochene Methode nur als eine bequeme, für die Darstellung der symmetrischen Functionen geeignete betrachten und den Beweis des ausgesprochenen Satzes zunächst so vortragen, wie ihn Gauss (Werke III, S. 36—38) gegeben hat.

§ 97. Zunächst werden wir von zwei Aggregaten der Form

$$z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n} \quad \text{und} \quad z_1^{\mu_1} z_2^{\mu_2} \cdots z_n^{\mu_n}$$

dem ersten oder dem zweiten eine höhere Ordnung beilegen, je nachdem unter den Differenzen

$$m_1 - \mu_1, \; m_2 - \mu_2, \; \cdots \; m_n - \mu_n$$

die erste nicht verschwindende einen positiven oder einen negativen Werth besitzt.

Weiter bemerken wir, dass es unter den Aggregaten, die von gleicher Dimension $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ mit $z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n}$ sind, nur eine begrenzte Anzahl von niederer Ordnung giebt, als das hingeschriebene; denn es giebt ja überhaupt nur eine endliche Anzahl solcher Aggregate bei vorgeschriebener Dimension.

Liegt ferner eine symmetrische, ganze, homogene Function $F(z_1, z_2, \cdots z_n)$ vor, dann kann eines ihrer Glieder

$$\alpha \cdot z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n}$$

nur dann die höchste Ordnung unter allen Gliedern von F besitzen, wenn

$$m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \cdots \geqq m_n$$

ist; denn wäre etwa $m_2 > m_1$, so käme bei der Symmetrie der Function auch $\alpha \cdot z_1^{m_2} z_2^{m_1} \cdots m_n^{m_n}$ vor, und diesem Gliede würde eine höhere Ordnung gebühren.

Da endlich in einem Producte von Functionen der $z_1, z_2, \cdots z_n$ dasjenige Glied die höchste Ordnung hat, welches durch Multiplication der Glieder höchster Ordnung der einzelnen Factoren gebildet ist, und da in den elementaren, symmetrischen Functionen der z, nämlich in

$$c_1, c_2, c_3, \cdots \text{ die Glieder } z_1, z_1z_2, z_1z_2z_3, \cdots$$

die höchsten Ordnungen aufweisen, so ist in

$$c_1^{\alpha_1}c_2^{\alpha_2}\cdots c_n^{\alpha_n} \text{ das Glied } z_1^{\alpha_1+\alpha_2\cdots+\alpha_n}z_2^{\alpha_2+\cdots+\alpha_n}\cdots z_n^{\alpha_n}$$

dasjenige höchster Ordnung, und umgekehrt ist es

$$z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdots z_n^{m_n} \text{ in } c_1^{m_1-m_2}c_2^{m_2-m_3}\cdots c_n^{m_n} \qquad (m_1 \geqq m_2 \geqq m_3 \geqq \cdots).$$

§ 98. Nun sei eine ganze, ganzzahlige, homogene, symmetrische Function $F(z_1, \cdots z_n)$ vorgelegt. Kommen in ihr mehrere Glieder gleich hoher Ordnung vor, so haben diese dieselben Exponenten und können daher von vorn herein in ein einziges Glied zusammengezogen werden. Es sei $\alpha z_1^{m_1}z_2^{m_2}\cdots z_n^{m_n}$ dies Glied höchster Ordnung in F. Dann setzen wir

$$F_1(z_1, \cdots z_n) = F(z_1, \cdots z_n) - \alpha c_1^{m_1-m_2}\cdot c_2^{m_2-m_3}\cdots c_n^{m_n}.$$

F_1 ist wieder ganz, ganzzahlig, homogen und symmetrisch und besitzt als höchstes Glied ein der Ordnung nach niedrigeres, als F es hatte. Dies höchste Glied in F_1 sei $\beta z_1^{p_1}z_2^{p_2}\cdots z_n^{p_n}$. Dann setzen wir

$$F_2(z_1, \cdots z_n) = F_1(z_1, \cdots z_n) - \beta c_1^{p_1-p_2}c_2^{p_2-p_3}\cdots c_n^{p_n}.$$

Für F_2 gilt dasselbe; und so können wir mit steter Verminderung der Ordnung des höchsten Gliedes fortfahren. Dies muss einmal aufhören; d. h. es muss einmal

$$0 = F_l - \varrho c_1^{q_1-q_2}c_2^{q_2-q_3}\cdots c_n^{q_n}$$

werden. Dann folgt durch Addition aller dieser Gleichungen

$$F = \alpha c_1^{m_1-m_2}\cdots + \beta c_1^{p_1-p_2}\cdots + \cdots + \varrho c_1^{q_1-q_2}\cdots;$$

damit ist der Satz bewiesen, und zugleich eine zweite Methode der Ueberführung angegeben.

Als Beispiel behandeln wir bei n Variablen z die Function

$$F = S(z_1^2z_2^2z_3),$$

bei der dann zuerst

$$F_1 = F - c_2c_3$$

wird. Nun sieht man sofort, dass bei der Multiplication von c_2 und c_3 Glieder von drei Arten vorkommen: $z_1^2z_2^2z_3$, $z_1^2z_2z_3z_4$, $z_1z_2z_3z_4z_5$, und zwar kommt jedes der ersten Art einmal, jedes der zweiten Art dreimal und jedes der dritten Art zehnmal vor. Deshalb ist, da die Glieder erster Art das gesammte F bilden,

$$F_1 = -3S(z_1^2z_2z_3z_4) - 10S(z_1z_2z_3z_4z_5).$$

Weil jetzt $z_1^2 z_2 z_3 z_4$ das Glied höchster Ordnung in F_1 ist, so wird

$$F_2 = F_1 + 3c_1c_4.$$

Hier erkennt man wieder, dass die Multiplication

$$c_1c_4 = S(z_1^2 z_2 z_3 z_4) + 5S(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5)$$

ergiebt, so dass die neue Function

$$F_2 = 5S(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5) = 5c_5,$$

und endlich, da wir hiermit zum Abschluss gelangt sind, dass

$$S(z_1^2 z_2^2 z_3) = c_2c_3 - 3c_1c_4 + 5c_5$$

wird. Nach der Methode von § 96 fände man zuerst

$$S(z_1^2 z_2^2 z_3) = \frac{1}{2}(s_2^2 s_1 - 2s_2 s_3 - s_4 s_1 + 2s_5)$$

und müsste dann den Uebergang zu den c_λ machen.

§ 99. Man kann von vorn herein eine Anzahl von Gliedern $c_1^{q_1} c_2^{q_2} \cdots c_n^{q_n}$ angeben, welche bei der Darstellung der eintypigen, symmetrischen Function $S(z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n})$ nicht vorkommen können. Die m in S sollen ihrer absteigenden Grösse nach geordnet sein. Bei der Darstellung von S müssen alle Gliedercomplexe der c_λ von gleicher Dimension in den z_λ sein, wie S selbst. Dies erkennt man sofort, wenn man alle z einander gleichsetzt. Es muss also bei jedem Gliede erstens

$$q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n = m_1 + m_2 + \cdots + m_n \tag{12}$$

werden. Ferner liefert $c_1^{q_1} c_2^{q_2} \cdots c_n^{q_n}$ als Glied höchster Ordnung $z_1^{q_1+q_2+\cdots+q_n} z_2^{q_2+\cdots}$, und verschiedene Glieder in c_λ liefern verschiedene Ordnungen (§ 97). Es muss also zweitens

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_n \leqq m_1 \tag{13}$$

sein; dabei müssen wirklich Complexe der c auftreten, bei denen das Gleichheitszeichen gilt. Auch unter ihnen lassen sich noch Glieder aussondern, wie das Gauss'sche Verfahren (§ 98) zeigt. Man sieht nämlich, dass von

$$c_1^{q_1} c_2^{q_2} \cdots c_n^{q_n} \text{ und } c_1^{\varkappa_1} c_2^{\varkappa_2} \cdots c_n^{\varkappa_n}, \text{ falls } \sum q_\lambda = \sum \varkappa_\lambda \text{ ist,}$$

das erste oder das zweite Aggregat das Glied höchster Ordnung in den z liefert, je nachdem von den Differenzen

$$q_1 - \varkappa_1,\ (q_1 + q_2) - (\varkappa_1 + \varkappa_2),\ (q_1 + q_2 + q_3) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3), \cdots \tag{14}$$

die erste nicht verschwindende negativ oder positiv ist (vgl. § 97). Nach dem Gauss'schen Algorithmus kommt als höchstes Glied das Aggregat mit den Exponenten

$$q_1 = m_1 - m_2,\ q_2 = m_2 - m_3,\ \cdots\ q_n = m_n \tag{15}$$

vor, und alle anderen auftretenden Aggregate, bei denen die Summe der Exponenten $\varkappa$ auch gleich m_1 ist, dürfen nach unseren jetzigen Betrachtungen nur solche sein, für welche die erste nicht verschwindende Differenz der Reihe

$$(m_1 - m_2) - \varkappa_1,\ (m_1 - m_3) - (\varkappa_1 + \varkappa_2),\ (m_1 - m_4) - (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3)$$

negativ ist. Das ist eine dritte Bedingung.

So wäre für die beiden Functionen $S(z_1^2 z_2^2 z_3)$ und $S(z_1^2 z_2 z_3 z_4)$ zu setzen $(q_1 + 2q_2 + \cdots) = 5$, und es dürfen höchstens zwei Factoren c in jedem Gliede vorkommen; also geben (12) und (13)

$$S(z_1^2 z_2^2 z_3) = \alpha c_2 c_3 + \beta c_1 c_4 + \gamma c_5,\ S(z_1^2 z_2 z_3 z_4) = \alpha_1 c_2 c_3 + \beta_1 c_1 c_4 + \gamma_1 c_5.$$

Hier zeigt nun (14), (15), dass α_1 sofort $= 0$ zu setzen ist.

An die Formel (12) haben wir noch folgende Bemerkung zu knüpfen. Die Summe der Producte aus den Exponenten in die Indices eines Ausdrucks $c_1^{q_1} c_2^{q_2} \cdots c_n^{q_n}$, nämlich hier $(q_1 + 2q_2 + \cdots + nq_n)$, nennt man das Gewicht dieses Ausdruckes, und nach Cayley heisst eine Function, deren Glieder sämmtlich dasselbe Gewicht besitzen, eine isobarische Function. Wir sehen also: Die Function, durch welche eine eintypige, symmetrische Function $S(z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_n^{m_n})$ mittels der $c_1, c_2, \cdots c_n$ dargestellt wird, ist in den $c_1, c_2, \cdots c_n$ isobarisch und von dem Gewichte $(m_1 + m_2 + \cdots + m_n)$.

§ 100. Ist so der litterale Theil von $S(z_1^{m_1} \cdots z_n^{m_n})$ festgelegt oder wenigstens so eng als möglich umgrenzt, dann kann man den numerischen Theil leicht durch Zahlenbeispiele berechnen. In unseren beiden, eben aufgestellten Beispielen würde man folgendermassen verfahren, um die α, β, γ zu finden. Für die Specialwerthe

$z_1 = z_2 = z_3 = 1$; $z_4 = z_5 = \cdots = 0$ ist $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$, $\cdots$

$z_1 = \cdots = z_4 = 1$; $z_5 = z_6 = \cdots = 0$ $\quad c_1 = 4$, $c_2 = 6$, $c_3 = 4$, $c_4 = 1$, $c_5 = 0$, $\cdots$

$z_1 = \cdots = z_5 = 1$; $z_6 = z_7 = \cdots = 0$ $\quad c_1 = 5$, $c_2 = 10$, $c_3 = 10$, $c_4 = 5$, $c_5 = 1$, $\cdots$

und für diese drei Werthsysteme erhalten die symmetrischen Functionen

$$S(z_1^2 z_2^2 z_3) = \alpha c_2 c_3 + \beta c_1 c_4 + \gamma c_5 \text{ die Werthe } 3,\ 12,\ 30;$$
$$S(z_1^2 z_2 z_3 z_4) = \beta_1 c_1 c_4 + \gamma_1 c_5 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad 0,\ 4,\ 20.$$

Folglich bestehen die Gleichungssysteme für die Coefficienten

$$3 = 3 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma,$$
$$12 = 24 \cdot \alpha + 4 \cdot \beta + 0 \cdot \gamma, \qquad 4 = 4 \cdot \beta_1 + 0 \cdot \gamma_1,$$
$$30 = 100 \cdot \alpha + 25 \cdot \beta + 1 \cdot \gamma, \qquad 20 = 25 \cdot \beta_1 + 1 \cdot \gamma_1,$$

und hieraus ergeben sich als fertige Resultate

$$S(z_1^2 z_2^2 z_3) = c_2 c_3 - 3 c_1 c_4 + 5 c_5;$$
$$S(z_1^2 z_2 z_3 z_4) = c_1 c_4 - 5 c_5.$$

§ 101. Wir wollen für den besprochenen Satz aus § 96 noch einen anderen Beweis herleiten, der von Cauchy stammt, und den Kronecker zu weiteren Schlüssen benutzt hat.

Da

$$f(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n$$

für $z = z_1$ zu Null wird, so erhält man der Reihe nach die Resultate

$$\begin{aligned} z_1^n &= c_1 z_1^{n-1} - c_2 z_1^{n-2} + \cdots \mp c_n, \\ z_1^{n+1} &= c_1 z_1^n - c_2 z_1^{n-1} + \cdots \mp c_n z_1 \\ &= (c_1^2 - c_2) z^{n-1} - (c_1 c_2 - c_3) z_1^{n-2} + (c_1 c_3 - c_4) z_1^{n-3} - \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und man kann, vgl. § 88, jede höhere als die $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz von z_1 als ganze, ganzzahlige Function der c und als lineare Function von $z_1, z_1^2, \cdots z_1^{n-1}$ darstellen. Da ferner

$$\frac{f(z)}{z - z_1} = z^{n-1} - (c_1 - z_1) z^{n-2} + (c_2 - c_1 z_1 + z_1^2) z^{n-3} - \cdots$$

für $z = z_2$ zu Null wird, so folgt ebenso

$$\begin{aligned} z_2^{n-1} &= (c_1 - z_1) z_2^{n-2} - (c_2 - c_1 z_1 + z_1^2) z_2^{n-3} + \cdots, \\ z_2^n &= [(c_1 - z_1)^2 - (c_2 - c_1 z_1 + z_1^2)] z_2^{n-2} - \cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

und man kann also jede höhere als die $(n-2)^{\text{te}}$ Potenz von z_2 als ganze, ganzzahlige Function von den c, von z_1 und als lineare Function von $z_2, z_2^2, \cdots z_2^{n-2}$ darstellen. In gleicher Art folgt aus

$$\frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)} = z^{n-2} - (c_1 - z_1 - z_2) z^{n-3} + (c_2 - c_1[z_1 + z_2] + z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2) z^{n-4} - \cdots,$$

dass

$$\begin{aligned} z_3^{n-2} &= (c_1 - z_1 - z_2) z_3^{n-3} - \cdots, \\ z_3^{n-1} &= [(c_1 - z_1 - z_2)^2 - (c_2 - \cdots + z_2^2)] z_3^{n-3} - \cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

wird, u. s. f. Die Gleichung

$$z_n = c_1 - (z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1})$$

endlich, welche zeigt, dass jede Potenz von z_n als ganze, ganzzahlige Function von den c und von $z_1, \cdots z_{n-1}$ dargestellt werden kann, bildet den Abschluss dieser Serie.

§ 102. Ist nun irgend eine ganze, ganzzahlige Function

$$F(z_1, z_2, \cdots z_n)$$

gegeben, so können wir mit Hülfe der eben abgeleiteten Gleichungen zunächst jede vorkommende Potenz von z_n, dann alle Potenzen z_{n-1}^2,

$z_{n-1}^3, \cdots; z_{n-2}^3, z_{n-2}^4, \cdots; \cdots; z_2^{n-1}, z_2^n, \cdots; z_1^n, z_1^{n+1}, \cdots$ entfernen und damit F in die Form mit ganzzahligen Coefficienten

$$(16) \qquad F = \sum_{(i)} A_i z_1^{i_1} z_2^{i_2} \cdots z_{n-1}^{i_{n-1}} \qquad (i_\lambda = 0, 1, 2, \cdots n - \lambda)$$

überführen. Die Anzahl der hierbei möglichen Summanden beträgt $1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$; ihre Gesammtheit bildet insofern ein Fundamentalsystem für alle ganzen, ganzzahligen Functionen von $z_1, \cdots z_n$, als sich alle diese homogen, linear und mit ganzzahligen Coefficienten durch sie darstellen lassen.

Nehmen wir nun an, F wäre eine symmetrische Function der Elemente $z_1, \cdots z_n$, dann können wir (16) in zwei Theile zerlegen

$$M + N \cdot z_{n-1},$$

indem wir in M alle diejenigen Glieder zusammenfassen, welche frei von z_{n-1} sind, in $N \cdot z_{n-1}$ dagegen alle mit z_{n-1} multiplicirten; N ist gleichfalls von z_{n-1} frei, weil ja z_{n-1} nur in der ersten Potenz in (16) erscheint. Da F symmetrisch ist, ändert sich seine Form nicht, wenn man z_{n-1} und z_n unter einander vertauscht; es muss also, ohne Aenderung von M und N, welche ja weder z_{n-1} noch z_n enthalten,

$$M + N z_{n-1} = M + N z_n$$

sein; da aber z_{n-1} und z_n völlig willkürliche Grössen sind, so ist diese Gleichung nur für $N = 0$ möglich, d. h. F enthält z_{n-1} überhaupt nicht. Weiter ordnen wir $F = M$ nach z_{n-2} an, welches in (16) nur bis zur zweiten Potenz eingeht,

$$F = H + J z_{n-2} + K z_{n-2}^2;$$

und dies muss nach unseren eben gemachten Schlüssen auch mit

$$H + J z_{n-1} + K z_{n-1}^2$$

und mit

$$H + J z_n + K z_n^2$$

übereinstimmen, da F sich als symmetrische Function nicht ändert, wenn man z_{n-2} mit z_{n-1} oder mit z_n vertauscht, und da H, J, K von diesen drei Grössen unabhängig sind. Die Gleichung in ζ

$$F(z_1, \cdots z_n) = H + J\zeta + K\zeta^2$$

müsste also drei Wurzeln $\zeta = z_{n-2}, z_{n-1}, z_n$ besitzen; und dies ist nur möglich für die Annahme

$$J = 0, \quad K = 0, \quad F(z_1, \cdots z_n) = H,$$

d. h. wenn F von z_{n-2}, z_{n-1}, z_n unabhängig ist Auf diese Art kann man fortfahren und erkennt die Richtigkeit unseres Satzes. Zugleich giebt dieser eine neue Methode für die Umwandlung von F.

§ 103. Gauss hat seinem Beweise für das Theorem, dass jede ganze, symmetrische Function $S(z_1, \cdots z_n)$ von $z_1, z_2, \cdots z_n$ als ganze Function von $c_1, c_2, \cdots c_n$ darstellbar sei, noch die wichtige Bemerkung hinzugefügt, dass diese Darstellung nur auf eine einzige Art möglich ist. Wäre nämlich S auf wesentlich verschiedene Weisen darstellbar

$$S(z_1, \cdots z_n) = G_1(c_1, \cdots c_n) = G_2(c_1, \cdots c_n),$$

dann müsste die nicht identisch verschwindende Function

$$G_1(c_1, \cdots c_n) - G_2(c_1, \cdots c_n)$$

identisch verschwinden, sobald man für die $c_1, c_2, \cdots c_n$ ihre Ausdrücke in den $z_1, z_2, \cdots z_n$ einträgt. Wir können nun

$$G_1 - G_2 = \sum M c_1^{\alpha} c_2^{\beta} c_3^{\gamma} \cdots$$

setzen, wobei sich die Summe auf eine Anzahl solcher Glieder mit verschiedenen Exponentensystemen bezieht. Tragen wir die z ein, so folgt als Complex der Glieder höchster Ordnung aller Summanden

$$\sum M z_1^{\alpha+\beta+\gamma+\cdots} z_2^{\beta+\gamma+\cdots} z_3^{\gamma+\cdots} \cdots.$$

Dabei werden von den einzelnen Summanden nicht zwei derselben Ordnung angehören, wie oben § 97 gezeigt wurde; folglich wird das Glied der absolut höchsten Ordnung nicht verschwinden. Eine symmetrische, ganze Function lässt sich nur auf eine einzige Art als ganze Function der elementaren, symmetrischen Functionen der Elemente darstellen; gleichzeitig erhalten wir das Resultat: Bedeuten $z_1, z_2, \cdots z_n$ von einander algebraisch unabhängige, d. h. nicht durch eine algebraische Gleichung

$$H(z_1, z_2, \cdots z_n) = 0$$

mit einander verbundene Grössen, so sind auch ihre elementaren, symmetrischen Functionen von einander algebraisch unabhängig. Denn existirte eine algebraische Gleichung zwischen den $c_1, c_2, \cdots c_n$

$$K(c_1, c_2, \cdots c_n) = 0,$$

so wäre z. B. die Function $S(z_1)$ nicht nur $= c_1$ sondern auch $= c_1 + K$, was dem Gauss'schen Theoreme widerspräche.

§ 104. Ist eine gebrochene, rationale Function von n willkürlichen Grössen z

$$\frac{M(z_1, \cdots z_n)}{N(z_1, \cdots z_n)}$$

vorgelegt, die sich nicht durch Wegheben gemeinsamer Factoren vereinfachen lässt, und ist sie symmetrisch, d. h. ändert sie ihren Werth

für keine Umstellung der z untereinander, dann sind M und N für sich symmetrische Functionen. Ordnen wir in der Weise von § 102

$$\frac{M}{N} = \frac{P + Q \cdot z_{n-1}}{P_1 + Q_1 \cdot z_{n-1}},$$

wobei P, Q, P_1, Q_1 nur $z_1, z_2, \cdots z_{n-2}$ enthalten, dann ist auch

$$\frac{M}{N} = \frac{P + Q \cdot z_n}{P_1 + Q_1 \cdot z_n}$$

und deswegen hat die lineare Gleichung in ζ

$$\left(\frac{M}{N} Q_1 - Q\right) \zeta + \left(\frac{M}{N} P_1 - P\right) = 0$$

die beiden Wurzeln $\zeta = z_{n-1}$, $\zeta = z_n$. Daraus folgt das Verschwinden beider Coefficienten, d. h. es wird

$$\frac{M}{N} = \frac{Q}{Q_1} = \frac{P}{P_1},$$

wobei nicht gleichzeitig $P_1 = 0$, $Q_1 = 0$ sein kann, da ja offenbar N als nicht identisch verschwindend vorausgesetzt wird. P oder Q unterscheidet sich also von $M = P + Q z_{n-1}$ höchstens durch einen in z_{n-1} linearen Factor, der sich dann gegen den gleichen des Nenners wegheben lässt. Das war aber in der Voraussetzung ausgeschlossen; folglich muss

$$M = P, \quad N = P_1$$

sein, d. h. der Bruch ist in der Darstellung des Zählers und Nenners nach dem § 102 von z_{n-1}, z_n unabhängig.

Wir ordnen nun weiter Zähler und Nenner nach z_{n-2}

$$\frac{M}{N} = \frac{R + S \cdot z_{n-2} + T \cdot z_{n-2}^2}{R_1 + S_1 \cdot z_{n-2} + T_1 \cdot z_{n-2}^2},$$

erkennen auf demselben Wege, dass auch

$$\frac{M}{N} = \frac{R}{R_1} = \frac{S}{S_1} = \frac{T}{T_1}$$

sein muss, und da R_1, S_1, T_1 nicht gleichzeitig Null sind, dass sich M von einer der Functionen R, S, T höchstens durch einen in z_{n-2} quadratischen Factor unterscheidet, der sich dann gegen den gleichen im Nenner wegheben lässt. Da dies durch die Voraussetzung ausgeschlossen ist, so muss

$$M = R, \quad N = R_1$$

sein, d. h. der Bruch ist in der Darstellung nach § 102 von z_{n-2}, z_{n-1}, z_n unabhängig. Auf diesem Wege erkennen wir die Richtigkeit des Satzes.

§ 105. Es sei eine rationale Function der n unbestimmten Grössen z gegeben, $\varphi(z_1, z_2, \cdots z_n)$. Dann giebt es möglicher Weise Umstellungen der $z_1, z_2, \cdots z_n$, welche die Form von φ nicht ändern. Alle diese Umstellungen wollen wir in einen Complex U_1 vereinigen. Ferner giebt es möglicher Weise andere Umstellungen der z, welche eine neue Form $\varphi(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots z_{i_n}) = \varphi_i(z_1, z_2, \cdots z_n)$ hervorrufen. Alle Umstellungen, die den gleichen Effect haben d. h. dasselbe φ_i liefern, vereinigen wir in einen Complex U_i, u. s. f.

So gehören z. B. für

$$\varphi = z_1 z_2 - z_3 z_4$$

zu U_1 die vier Umstellungen, welche durch

$$\varphi(z_1, z_2, z_3, z_4),\ \varphi(z_1, z_2, z_4, z_3),\ \varphi(z_2, z_1, z_3, z_4),\ \varphi(z_2, z_1, z_4, z_3)$$

charakterisirt sind und nur sie; ferner wenn

$$\varphi_2 = z_3 z_4 - z_1 z_2$$

gesetzt wird, zu U_2 die Umstellungen, die durch

$$\varphi(z_3, z_4, z_1, z_2),\ \varphi(z_4, z_3, z_1, z_2),\ \varphi(z_3, z_4, z_2, z_1),\ \varphi(z_4, z_3, z_2, z_1)$$

gegeben werden, u. s. f.

Es ist die auf alle vorhandenen φ erstreckte Summe

$$\sum \varphi_\lambda(z_1, \cdots z_n) = \varphi(z_1, \cdots z_n) + \varphi_i(z_1, \cdots z_n) + \varphi_k(z_1, \cdots z_n) + \cdots$$

eine symmetrische Function der $z_1, z_2, \cdots z_n$. In der That, wenn wir irgend eine Umstellung auf ein Glied φ der Summe anwenden, dann geht es in ein anderes Glied derselben Summe über, und verschiedene Glieder verwandeln sich in verschiedene. Folglich bleibt Σ ungeändert.

Derselbe Beweis genügt für den allgemeinen Satz: Alle symmetrischen Functionen der Elemente

$$\varphi(z_1, \cdots z_n),\ \varphi_i(z_1, \cdots z_n),\ \varphi_k(z_1, \cdots z_n), \cdots$$

sind auch symmetrische Functionen der Elemente $z_1, z_2, \cdots z_n$.

§ 106. Zum Schlusse wollen wir noch ein Cauchy'sches Theorem beweisen: Ist $\varphi(z)$ eine ganze Function der einen Variablen z, dann wird

$$S(\varphi(z_1))$$

gleich dem Coefficienten von z^{-1} in der nach absteigenden Potenzen von z geordneten Entwickelung von

$$\frac{\varphi(z) f'(z)}{f(z)}.$$

Setzen wir

$$\varphi(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m,$$

so wird

$$\frac{\varphi(z)f'(z)}{f(z)} = (a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m)\left(\frac{s_0}{z} + \frac{s_1}{z^2} + \frac{s_2}{z^3} + \cdots\right)$$
$$= \cdots + z^{-1}(a_0 s_m + a_1 s_{m-1} + \cdots + a_m s_0) + \cdots,$$

und damit ist der Satz bewiesen.

Zehnte Vorlesung.

Transformation der Gleichungen vermittels der symmetrischen Functionen.

§ 107. Wir wollen in dieser Vorlesung folgendes Problem behandeln: Die Grössen $z_1, z_2, \cdots z_n$ seien willkürlich; aus ihnen ist die rationale Function $\varphi(z_1, z_2, \cdots z_n)$ gebildet. Vertauscht man die z auf alle möglichen Arten untereinander, so mögen ϱ verschiedene Werthe entstehen

(1) $$\varphi_i(z_1, z_2, \cdots z_n) = \varphi(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots z_{i_n}) \qquad (i = 1, 2, \cdots \varrho).$$

Es sollen die Coefficienten der Gleichung, der die Grössen (1) als Wurzeln angehören,

(2) $$\Phi^\varrho - C_1\Phi^{\varrho-1} + C_2\Phi^{\varrho-2} - \cdots \pm C_\varrho = 0$$

durch die Coefficienten der Gleichung mit den Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$, nämlich

(3) $$f(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

bestimmt werden.

Wir sahen im § 105, dass jede symmetrische Function der Grössen (1) eine symmetrische Function der $z_1, z_2, \cdots z_n$ sei. Diese kann gemäss unseren Untersuchungen in den vorigen Vorlesungen mittels der c ausgedrückt werden. Wir können also

$$\begin{aligned} S(\varphi_1) &= C_1, \\ S(\varphi_1\varphi_2) &= C_2, \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_\varrho &= C_\varrho \end{aligned}$$

berechnen, und dann wird

(2) $$\Phi^\varrho - C_1\Phi^{\varrho-1} + C_2\Phi^{\varrho-2} - \cdots \pm C_\varrho = 0$$

die Gleichung sein, deren Wurzeln die ϱ Werthe von φ

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots), \quad \varphi(z_{i_1}, z_{i_2}, \cdots), \quad \varphi(z_{k_1}, z_{k_2}, \cdots), \quad \cdots$$

sind.

Bezeichnet man nun $\varphi(z_1, \cdots z_n)$ als ϱ-werthige Function der $z_1, \cdots z_n$, wenn sie bei allen möglichen Umstellungen der z untereinander genau ϱ von einander verschiedene Werthe annimmt, so können wir das eben erlangte Resultat in die Form fassen: Eine ϱ-werthige, rationale Function von $z_1, \cdots z_n$ ist als Wurzel einer Gleichung ϱ^{ten} Grades darstellbar, deren Coefficienten einwerthige d. h. symmetrische Functionen von $z_1, \cdots z_n$ sind. Die übrigen Wurzeln dieser Gleichung sind die übrigen $(\varrho - 1)$ Werthe der Function. Diese ϱ Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_\varrho$ heissen einander conjugirte Werthe.

§ 108. Wir können die allgemeine Aufgabe des vorigen Paragraphen auf eine einfachere reduciren. Es sei die vorgelegte Function

$$\varphi(z_1, \cdots z_n) = \frac{g(z_1, \cdots z_n)}{h(z_1, \cdots z_n)}.$$

Dann kann man die symmetrische, ganze Function der z

$$h(z_1, \cdots z_n) \cdot h(z_{i_1}, \cdots z_{i_n}) \cdot h(z_{k_1}, \cdots z_{k_n}) \cdots$$

durch die $c_1, \cdots c_n$ ausdrücken, etwa als C. Nennt man ferner das Product der auf den ersten Factor folgenden h im letzten Producte $H(z_1, \cdots)$, dann wird der Quotient

$$\frac{1}{h(z_1, \cdots z_n)} = \frac{1}{C} H(z_1, \cdots z_n),$$

und

$$\varphi(z_1, \cdots z_n) = \frac{1}{C} g(z_1, \cdots z_n) H(z_1, \cdots z_n).$$

Daraus ergiebt sich: Jede rationale, gebrochene Function

$$\varphi(z_1, \cdots z_n) = \frac{g(z_1, \cdots z_n)}{h(z_1, \cdots z_n)}$$

der Wurzeln von (3) ist gleich einer ganzen, rationalen Function derselben Wurzeln mit Coefficienten, die in den $c_1, c_2, \cdots c_n$ gebrochen sind.

§ 109. Wir behandeln nun eine Reihe von Beispielen.

Es sei zunächst die ganze Function

$$\varphi \equiv \varphi(z_1, \cdots z_n) = z_1 + h,$$

wobei h eine Constante bedeutet. Hier ist $\varrho = n$, und die Grössen

$$z_1 + h, \; z_2 + h, \; \cdots z_n + h$$

sind die n Werthe von φ, so dass also die Wurzeln der gesuchten Gleichung sämmtlich um die gleiche Grösse h die Wurzeln von

$$f(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

übertreffen. Für die elementaren, symmetrischen Functionen der $\varphi_1 = z_1 + h, \cdots \varphi_n = z_n + h$ findet man ohne Weiteres

$$\sum \varphi_\lambda = (z_1 + z_2 + \cdots + z_n) + nh = c_1 + nh,$$

$$\sum \varphi_\lambda \varphi_\mu = (z_1 z_2 + \cdots) + \binom{n-1}{1}(z_1 + \cdots)h + \binom{n}{2}h^2$$
$$= c_2 + \binom{n-1}{1} c_1 h + \binom{n}{2} h^2,$$

$$\sum \varphi_\lambda \varphi_\mu \varphi_\nu = (z_1 z_2 z_3 + \cdots) + \binom{n-2}{1}(z_1 z_2 + \cdots)h + \binom{n-1}{2}(z_1 + \cdots)h^2 + \binom{n}{3}h^3$$
$$= c_3 + \binom{n-2}{1} c_2 h + \binom{n-1}{2} c_1 h^2 + \binom{n}{3} h^3,$$

. . . . . .

und es wird demnach

$$\Phi^n - (c_1 + nh)\Phi^{n-1} + \left(c_2 + \binom{n-1}{1} c_1 h + \binom{n}{2} h^2\right)\Phi^{n-2} - \cdots = 0$$

die gesuchte Gleichung. Man kommt einfacher zu demselben Resultate, wenn man direct

$$z = \varphi - h$$

in die Gleichung (2) für z einträgt, und dann φ durch Φ ersetzt.

Nehmen wir insbesondere die Constante

$$h = -\frac{c_1}{n},$$

so verschwindet der Coefficient von Φ^{n-1} in der Gleichung für φ. Dies kann man zur Zurückführung der beliebigen quadratischen Gleichung

$$z^2 - c_1 z + c_2 = 0$$

auf eine reine quadratische Gleichung, d. h. auf eine solche von der Form

$$z^2 - A = 0$$

benutzen, indem man $z = \varphi + \frac{1}{2} c_1$ einträgt.

§ 110. Weiter sei die Function

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots z_n) = k z_1,$$

wobei k eine Constante bedeutet, und ϱ wieder gleich n wird. Hier ist

$$C_1 = k c_1, \quad C_2 = k^2 c_2, \quad C_3 = k^3 c_3, \quad \cdots,$$

und

$$\Phi^n - k c_1 \Phi^{n-1} + k^2 c_2 \Phi^{n-2} - \cdots \pm k^n c_n = 0.$$

Setzt man $k = -1$, so erhält man die Gleichung, deren Wurzeln die negativen Werthe der Wurzeln von

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

sind. Diese Gleichung ist also

$$\Phi^n + c_1 \Phi^{n-1} + c_2 \Phi^{n-2} + \cdots + c_n = 0.$$

§ 111. Jetzt nehmen wir

$$\varphi(z_1, z_2, \cdots z_n) = z_1^k,$$

wobei k eine ganze, positive Zahl bedeuten soll. Statt sofort die Coefficienten $C_1, C_2, \cdots C_n$ der gesuchten Gleichung zu berechnen, können wir auch zuerst ihre Wurzelsummen $S_1, S_2, \cdots S_n$ ableiten und von diesen dann zu den elementaren, symmetrischen Functionen C übergehen. So findet man ohne Weiteres

$$S_1 = s_k, \quad S_2 = s_{2k}, \cdots S_n = s_{nk}$$

und hat daraus (§ 94)

$$\Phi^n - C_1\Phi^{n-1} + \cdots = \Phi^n - S_1\Phi^{n-1} + \frac{1}{2}(S_1^2 - S_2)\Phi^{n-2} - \cdots$$

$$= \Phi^n - s_k\Phi^{n-1} + \frac{1}{2}(s_k^2 - s_{2k})\Phi^{n-2} - \cdots = 0$$

zu bestimmen. Für die praktische Berechnung ist der folgende Weg vorzuziehen. Da

$$\Phi^n - C_1\Phi^{n-1} + \cdots \pm C_n = 0$$

die Wurzeln $z_1^k, z_2^k, \cdots z_n^k$ besitzt, so ist das Polynom dieser Gleichung

$$= (\Phi - z_1^k)(\Phi - z_2^k)\cdots(\Phi - z_n^k);$$

setzen wir jetzt $\Phi = z^k$ und bezeichnen die k Wurzeln von

$$\zeta^k = 1,$$

die sogenannten k^{ten} Einheitswurzeln, mit $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_k$, dann geht das Polynom über in

$$(z^k - z_1^k)(z^k - z_2^k)\cdots(z^k - z_n^k)$$

$$= (-1)^{(k+1)n}\prod_{\lambda=1}^{n}(z\omega_1 - z_\lambda)(z\omega_2 - z_\lambda)\cdots(z\omega_k - z_\lambda)$$

$$= (-1)^{(k+1)n}\prod_{\mu=1}^{k}(z\omega_\mu - z_1)(z\omega_\mu - z_2)\cdots(z\omega_\mu - z_n),$$

und gemäss der Bezeichnung der Function $f(z)$ in § 107

$$= (-1)^{(k+1)n}\prod_{\mu=1}^{k} f(z\omega_\mu).$$

Wenn man also den umgekehrten Weg einschlägt und von der Bildung des letzten Products ausgeht, so erkennt man sofort durch die vorhergehenden Ausdrücke, dass in ihm nur die Potenzen von z^k vorkommen;

setzt man dann $z^k = \Phi$, so erhält man die gewünschte Gleichung. Wir haben von dieser Bildung schon früher, § 58, Gebrauch gemacht.

§ 112. Wir wollen nun auch

$$\varphi(z_1, \cdots z_n) = \frac{1}{z_1}$$

setzen, also die Constante k des vorigen Paragraphen negativ $= -1$ nehmen. Hierbei ist

$$C_1 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \cdots + \frac{1}{z_n} = \frac{z_2 z_3 \cdots z_n + z_1 z_3 \cdots z_n + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_{n-1}}{z_1 z_2 \cdots z_n} = \frac{c_{n-1}}{c_n},$$

$$C_2 = \frac{1}{z_1 z_2} + \frac{1}{z_2 z_3} + \cdots + \frac{1}{z_{n-1} z_n} = \frac{z_3 \cdots z_n + z_1 z_4 \cdots z_n + \cdots + z_1 \cdots z_{n-2}}{z_1 z_2 \cdots z_n} = \frac{c_{n-2}}{c_n},$$

. . . . . .

und daraus folgt, nachdem man die Gleichung (2) mit c_n multiplicirt hat,

$$(4) \qquad c_n \Phi^n - c_{n-1} \Phi^{n-1} + c_{n-2} \Phi^{n-2} - \cdots \pm c_1 \Phi \mp 1 = 0.$$

Dasselbe Resultat hätten wir auch sofort durch die Substitution

$$z = \frac{1}{\varphi}$$

in $f(z) = 0$ erhalten können.

Mit Hülfe der abgeleiteten Gleichung kann man nun auch

$$s_{-h} = z_1^{-h} + z_2^{-h} + \cdots + z_n^{-h}$$

für negative Werthe berechnen; denn das s_{-h} ist gleich der Summe der h^{ten} Potenzen der Wurzeln von (4), und so ergiebt sich durch unsere früheren Formeln

$$s_{-1} = \frac{c_{n-1}}{c_n}, \qquad s_{-2} = \frac{c_{n-1}^2 - 2 c_{n-2} c_n}{c_n^2}, \quad \cdots$$

für die Wurzeln von (3).

Zu beachten ist, dass jetzt bei Einführung der s_{-h} die Formel (6) aus § 91

$$s_\alpha - c_1 s_{\alpha-1} + c_2 s_{\alpha-2} - \cdots \pm c_n s_{\alpha-n} = 0,$$

welche dort nur für $\alpha \geqq n$ aufgestellt wurde, für jedes α gültig erscheint. Der Beweis ist genau derselbe wie der frühere aus § 91.

§ 113. Weiter nehmen wir an

$$\varphi = z_1 + \frac{1}{z_1};$$

dabei können wir jetzt setzen, wenn S_k wieder $\sum \varphi^k$ bedeutet,

$$S_1 = \sum\left(z_\lambda + \frac{1}{z_\lambda}\right) = s_1 + s_{-1},$$

$$S_2 = \sum\left(z_\lambda + \frac{1}{z_\lambda}\right)^2 = s_2 + 2 + s_{-2} = (s_2 + s_{-2}) + 2,$$

$$S_3 = (s_3 + s_{-3}) + 3(s_1 + s_{-1}),$$

$$S_4 = (s_4 + s_{-4}) + 4(s_2 + s_{-2}) + 6,$$

. . . . . .

$$S_k = (s_k + s_{-k}) + \binom{k}{1}(s_{k-2} + s_{-k+2}) + \binom{k}{2}(s_{k-4} + s_{-k+4}) + \cdots,$$

. . . . . .

Hieraus lassen sich dann der Reihe nach mit Hülfe der Formeln der neunten Vorlesung die Werthe von C_1, C_2, C_3, $\cdots$ berechnen.

Ist die Gleichung (3) so beschaffen, dass die Reihe der Wurzeln z_1, z_2, $\cdots$ z_n abgesehen von ihrer Anordnung mit der Reihe der reciproken Werthe $\frac{1}{z_1}$, $\frac{1}{z_2}$, $\cdots$ $\frac{1}{z_n}$ übereinstimmt, dann wird $s_{-k} = s_k$ werden, und damit tritt eine Vereinfachung der abgeleiteten Formeln ein. Man erkennt aber auch aus dem vorigen Paragraphen, dass hierbei

$$\frac{c_{n-1}}{c_n} = c_1, \quad \frac{c_{n-2}}{c_n} = c_2, \quad \cdots \quad \frac{c_{n-\alpha}}{c_n} = c_\alpha, \quad \cdots \quad \frac{c_1}{c_n} = c_{n-1},$$

und also, wenn c_α und folglich auch $c_{n-\alpha}$ von Null verschieden ist, dass

$$\frac{c_{n-\alpha}}{c_n} \cdot \frac{c_\alpha}{c_n} = c_\alpha c_{n-\alpha}; \quad c_n^2 = 1, \; c_n = \pm 1$$

werden muss. Falls $c_n = -1$ ist, wird $c_{n-\alpha} = -c_\alpha$, und

$$f(z) = (z^n - 1) - c_1(z^{n-1} - z) + c_2(z^{n-2} - z^2) - \cdots = 0;$$

somit hat $f = 0$ die Wurzel $z = 1$, und man kann $(z - 1)$ aus dem Polynome $f(z)$ herausziehen. Da dies ohne Schwierigkeit geschieht, und da der Complex der zurückbleibenden Wurzeln immer noch mit dem ihrer reciproken Werthe übereinstimmt, so können wir, ohne etwas Wesentliches zu ändern, $c_n = -1$, allenfalls durch Herausziehen einer höheren Potenz von $(z - 1)$ stets beseitigen. Wenn aber $c_n = +1$ ist, dann wird $c_{n-\alpha} = c_\alpha$, und das Polynom f nimmt die Form an

$$f(z) = (z^n + 1) - c_1(z^{n-1} + z) + c_2(z^{n-2} + z^2) - \cdots.$$

Bei ungeradem n kann man $(z + 1)$ herausziehen, da $z = -1$ eine Wurzel von $f = 0$ wird. Auch diesen Fall kann man also beseitigt denken und sofort voraussetzen, n sei gerade $= 2m$ und das Gleichungspolynom von der zuletzt hingeschriebenen Form. Durch Division mit z^m geht die Gleichung in

$$(5)\quad \left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) - c_1\left(z^{m-1} + \frac{1}{z^{m-1}}\right) + c_2\left(z^{m-2} + \frac{1}{z^{m-2}}\right) - \cdots = 0$$

über. Hierin können wir nun unsere Transformation

$$z + \frac{1}{z} = \varphi$$

in einfachster Art durchführen. Durch Potenziren folgt der Reihe nach

$$(6)\quad \begin{aligned} z^2 + \frac{1}{z^2} &= \varphi^2 - 2, \\ z^3 + \frac{1}{z^3} &= \varphi^3 - 3\varphi, \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und das Gesetz für die Bildung der rechten Seiten wird ersichtlich, sobald man

$$\begin{aligned} z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}} &= G_{k-1}(\varphi), \\ z^k + \frac{1}{z^k} &= G_k(\varphi), \\ z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}} &= G_{k+1}(\varphi) \end{aligned}$$

setzt. Denn es wird hierfür

$$\varphi \cdot G_k(\varphi) = \left(z^{k+1} + \frac{1}{z^{k+1}}\right) + \left(z^{k-1} + \frac{1}{z^{k-1}}\right) = G_{k+1}(\varphi) + G_{k-1}(\varphi),$$

d. h. es gilt die Recursionsformel

$$G_{k+1}(\varphi) = \varphi \cdot G_k(\varphi) - G_{k-1}(\varphi).$$

Durch die Substitutionen (6) geht (5) in eine Gleichung des Grades m über. Die Auflösung der Gleichung (3), welche in unserem Falle eine **reciproke Gleichung** genannt wird, lässt sich somit derart bewerkstelligen, dass man die Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ von (5) bestimmt, und jeder derselben φ_α vermittels der Lösung von

$$z^2 - \varphi_\alpha z + 1 = 0$$

die beiden Werthe von z zuordnet, welche zu dem gefundenen Werthe φ_α gehören. Die so gewonnenen $2m$ Werthe z sind die gesuchten Wurzeln.

§ 114. Jetzt möge allgemeiner, unter Verwendung von n willkürlichen Constanten u_i,

$$(7)\quad \varphi = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_{n-1} z^{n-1}$$

sein. Erheben wir diese Gleichung zur zweiten, dritten, $\cdots$ n^{ten} Potenz, so entsteht eine Reihe von Ausdrücken, welche sämmtlich mit Hülfe von (3) auf den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad in z reducirt werden können (vgl. § 88). Die erhaltenen Resultate deuten wir durch

$$\begin{aligned}
&\varphi^2 = u_0^{(2)} + u_1^{(2)} z + u_2^{(2)} z^2 + \cdots + u_{n-1}^{(2)} z^{n-1},\\
(7^a)\qquad &\varphi^3 = u_0^{(3)} + u_1^{(3)} z + u_2^{(3)} z^2 + \cdots + u_{n-1}^{(3)} z^{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi^n = u_0^{(n)} + u_1^{(n)} z + u_2^{(n)} z^2 + \cdots + u_{n-1}^{(n)} z^{n-1}
\end{aligned}$$

an; für jede der erhaltenen n Gleichungen (7) und (7ª) bilden wir die auf $z = z_1, z_2, \cdots z_n$ bezogene Summe, wobei $\sum \varphi^k = S_k$ wird, und erhalten

$$\begin{aligned}
&S_1 = u_0 s_0 + u_1 s_1 + u_2 s_2 + \cdots + u_{n-1} s_{n-1},\\
(8)\qquad &S_2 = u_0^{(2)} s_0 + u_1^{(2)} s_1 + u_2^{(2)} s_2 + \cdots + u_{n-1}^{(2)} s_{n-1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_n = u_0^{(n)} s_0 + u_1^{(n)} s_1 + u_2^{(n)} s_2 + \cdots + u_{n-1}^{(n)} s_{n-1}.
\end{aligned}$$

Hieraus lassen sich nach den früher (Vorlesung 9) gegebenen Formeln die Werthe der Coefficienten $C_1, C_2, \cdots C_n$ berechnen, und so kommt man zu

$$(9)\qquad \Phi^n - C_1 \Phi^{n-1} + C_2 \Phi^{n-2} - \cdots \pm C_n = 0.$$

Aus der Herstellung dieser Gleichung ist ersichtlich, dass C_α eine homogene Function α^{ten} Grades in $u_0, u_1, \cdots u_{n-1}$ wird, deren Coefficienten ganze Functionen der $c_1, \cdots c_n$ sind.

Ist (9) aufgelöst, kennt man also $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$, dann kommt es darauf an, von diesen Werthen zu $z_1, z_2, \cdots z_n$ zurückzugelangen, ähnlich wie dies am Schlusse des vorigen Paragraphen geschah. Durch Auflösung der in den $(n-1)$ Grössen $z, z^2, \cdots z^{n-1}$ linearen Gleichungen

$$\begin{aligned}
&u_1 z + u_2 z^2 + \cdots + u_{n-1} z^{n-1} = \varphi - u_0,\\
&u_1^{(2)} z + u_2^{(2)} z^2 + \cdots + u_{n-1}^{(2)} z^{n-1} = \varphi^2 - u_0^{(2)},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&u_1^{(n-1)} z + u_2^{(n-1)} z^2 + \cdots + u_{n-1}^{(n-1)} z^{n-1} = \varphi^{n-1} - u_0^{(n-1)}
\end{aligned}$$

kann man umgekehrt z durch φ ausdrücken, sobald die Determinante der linken Seite

$$|\, u_\varkappa^{(\lambda)} \,| \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots n-1;\ \lambda = 1, 2, \cdots n-1)$$

von Null verschieden ist. Dabei erhält man also den rationalen Ausdruck

$$z = U_0 + U_1 \varphi + U_2 \varphi^2 + \cdots + U_{n-1} \varphi^{n-1}$$

und durch Substitution von $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ die n Werthe $z_1, z_1, \cdots z_n$.

Verschwindet jedoch die Determinante, dann bestehen $(n-1)$ Grössen $A_1, A_2, \cdots A_{n-1}$, die nicht sämmtlich gleich Null sind, und für welche

$$A_1(\varphi^{n-1} - u_0^{(n-1)}) + A_2(\varphi^{n-2} - u_0^{(n-2)}) + \cdots + A_{n-1}(\varphi - u_0) = 0$$

wird. Dies muss für jedes φ und insbesondere für die n Werthe von φ geschehen, welche den Werthen $z = z_1, z_2, \cdots z_n$ entsprechen. Unsere letzte Gleichung müsste also die n Wurzeln $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ besitzen; allein da sie vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade und nicht identisch erfüllt ist, so geht das nur an, wenn mehrere der $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ einander gleich werden. Dabei ist die Lösung des Systems nicht möglich.

Deshalb verfahren wir allgemein so, um z mit Hülfe der φ darzustellen: Zuerst wird (9) nach der früher besprochenen Methode von etwaigen vielfachen Wurzeln befreit. Hat man dann durch Auflösung alle von einander verschiedene Wurzeln von (9), etwa

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_\nu \qquad (\nu \leqq n)$$

gefunden, so weiss man, dass die Gleichung für die Unbekannte z

$$u_{n-1}z^{n-1} + u_{n-2}z^{n-2} + \cdots + u_1 z + (u_0 - \varphi_\alpha) = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \cdot\ \nu)$$

mit der vorgelegten Gleichung

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots = 0$$

mindestens eine Wurzel z gemeinsam hat. Durch Division findet man den grössten, gemeinsamen Theiler $T(z, \varphi)$ beider Ausdrücke und erhält dadurch, im Falle nur eine gemeinsame Wurzel besteht, diese auf rationalem Wege. Haben dagegen die beiden Gleichungen μ Wurzeln gemeinsam, so steigt der Theiler $T(z, \varphi)$ zu demselben Grade μ an, und aus ihm müssen dann durch weitere Lösung der Gleichung $T(z, \varphi) = 0$ die Wurzeln z bestimmt werden.

Wir wollen als Beispiel die Gleichung

$$z^3 - z^2 - 4z + 4 = 0$$

betrachten. Hier setzen wir die besondere Form

$$\varphi = u_0 + u_1 z + u_1 z^2 = u_0 + u_1 (z + z^2)$$

an und erhalten damit

$$\varphi^2 = (u_0^2 - 12u_1^2) + 2(u_0 u_1 + 4u_1^2)(z + z^2),$$
$$\varphi^3 = (u_0^3 - 36u_0 u_1^2 - 96u_1^3) + (3u_0^2 u_1 + 24u_0 u_1^2 + 52u_1^3)(z + z^2).$$

Man erhält

$$\Phi^3 - (3u_0 + 10u_1)\Phi^2 + (3u_0^2 + 20u_0 u_1 + 28u_1^2)\Phi - (u_0^3 + 10u_0^2 u_1 + 28u_0 u_1^2 + 24u_1^3) = 0.$$

Diese Gleichung hat vielfache Wurzeln; diejenige Gleichung, welche alle ihre verschiedenen Wurzeln in einfacher Multiplicität liefert, ist

$$\Phi^2 - (2u_0 + 8u_1)\Phi + (u_0^2 + 8u_0 u_1 + 12u_1^2) = 0,$$

und daraus erhält man

$$\varphi_1 = u_0 + 2u_1, \quad \varphi_2 = u_0 + 6u_1.$$

Nun muss zuerst der gemeinsame Theiler der beiden Gleichungen

$$z^3 - z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \text{und} \quad u_1 z^2 + u_1 z + u_0 = u_0 + 2u_1$$

bestimmt werden. Dieser ist

$$z^2 + z - 2 = 0,$$

und daraus ergiebt sich $z_1 = 1$, $z_2 = -2$. Ebenso suchen wir den gemeinsamen Theiler von

$$z^3 - z^2 - 4z + 4 = 0 \quad \text{und} \quad u_1 z^2 + u_1 z + u_0 = u_0 + 6u_1;$$

der ist

$$z - 2 = 0,$$

und aus ihm folgt die dritte Wurzel $z_3 = +2$ unserer Gleichung.

Natürlich muss der Fall, dass mehrere der Werthe von φ einander gleich werden, gleichgültig wie die u gewählt sind, stets dann vorliegen, wenn $f(z) = 0$ einander gleiche Wurzeln besitzt. Durch unsere früher besprochenen Methoden können wir aber das Eintreten dieses Falles durch voraufgehende Behandlung der zu Grunde gelegten Gleichung $f = 0$ stets beseitigen. Ferner können auch trotz ungleicher $z_1, z_2, \cdots$ gleiche Werthe φ für besondere Specialwerthe der u vorkommen, wie sich dies in unserem Beispiele gezeigt hat, bei welchem ja z^1 und z^2 in dem Ausdrucke φ den gleichen Coefficienten besassen. Daraus aber folgt, wenn etwa $\varphi_\alpha = \varphi_\beta$ ist, dass

$$u_0 + u_1 z_\alpha + u_2 z_\alpha^2 + \cdots + u_{n-1} z_\alpha^{n-1} = u_0 + u_1 z_\beta + u_2 z_\beta^2 + \cdots + u_{n-1} z_\beta^{n-1}$$

wird, dass also zwischen den Wurzeln der Gleichung gewisse Beziehungen bestehen. Bei sogenannten allgemeinen Gleichungen, d. h. bei solchen, zwischen deren Wurzeln keine algebraischen Relationen vorkommen, werden $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ stets von einander verschieden ausfallen.

§ 115. Man kann die in (7) auftretenden, bisher unbestimmt gelassenen Grössen $u_0, u_1, \cdots u_{n-1}$ dazu benutzen, um eine Anzahl der Coefficienten $C_1, C_2, C_3, \cdots$ zum Verschwinden zu bringen. Sollen z. B. die Grössen $C_1, C_2, \cdots C_\alpha$ zu Null werden, so reicht es nach § 94 aus, dass $S_1, S_2, \cdots S_\alpha$ verschwinden. Das giebt ein System von homogenen Gleichungen, die, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, der Reihe nach vom Grade 1, 2, 3, $\cdots \alpha$ werden. Dieses System ist aufzulösen, wenn die Forderung befriedigt werden soll.

Wollen wir demnach etwa $C_1 = 0$ haben, so brauchen wir nach (8) nur

$$-u_0 s_0 = u_1 s_1 + u_2 s_2 + \cdots + u_n s_n$$

zu erfüllen, d. h. es wird zu setzen sein

$$\varphi = u_1 \left(z - \frac{1}{n} s_1\right) + u_2 \left(z^2 - \frac{1}{n} s_2\right) + \cdots + u_{n-1} \left(z^{n-1} - \frac{1}{n} s_{n-1}\right).$$

Soll gleichzeitig $C_2 = 0$ werden, dann muss auch S_2 zum Verschwinden gebracht werden. Dies erfordert schon die Auflösung einer quadratischen Gleichung zwischen den $(n-1)$ Coefficienten $u_1, u_2, \cdots u_{n-1}$.

Auf diesem Wege kann man die Gleichungen dritten und vierten Grades lösen, indem man sie auf reine Gleichungen oder auf Gleichungen niederen Grades reducirt.

Ist zunächst die Gleichung dritten Grades

$$z^3 - c_1 z^2 + c_2 z - c_3 = 0$$

gegeben, dann kann man u_0 so bestimmen, dass $C_1 = 0$ wird. Dies geschieht, wie eben gezeigt wurde, durch die Annahme

$$\varphi = u_1\left(z - \frac{1}{3}s_1\right) + u_2\left(z^2 - \frac{1}{3}s_2\right).$$

Bildet man dann S_2 und setzt dies gleich Null, so entsteht

$$u_1^2(3s_2 - s_1^2) + 2u_1u_2(3s_3 - s_1s_2) + u_2^2(3s_4 - s_2^2) = 0.$$

Hieraus folgt durch Auflösung

$$(3s_2 - s_1^2)u_1 = [(s_1s_2 - 3s_3) + \sqrt{-3\Delta}]u_2,$$

wobei zur Abkürzung

$$\Delta = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Demnach wird die Substitution

$$\varphi = [(s_1s_2 - 3s_3) + \sqrt{-3\Delta}](3z - s_1) + (3s_2 - s_1^2)(3z^2 - s_2)$$

die vorgelegte Gleichung dritten Grades in die binomische Form

$$\Phi^3 - C_3 = 0$$

transformiren und dadurch auf eine reine Gleichung reduciren. —

Ist zweitens

$$z^4 - c_1z^3 + c_2z^2 - c_3z + c_4 = 0$$

gegeben, dann wählt man ähnlich wie soeben, um $C_1 = S_1$ zum Verschwinden zu bringen, die Function

$$\varphi = u_1\left(z - \frac{1}{4}s_1\right) + u_2\left(z^2 - \frac{1}{4}s_2\right) + u_3\left(z^3 - \frac{1}{4}s_3\right)$$

und sucht nun u_1 so zu bestimmen, dass C_3 verschwindet, und also

$$S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3 = 0 \text{ oder hier einfacher } S_3 = 0$$

wird. Das erfordert die Lösung einer Gleichung dritten Grades für u_1; die hierdurch entstehende Substitution führt die vorgelegte Gleichung vierten Grades in die Form

$$\Phi^4 + C_2\Phi^2 + C_4 = 0$$

und diese vermittels $\zeta = \Phi^2$ in eine quadratische Gleichung über, von deren Wurzeln aus man dann leicht rückwärts zu z_1, z_2, z_3, z_4 gelangen kann.

§ 116. Wir wollen dieselbe Transformation (7) für die Gleichung fünften Grades

$$z^5 - c_1 z^4 + c_2 z^3 - c_3 z^2 + c_4 z - c_5 = 0$$

verwerthen. Hier nehmen wir zunächst wieder

$$\varphi = u_1\left(z - \tfrac{1}{5}s_1\right) + u_2\left(z^2 - \tfrac{1}{5}s_2\right) + u_3\left(z^3 - \tfrac{1}{5}s_3\right) + u_4\left(z^4 - \tfrac{1}{5}s_4\right).$$

Bildet man damit S_2, so entsteht eine homogene Function zweiten Grades in u_1, u_2, u_3, u_4, eine sogenannte quadratische Form der vier Grössen u. Um die Untersuchung hier nicht zu unterbrechen, nehmen wir ein in § 172 abzuleitendes Resultat als bereits bekannt an, dass eine solche quadratische Form von vier Variablen in die Gestalt einer Summe von der Form

$$\sum_i \varepsilon_i U_i^2 = \sum_i \varepsilon_i (\alpha_i u_1 + \beta_i u_2 + \gamma_i u_3 + \delta_i u_4)^2$$

gebracht werden kann, wobei die Anzahl der summirten Quadrate unter Voraussetzung der linearen Unabhängigkeit der Grössen

$$\alpha_i u_1 + \beta_i u_2 + \gamma_i u_3 + \delta_i u_4$$

nicht grösser als vier sein kann, und wobei die Coefficienten ε_i von den Variablen u unabhängig bleiben. Die Gleichung $S_2 = 0$ oder die hiernach umgewandelte Gleichung

$$\varepsilon_1 U_1^2 + \varepsilon_2 U_2^2 + \varepsilon_3 U_3^2 + \varepsilon_4 U_4^2 = 0 \tag{10}$$

kann man dann in die beiden linearen Gleichungen

$$\sqrt{\varepsilon_1}\, U_1 = \sqrt{-\varepsilon_2}\, U_2, \quad \sqrt{\varepsilon_3}\, U_3 = \sqrt{-\varepsilon_4}\, U_4$$

zerfällen. Aus ihnen gehen immer nur lineare Beziehungen homogener Natur zwischen u_1, u_2, u_3, u_4 hervor, durch die man, wie bei der Gleichung dritten Grades im vorigen Paragraphen, die Forderung $S_2 = 0$ befriedigen kann. Trägt man die so erhaltenen Werthe in $S_3 = 0$ ein, dann erhält man eine homogene Gleichung dritten Grades zwischen zwei oder mehr Variablen u; wenn man hier eine derselben als Unbekannte betrachtet und sie aus dieser Gleichung bestimmt, dann hat man C_1, C_2, C_3 zum Verschwinden gebracht, und die Gleichung für φ geht in die Form

$$\Phi^5 + C_4 \Phi - C_5 = 0 \tag{11}$$

über. Wählt man statt der Gleichung $C_3 = 0$ die Gleichung

$$4!\, C_4 = S_1^4 - 6 S_1^2 S_2 + 8 S_1 S_3 + 3 S_2^2 - 6 S_4 = 0,$$

welche in Folge der schon erhaltenen Beziehungen $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ sich in

$$S_4 = 0$$

verwandelt, so hat man nur eine Gleichung vierten Grades aufzulösen, um die Gleichung für φ in die Form

$$\Phi^5 - C_3 \Phi^2 - C_5 = 0 \tag{12}$$

zu bringen.

Wir haben bei diesen Umformungen keinerlei Gebrauch davon gemacht, dass die Gleichung in z gerade vom fünften Grade war. Alle unsere Schlussfolgerungen beruhten einzig auf der Form der Substitution

$$\varphi = u_1\left(z - \tfrac{1}{5}s_1\right) + u_2\left(z^2 - \tfrac{1}{5}s_2\right) + u_3\left(z^3 - \tfrac{1}{5}s_3\right) + u_4\left(z^4 - \tfrac{1}{5}s_4\right).$$

Der Umstand, dass bei Gleichungen höherer Grade die Anzahl der u_i und der U_i eine höhere wird als 4, macht offenbar gar nichts aus, und deshalb gilt das erhaltene Resultat allgemein. Man kann durch Auflösung einer Gleichung vom dritten oder einer solchen vom vierten Grade die Gleichung (2) für φ auf die Form

$$\Phi^n + C_4 \Phi^{n-4} - C_5 \Phi^{n-5} + \cdots \pm C_n = 0$$

bezw. auf

$$\Phi^n - C_3 \Phi^{n-3} - C_5 \Phi^{n-5} + \cdots \pm C_n = 0$$

reduciren.

Wenn man in die Gleichungen, welche beim fünften Grade erhalten werden, statt Φ den reciproken Werth $\frac{1}{\Phi}$ als Variable einführt, erhält man die ergänzenden Darstellungen

$$\begin{aligned} \Phi^5 + \Gamma_2 \Phi^3 - \Gamma_5 &= 0, \\ \Phi^5 - \Gamma_1 \Phi^4 - \Gamma_5 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Auf jede der Formen (11), (12), (13) lässt sich demnach die allgemeine Gleichung fünften Grades stets reduciren. Die hier besprochene allgemeine Transformation stammt von Tschirnhaus und führt seinen Namen; die speciellen durch (11), (12), (13) gegebenen Resultate hat Jerrard, ein englischer Mathematiker, abgeleitet.

Setzen wir in (11), (12), (13) für Φ ein bezw. $\Phi \cdot \sqrt[4]{C_4}$, $\Phi \cdot \sqrt[3]{C_3}$, $\Phi \cdot \sqrt[2]{\Gamma_2}$, $\Phi \cdot \Gamma_1$, dann kommt man auf eine der, nur einen Parameter enthaltenden Formen

$$\Phi^5 + \Phi - D = 0, \quad \Phi^5 - \Phi^2 - D = 0, \quad \Phi^5 + \Phi^3 - D = 0,$$
$$\Phi^5 - \Phi^4 - D = 0,$$

die für tabellarische Lösung der Gleichungen fünften Grades verwendet werden können.

§ 117. Wenn wir aus der Theorie der quadratischen Formen noch einen weiteren Satz benutzen (§ 174), dann können wir auch über die besprochene Art der Transformation für die Gleichungen fünften Grades noch andere Aufschlüsse erhalten.

Das Theorem, welches wir gebrauchen wollen, ist das folgende: Wird eine quadratische Form von n Variablen auf verschiedene Art in eine Summe von Quadraten umgewandelt

$$\sum_\lambda \varepsilon_\lambda U_\lambda^2, \quad \sum_\lambda \eta_\lambda V_\lambda^2,$$

bei der erstens die U_λ (und die V_λ) von einander linear unabhängig sind, und zweitens alle eingehenden Constanten reelle Werthe haben, so ist die Anzahl der positiven sowie der negativen ε (und η) von der Art der Bildung der Summe unabhängig.

Lassen wir nun für die Gleichung fünften Grades in z nur reelle Coefficienten zu und setzen

$$\varphi = u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + u_3 z^3 + u_4 z^4,$$

so wird

$$S_1 = s_0 u_0 + s_1 u_1 + s_2 u_2 + s_3 u_3 + s_4 u_4,$$

$$S_2 = \frac{1}{s_0}(s_0 u_0 + \cdots + s_4 u_4)^2 + \psi(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

$$= \frac{1}{5} S_1^2 + \psi(u_1, \cdots u_4),$$

wobei ψ eine quadratische Form von $u_1, \cdots u_4$ bedeutet.

Da gemäss der Definition

$$S_2 = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 + \varphi_5^2$$

ist, und da einer reellen Wurzel $z_\varkappa$ auch ein reelles $\varphi_\varkappa$ entspricht, während ein conjugirt complexes Wurzelpaar $x_\lambda = m + in$, $x_\mu = m - in$ die Werthe

$$\varphi_\lambda = \varrho + i\sigma, \quad \varphi_\mu = \varrho - i\sigma,$$
$$\varphi_\lambda^2 + \varphi_\mu^2 = 2\varrho^2 - 2\sigma^2$$

liefert, so geht S_2 in eine der Formen mit reellen Constanten

$$S_2' = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 + \varphi_5^2,$$
$$S_2'' = \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + 2\varrho^2 - 2\sigma^2,$$
$$S_2''' = \varphi_1^2 + 2\varrho^2 - 2\sigma^2 + 2\varrho_1^2 - 2\sigma_1^2$$

über, je nachdem die Gleichung fünften Grades in den z nur reelle Wurzeln oder ein, oder zwei complexe Wurzelpaare besitzt. Nach dem herangezogenen Hilfssatze wird also die Umwandlung von ψ in eine Summe von Quadraten entsprechend stets zu den Formen führen

$$S_2' = \tfrac{1}{5} S_1^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$
$$S_2'' = \tfrac{1}{5} S_1^2 + U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 - U_4^2,$$
$$S_2''' = \tfrac{1}{5} S_1^2 + U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2.$$

Disponirt man jetzt, wie dies oben geschah, so über die Constante u_0, dass S_1 verschwindet, dann erhält man entsprechend den angegebenen Realitätsverhältnissen der Wurzeln

$$S_2' = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 + U_4^2,$$
$$S_2'' = U_1^2 + U_2^2 + U_3^2 - U_4^2,$$
$$S_2''' = U_1^2 + U_2^2 - U_3^2 - U_4^2.$$

Die Methode der Gleichungsauflösung von $S_2 = 0$, wie sie in (10) angedeutet ist, führt also lediglich im letzten Falle, d. h. wenn die Gleichung fünften Grades nur eine einzige reelle Wurzel besitzt, dadurch, dass man

$$U_1 = U_3,\ U_2 = U_4 \quad \text{oder} \quad U_1 = U_4,\ U_2 = U_3$$

setzt, auf Gleichungen zwischen den u, welche reelle Coefficienten haben; in den beiden ersten Fällen werden die Transformationsconstanten complex ausfallen*).

§ 118. In allen bisher durchgesprochenen Beispielen haben wir φ lediglich als Function einer einzigen Wurzel z angenommen. Wir wollen jetzt zu dem allgemeinen Falle übergehen, in welchem φ eine Function mehrerer Gleichungswurzeln ist. Zuerst sei für die Gleichung vierten Grades

$$z^4 - c_1 z^3 + c_2 z^2 - c_3 z + c_4 = 0$$

die Function vorgelegt

$$\varphi = z_1 z_2 + z_3 z_4.$$

Man findet dann $\varrho = 3$, und als die drei Werthe von φ

$$\varphi_1 = z_1 z_2 + z_3 z_4,\quad \varphi_2 = z_1 z_3 + z_2 z_4,\quad \varphi_3 = z_1 z_4 + z_2 z_3.$$

Hieraus entstehen die elementaren symmetrischen Functionen der drei φ

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = S(z_1 z_2) = c_2,$$
$$\varphi_1\varphi_2 + \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_3 = S(z_1^2 z_2 z_3) = c_1 c_3 - 4c_4,$$
$$\varphi_1\varphi_2\varphi_3 = S(z_1^2 z_2^2 z_3^2) + z_1 z_2 z_3 z_4 S(z_1^2)$$
$$= c_1^2 c_4 - 4c_2 c_4 + c_3^2,$$

und also wird die gesuchte Gleichung

$$\Phi^3 - c_2\Phi^2 + (c_1 c_3 - 4c_4)\Phi - (c_1^2 c_4 - 4c_2 c_4 + c_3^2) = 0.$$

---

*) Sylvester: On the so-called Tschirnhausen Transformation. J. für M. Bd. 100, S. 465 ff.

In gleicher Weise sei für die Gleichung vierten Grades die Function

$$\psi = z_1 - z_2 + z_3 - z_4$$

vorgelegt. Hier findet man $\varrho = 6$ und die sechs Werthe von ψ

$$\psi_1 = z_1 - z_2 + z_3 - z_4, \quad \psi_2 = z_1 + z_2 - z_3 - z_4, \quad \psi_3 = z_1 - z_2 - z_3 + z_4,$$
$$\psi_4 = -z_1 + z_2 - z_3 + z_4, \quad \psi_5 = -z_1 - z_2 + z_3 + z_4, \quad \psi_6 = -z_1 + z_2 + z_3 - z_4.$$

Man erkennt sofort aus den Identitäten

$$\psi_1 + \psi_4 = 0, \quad \psi_2 + \psi_5 = 0, \quad \psi_3 + \psi_6 = 0,$$

dass die Gleichung sechsten Grades, deren Wurzeln $\psi_1, \cdots \psi_6$ sind, von der Form

$$\Psi^6 - C_1 \Psi^4 + C_2 \Psi^2 - C_3 = 0$$

sein wird; das Gleichungspolynom kann hierbei in der Gestalt

$$(\Psi^2 - \psi_1^2)(\Psi^2 - \psi_2^2)(\Psi^2 - \psi_3^2)$$

geschrieben werden, und daraus ergiebt sich

$$C_1 = 3(Sz_1)^2 - 8S(z_1 z_2) = 3c_1^2 - 8c_2,$$
$$C_2 = 3c_1^4 - 16c_1^2 c_2 + 16c_2^2 + 16c_1 c_3 - 64c_4,$$
$$C_3 = (\psi_1 \psi_2 \psi_3)^2 = (c_1^3 - 4c_1 c_2 + 8c_3)^2;$$

$$\Psi^6 - (3c_1^2 - 8c_2)\Psi^4 + (3c_1^4 - 16c_1^2 c_2 + 16c_2^2 + 16c_1 c_3 - 64c_4)\Psi^2 - (c_1^3 - 4c_1 c_2 + 8c_3)^2 = 0.$$

§ 119. Wir suchen ferner für die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades die zu der Function

$$\varphi = z_1 + z_2$$

gehörige Gleichung zu bestimmen. Für sie ist $\varrho = \frac{n(n-1)}{2}$, und weiter folgt für die S

$$\sum \varphi_\lambda = (n-1)s_1,$$
$$\sum \varphi_\lambda^2 = (n-1)s_2 + 2\sum z_1 z_2,$$
$$\sum \varphi_\lambda^3 = (n-1)s_3 + 3\sum z_1 z_2^2,$$
$$\sum \varphi_\lambda^4 = (n-1)s_4 + 4\sum z_1 z_2^3 + 6\sum z_1^2 z_2^2,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus sind dann $C_1, C_2, \cdots$ nach unseren früheren Formeln zu berechnen.

§ 120. Jetzt sei

$$\varphi = (z_1 - z_2)^2;$$

dann wird $\varrho = \frac{n(n-1)}{2}$ werden. Wir wollen auch hier zuerst S_1, $S_2, \cdots S_\varrho$ bilden; von da aus kann man dann mittels früherer Formeln

zu den $C_1, C_2, \cdots C_\varrho$ übergehen. Dabei verfahren wir nach dem Vorgange von Lagrange folgendermassen: Wir setzen

$$h_m(z) = (z - z_1)^{2m} + (z - z_2)^{2m} + \cdots + (z - z_n)^{2m}.$$

Wenn man für z der Reihe nach $z_1, z_2, \cdots z_n$ einträgt und die erhaltenen Gleichungen addirt, zeigt sich, da

$$S_m = \sum (z_\lambda - z_\mu)^{2m}$$

ist,

$$2S_m = h_m(z_1) + h_m(z_2) + \cdots + h_m(z_n).$$

Andererseits ist, nach Potenzen von z geordnet,

$$h_m(z) = nz^{2m} - 2ms_1 z^{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} s_2 z^{2m-2} - \cdots + ns_{2m},$$

und deshalb geht der letzte Ausdruck über in

$$2S_m = ns_{2m} - 2ms_1 s_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} s_2 s_{2m-2} - \cdots + ns_{2m};$$

$$S_m = s_0 s_{2m} - 2ms_1 s_{2m-1} + \frac{2m(2m-1)}{1 \cdot 2} s_2 s_{2m-2} - \cdots$$

$$\pm \frac{1}{2} \frac{2m(2m-1)\cdots(m+1)}{1 \cdot 2 \cdots m} s_m s_m.$$

Von hier aus muss dann der Uebergang zu den C gemacht werden.

Für die Gleichung dritten Grades

$$z^3 - c_1 z^2 + c_2 z - c_3 = 0$$

findet man auf diesem Wege zunächst als Werthe der S

$$S_1 = 3s_2 - s_1^2 = 2c_1^2 - 6c_2,$$

$$S_2 = 3s_4 - 4s_1 s_3 + 3s_2^2 = 2c_1^4 - 12c_1^2 c_2 + 18c_2^2,$$

$$S_3 = 3s_6 - 6s_1 s_5 + 15s_2 s_4 - 10s_3^2$$

$$= 2c_1^6 - 18c_1^4 c_2 - 12c_1^3 c_3 + 57c_1^2 c_2^2 + 54c_1 c_2 c_3 - 66c_2^3 - 81c_3^2,$$

und daraus weiter als Werthe der C

$$C_1 = S_1 = 2c_1^2 - 6c_2,$$

$$C_2 = \frac{C_1 S_1 - S_2}{2} = c_1^4 - 6c_1^2 c_2 + 9c_2^2,$$

$$C_3 = \frac{C_2 S_1 - C_1 S_2 + S_3}{3} = -4c_1^3 c_3 + c_1^2 c_2^2 + 18c_1 c_2 c_3 - 4c_2^3 - 27c_3^2.$$

Hierdurch ist die Bildung der Gleichung für Φ vollendet.

§ 121. Ferner betrachten wir das Product aller Wurzeldifferenzen

$$\varphi = \prod_{\lambda, \mu} (z_\lambda - z_\mu), \qquad (\lambda < \mu;\ \lambda = 1, 2, \cdots n-1;\ \mu = 2, 3, \cdots n).$$

Für diese Function ist $\varrho = 2$ und $C_1 = 0$. Denn macht man irgend

eine Umsetzung der z untereinander, so reproduciren sich alle Factoren bis auf ihr Vorzeichen; es können also höchstens zwei Werthe φ_1 und $-\varphi_1 = \varphi_2$ auftreten. Dies geschieht aber auch wirklich. Denn wenn man in dem ausgeschriebenen Producte

$$\begin{aligned}\varphi_1 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3)(z_1 - z_4)\cdots(z_1 - z_n)\\ (z_2 - z_3)(z_2 - z_4)\cdots(z_2 - z_n)\\ (z_3 - z_4)\cdots(z_3 - z_n)\\ \cdots\cdots\\ (z_{n-1} - z_n)\end{aligned}$$

die beiden Elemente z_1 und z_2 mit einander vertauscht, dann wechselt der Factor $(z_1 - z_2)$ sein Vorzeichen; die übrigen Factoren der ersten Zeile gehen lediglich in die der zweiten über und umgekehrt; und die Factoren der folgenden Zeilen bleiben überhaupt ganz unberührt. Es ist also in der That $\varphi_2 = -\varphi_1$, und daher $\varrho = 2$, $C_1 = 0$. Für C_2, welches wegen $C_1 = 0$ mit $-\frac{1}{2}S_2$ übereinstimmt, entsteht

$$\prod_{\lambda}(z_\lambda - z_\mu)^2, \qquad (\lambda < \mu;\ \lambda = 1, 2, \cdots n-1;\ \mu = 2, 3, \cdots n).$$

Es ist dies dasselbe Product, welches im vorigen Paragraphen als letzter Coefficient der dort behandelten Gleichung auftrat, und für das also bereits eine Herstellungsmethode vorliegt. Man kann leicht den Ausdruck für dieses Product in Gestalt einer Determinante angeben, deren Glieder aus den $s_0, s_1, s_2, \cdots$ gebildet sind. Denn bekanntlich ist nach elementaren Determinantensätzen

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} = \varphi \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

und daher finden wir

$$\begin{aligned}\varphi^2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{n-1} & z_2^{n-1} & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n-2} \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Diese Determinante kann man nach der in § 79 bereits benutzten Methode umwandeln. Wir wollen es an einem Beispiele zeigen. Es ist

$$\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_0 & s_1 & s_2 \\ 0 & s_0 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_0 & s_1 & s_2 & s_3 & s_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -c_1 & +c_2 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & -c_1 & +c_2 & -c_3 \\ 0 & 0 & 1 & -c_1 & +c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -c_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

Führt man die Multiplication aus und wendet die Formeln (§ 91) an

$$s_1 - c_1 s_0 = -2c_1, \quad s_2 - c_1 s_1 + c_2 s_0 = c_2,$$
$$s_3 - c_1 s_2 + c_2 s_1 - c_3 s_0 = 0, \cdots,$$

dann entsteht das Resultat

$$\begin{vmatrix} 1 & -c_1 & c_2 & -c_3 & 0 \\ 0 & 1 & -c_1 & c_2 & -c_3 \\ 0 & 0 & 3 & -2c_1 & c_2 \\ 0 & 3 & -2c_1 & c_2 & 0 \\ 3 & -2c_1 & c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 0 & 0 & 3 & 2c_1 & c_2 \\ 0 & 3 & 2c_1 & c_2 & 0 \\ 3 & 2c_1 & c_2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & c_3 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 3 & 2c_1 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2c_1 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Dieselbe Methode lässt sich allgemein durchführen und liefert die gewünschte Umwandlung in der Form einer Determinante aus den c_i von der Ordnung $(2n-1)$:

$$\varphi^2 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ n & (n-1)c_1 & (n-2)c_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & n & (n-1)c_1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2c_{n-2} & c_{n-1} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{mat

$$(z_2 - z_3)^2 (z_2 - z_4)^2 \cdots (z_{n-1} - z_n)^2 = V_{n-1}$$

bestimmt sei, d. h. dass V_{n-1} als Function der Coefficienten der letzten Gleichung ausgedrückt vorliege; diese Darstellung möge angedeutet werden durch

$$V_{n-1}(c_1, \cdots c_n;\ z_1).$$

Dann ist das gesuchte Product φ^2 für die Gleichung n^{ten} Grades

$$\begin{aligned} V_n &= (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \cdots (z_{n-1} - z_n)^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \cdots (z_1 - z_n)^2 V_{n-1}(c_1, \cdots c_n;\ z_1) \\ &= (f'(z_1))^2 V_{n-1}(c_1, \cdots c_n;\ z_1) \\ &= (n z_1^{n-1} - c_1(n-1) z_1^{n-2} + c_2(n-2) z_1^{n-3} - \cdots)^2 \cdot V_{n-1}(c_1, \cdots c_n;\ z_1). \end{aligned}$$

Der so erhaltene Ausdruck wird nach geschehener Multiplication eine ganze Function von z_1 mit Coefficienten werden, welche aus $c_1, c_2, \cdots c_n$ rational und ganz zusammengesetzt sind. Wenn man ihn nach § 101 durch Verwendung von $f(z_1) = 0$ auf den Grad $(n-1)$ in z_1 reducirt, so geht er als symmetrische Function (§ 105) in eine von z_1 unabhängige Function der c_λ über; und diese giebt dann das gesuchte Resultat. Wir können die angegebene Reduction dadurch ausführen, dass der letzte Ausdruck für V_n durch Division mit $f(z_1)$ in die Form

$$V_n = Q \cdot f(z_1) + R(z_1) = R(z_1)$$

gebracht wird. Dann wird in dem Reste $R(z_1)$, der ja bei einer beliebigen Function V_n bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von z_1 aufsteigen könnte, z_1 gänzlich verschwunden sein.

So ist bei $n = 2$ der Werth $V_1 = 1$, und

$$\begin{aligned} V_2 &= (2z_1 - c_1)^2 = 4z_1^2 - 4c_1 z_1 + c_1^2 = 4 \cdot f(z_1) + c_1^2 - 4c_2 \\ &= c_1^2 - 4c_2. \end{aligned}$$

Für $n = 3$ ergiebt dieselbe Methode

$$\begin{aligned} V_3 &= (3z_1^2 - 2c_1 z_1 + c_2)^2 \cdot ([c_1 - z_1]^2 - 4[c_2 - c_1 z_1 + z_1^2]) \\ &= (9z_1^4 - 12c_1 z_1^3 + (4c_1^2 + 6c_2) z_1^2 - 4c_1 c_2 z_1 + c_2^2)(-3z_1^2 + 2c_1 z_1 + c_1^2 - 4 \\ &= -27 z_1^6 + 54 c_1 z_1^5 - (27 c_1^2 + 54 c_2) z_1^4 + (72 c_1 c_2 - 4 c_1^3) z_1^3 \\ &\quad - (18 c_1^2 c_2 + 27 c_2^2 - 4 c_1^4) z_1^2 + (18 c_1 c_2^2 - 4 c_1^3 c_2) z_1 - (4 c_2^3 - c_1^2 c_2^2) \\ &= (z_1^3 - c_1 z_1^2 + c_2 z_1 - c_3)(-27 z_1^3 + 27 c_1 z_1^2 - 27 c_2 z_1 - 4 c_1^3 + 18 c_1 c_2 - 27 c_3) \\ &\quad - 4 c_1^3 c_3 + c_1^2 c_2^2 + 18 c_1 c_2 c_3 - 4 c_2^3 - 27 c_3^2, \end{aligned}$$

so dass also das bereits oben gefundene Resultat

$$V_3 = -4 c_1^3 c_3 + c_1^2 c_2^2 + 18 c_1 c_2 c_3 - 4 c_2^3 - 27 c_3^2$$

hier wieder heraustritt.

§ 122. Zum Schlusse behandeln wir die Aufgabe, diejenige Gleichung herzustellen, deren Wurzeln alle $m \cdot n$ Producte je einer Wurzel x_λ der Gleichung m^{ten} Grades

$$x^m - a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} - \cdots \pm a_m = 0$$

und je einer Wurzel y_μ der Gleichung n^{ten} Grades

$$y^n - b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} - \cdots \pm b_n = 0$$

sind. Bezeichnen wir die Wurzelsummen der x_λ und der y_μ bezw.

$$s_\varrho = \sum_{\lambda=1}^{m} x_\lambda^\varrho \quad \text{und} \quad t_\varrho = \sum_{\mu=1}^{n} y_\mu^\varrho,$$

dann werden die Ausdrücke

$$\sigma_\varrho = \sum_{\lambda,\mu} x_\lambda^\varrho y_\mu^\varrho = s_\varrho t_\varrho$$

die Wurzelsummen der gesuchten Gleichung, und aus $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_{mn}$ lassen sich die Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_{mn}$ derselben herstellen. Einfacher ist folgende Methode. Wir bilden

$$\prod_{\lambda=1}^{n} (x^m - a_1 y_\lambda x^{m-1} + a_2 y_\lambda^2 x^{m-2} - \cdots \pm a_m y_\lambda^m) = 0.$$

Der unter dem Product stehende Ausdruck hat die Wurzelpunkte $x_1 y_\lambda, x_2 y_\lambda, \cdots x_m y_\lambda$, und also besitzt die Gleichung als Wurzeln wirklich alle mn Producte $x_\varkappa y_\lambda$. Dasselbe ergiebt sich natürlich auch in der Form

$$\prod_{\lambda=1}^{m} (y^n - b_1 x_\lambda y^{n-1} + b_2 x_\lambda^2 y^{n-2} - \cdots \pm b_n x_\lambda^n) = 0.$$

Führt man dann die Multiplication in einem der beiden Ausdrücke durch, z. B. in dem ersten, so werden die Coefficienten symmetrische, ganze Functionen der y_λ und also durch die b_λ darstellbar. Die in § 111 befolgte Methode kann als Anwendung des hier Behandelten aufgefasst werden.

Elfte Vorlesung.

Partielle Differentialgleichungen für die symmetrischen Functionen.

§ 123. Die umständlichen Rechnungen, durch welche eine symmetrische Function vermittels der elementaren, symmetrischen Functionen ausgedrückt wird, lassen in manchen Fällen eine nicht unwesentliche Abkürzung durch die Benutzung von Differentialeigenschaften zu, auf deren Besprechung wir jetzt eingehen wollen*).

---

*) Vgl. hierzu „Theorie d. binären Formen" von Faà di Bruno. Deutsch v. Walter. Leipz., Teubner. 1881. Erster Abschn. § 2.

Wir legen dabei wieder die Gleichung n^{ten} Grades

(1) $$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

mit den Wurzeln

(2) $$z_1, z_2, z_3, \cdots z_n$$

zu Grunde und bezeichnen wie oben die Potenzsummen der Wurzeln mit

$$s_0, s_1, s_2, \cdots s_r, \cdots,$$

wobei

$$s_r = z_1^r + z_2^r + \cdots + z_n^r \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

wird. Gelegentlich kann, früheren Betrachtungen entsprechend, r auch negative, ganzzahlige Werthe annehmen.

Jetzt ersetzen wir in (2) alle Wurzeln z durch die Grössen

(3) $$z_1 + z_1' t, \quad z_2 + z_2' t, \quad z_3 + z_3' t, \quad \cdots z_n + z_n' t;$$

hier soll i eine positive, ganze Zahl, und t eine Variable bedeuten. Dann erhält man an Stelle von $s_1, s_2, s_3, \cdots$ die neuen Grössen

(4)
$$\begin{aligned}
\sum (z_1 + z_1' t)^1 &= s_1 + s_i t, \\
\sum (z_1 + z_1' t)^2 &= s_2 + 2 s_{i+1} t + s_{2i} t^2, \\
\sum (z_1 + z_1' t)^3 &= s_3 + 3 s_{i+2} t + 3 s_{2i+1} t^2 + s_{3i} t^3, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Weiter haben wir noch zu berechnen, wie die Coefficienten c der Gleichung durch diese Annahme geändert werden. An die Stelle von $c_1, c_2, c_3, \cdots$ treten der Reihe nach die Ausdrücke

$$\sum (z_1 + z_1' t), \quad \sum (z_1 + z_1' t)(z_2 + z_2' t), \quad \sum (z_1 + z_1' t)(z_2 + z_2' t)(z_3 + z_3' t), \cdots$$

d. h. aufgelöst

$$\begin{aligned}
&\sum z_1 + \sum z_1' t, \quad \sum z_1 z_2 + \sum z_1' z_2 t + \sum z_1' z_2' t^2, \\
&\sum z_1 z_2 z_3 + \sum z_1' z_2 z_3 t + \sum z_1' z_2' z_3 t^2 + \sum z_1' z_2' z_3' t^3, \cdots.
\end{aligned}$$

Nun kommt es uns in diesen Ausdrücken, wie sich gleich zeigen wird, nur auf die Coefficienten von t an; es reicht sonach für unsere Zwecke aus, $\sum z_1' z_2 z_3 \cdots z_\nu$ durch die c darzustellen. Man hat

$$\begin{aligned}
s_i c_{\nu-1} &= \sum z_1' z_2 z_3 \cdots z_\nu + \sum z_1'^{+1} z_2 z_3 \cdots z_{\nu-1}, \\
-s_{i+1} c_{\nu-2} &= -\sum z_1'^{+1} z_2 z_3 \cdots z_{\nu-1} - \sum z_1'^{+2} z_2 z_3 \cdots z_{\nu-2}, \\
+s_{i+2} c_{\nu-3} &= +\sum z_1'^{+2} z_2 z_3 \cdots z_{\nu-2} + \sum z_1'^{+3} z_2 z_3 \cdots z_{\nu-3}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\pm s_{i+\nu-2} c_1 &= \pm \sum z_1'^{+\nu-2} z_2 \pm \sum z_1'^{+\nu-1}, \\
\mp s_{i+\nu-1} &= \mp \sum z_1'^{+\nu-1},
\end{aligned}$$

und daher durch Addition aller dieser Gleichungen

$$(5) \qquad \sum z_1^i z_2 z_3 \cdots z_\nu = s_i c_{\nu-1} - s_{i+1} c_{\nu-2} + s_{i+2} c_{\nu-3} - \cdots \pm s_{i+\nu-1}.$$

Folglich treten an Stelle der c_α die Grössen

$$(6) \qquad c_\alpha + (s_i c_{\alpha-1} - s_{i+1} c_{\alpha-2} + s_{i+2} c_{\alpha-3} - \cdots \pm s_{i+\alpha-1})\, t + \cdots.$$

§ 124. Betrachtet man jetzt eine symmetrische Function R der Grössen z, die wir durch die $z_1, \cdots z_n$, durch die $c_1, \cdots c_n$, durch die $s_1, s_2, \cdots s_r \cdots$ ausgedrückt folgendermassen bezeichnen wollen

$$R = R_1(z_1, \cdots z_n) = R_2(c_1, \cdots c_n) = R_3(s_1, s_2, \cdots s_r, \cdots),$$

und setzen in dieselbe für die z die Grössen (3), für die s die Grössen (4) und für die c die Grössen (6) ein, dann stimmen in den entstehenden Ausdrücken für R_1, R_2, R_3 die Coefficienten der einzelnen Potenzen von t überein. Insbesondere wollen wir die Coefficienten von t betrachten. Man erhält hierfür

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial R_1}{\partial z_1} z_1^i + \cdots + \frac{\partial R_1}{\partial z_n} z_n^i \\
&= \frac{\partial R_2}{\partial c_1} s_i + \frac{\partial R_2}{\partial c_2}(s_i c_1 - s_{i+1}) + \frac{\partial R_2}{\partial c_3}(s_i c_2 - s_{i+1} c_1 + s_{i+2}) + \cdots \\
&= \frac{\partial R_3}{\partial s_1} s_i + 2\frac{\partial R_3}{\partial s_2} s_{i+1} + 3\frac{\partial R_3}{\partial s_3} s_{i+2} + \cdots,
\end{aligned}$$

so dass also die Differentialgleichung entsteht

$$(7) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda^i \frac{\partial R}{\partial z_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (s_i c_{\lambda-1} - s_{i+1} c_{\lambda-2} + \cdots) \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{i+\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.$$

In dem besondern Falle $i = 0$ geht (7), wie man leicht sieht, über in

$$(7^a) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial z_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (n + 1 - \lambda) c_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.$$

Aus der beliebig grossen Anzahl dieser Gleichungen kann man nur n wesentlich verschiedene herausheben. Setzt man nämlich $i = 0, 1, 2, \cdots n-1$, dann folgt wegen der Recursionsformeln

$$\begin{aligned}
z_\lambda^n &= c_1 z_\lambda^{n-1} - c_2 z_\lambda^{n-2} + c_3 z_\lambda^{n-3} - \cdots \pm c_n, \\
z_\lambda^{n+1} &= c_1 z_\lambda^n - c_2 z_\lambda^{n-1} + c_3 z_\lambda^{n-2} - \cdots \pm c_n z_\lambda, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wie schon früher gezeigt worden ist,

$$\begin{aligned}
s_n &= c_1 s_{n-1} - c_2 s_{n-2} + c_3 s_{n-3} - \cdots \pm c_n s_0, \\
s_{n+1} &= c_1 s_n - c_2 s_{n-1} + c_3 s_{n-2} - \cdots \pm c_n s_1, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

und daraus ersieht man, dass die Gleichungen (7) auch für $i = n$, $n + 1, \cdots$ gelten, wenn sie für $i = 0, 1, 2, \cdots (n-1)$ bewiesen sind. In gleicher Weise kann man auch rückwärts gehen und für $i = -1, -2, \cdots$ Formeln aufstellen. Für $i = -1$ ergiebt sich, wenn $c_0 = 1$ eingeführt wird,

$$\sum \frac{1}{z_\lambda}\frac{\partial R}{\partial z_\lambda} = s_{-1}\frac{\partial R}{\partial c_1} + (s_{-1}c_1 - s_0 c_0)\frac{\partial R}{\partial c_2} + (s_{-1}c_2 - s_0 c_1 + s_1 c_0)\frac{\partial R}{\partial c_3} + \cdots$$
$$= s_{-1}\frac{\partial R}{\partial s_1} + \sum_{\lambda=2}^{\infty} \lambda s_{\lambda-2}\frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.$$

Nun ist nach § 112

$$s_{-1} = \frac{c_{n-1}}{c_n}, \quad s_{-2} = \frac{c_{n-1}^2 - 2c_{n-2}c_n}{c_n^2}, \quad \cdots,$$

und aus (5) folgt für $i = 0$, was schon bei (7^a) benutzt wurde,

$$s_0 c_{\nu-1} - s_1 c_{\nu-2} + s_2 c_{\nu-3} - \cdots \pm s_{\nu-1} c_0 = (n - \nu + 1)c_{\nu-1}.$$

Dadurch erhält man dann für $i = -1$ das Resultat

$$\sum \frac{1}{z_\lambda}\frac{\partial R}{\partial z_\lambda}$$
$$= \frac{c_{n-1}}{c_n}\left(\frac{\partial R}{\partial c_1} + c_1\frac{\partial R}{\partial c_2} + \cdots + c_{n-1}\frac{\partial R}{\partial c_n}\right) - \sum_{\lambda=2}^{n}(n+2-\lambda)c_{\lambda-2}\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}$$
$$= \frac{c_{n-1}}{c_n}\frac{\partial R}{\partial s_1} + \sum_{\lambda=2}^{\infty}\lambda s_{\lambda-2}\frac{\partial R}{\partial s_\lambda}.$$

§ 125. Wir haben bei der Ableitung der Formeln (7) nur die Beziehungen der z, der c und der s untereinander, aber keinerlei Voraussetzung über die Natur der Function R benutzt. Folglich gelten die Formeln (7) auch nicht allein für symmetrische Functionen R, sondern für jede beliebige Function der Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$, die sich ja, wie die Wurzeln selbst, nach Auflösung der Gleichung $f(z) = 0$ durch die c und also auch durch die s ausdrücken lässt.

Nehmen wir z. B. $n = 2$, $R = z_1$, so wird

$$z_1 = \frac{1}{2}(c_1 + \sqrt{c_1^2 - 4c_2}) = \frac{1}{2}(s_1 + \sqrt{2s_2 - s_1^2});$$
$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}}\right), \quad \frac{\partial R}{\partial c_2} = \frac{-1}{\sqrt{c_1^2 - 4c_2}},$$
$$\frac{\partial R}{\partial s_1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_1}{\sqrt{2s_2 - s_1^2}}\right), \quad \frac{\partial R}{\partial s_2} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2s_2 - s_1^2}};$$
$$\sqrt{c_1^2 - 4c_2} = \sqrt{2s_2 - s_1^2} = z_1 - z_2.$$

Dadurch geht (7) über in die Gleichung

$$s_1^i = s_i \frac{1}{2}\left(1 + \frac{c_1}{z_1 - z_2}\right) + (s_i c_1 - s_{i+1}) \frac{-1}{z_1 - z_2}$$
$$= s_i \frac{1}{2}\left(1 - \frac{s_1}{z_1 - z_2}\right) + s_{i+1} \frac{1}{z_1 - z_2},$$

und man überzeugt sich sofort von der Richtigkeit dieser Gleichungen.

§ 126. Wir wollen nun untersuchen, welche Beziehungen durch (7) zwischen den z und den s fixirt werden, d. h. wir wollen das System der partiellen Differentialgleichungen (7) integriren. Setzen wir s_k für R ein, so entsteht

$$(8) \qquad \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda^i \frac{\partial s_k}{\partial z_\lambda} = k s_{k+i-1} \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, 2, \cdots \\ k = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix},$$

und zu diesen Gleichungen wollen wir noch die für $k = 0$ hinzunehmen, indem wir $s_0 = n$ einführen. Die allgemeine Lösung von (8) soll durch die Function $s_k = \varphi_k$ geliefert werden, so dass

$$\sum z_\lambda^i \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_\lambda} = k \varphi_{k+i-1},$$

und im Besonderen für $i = 1$ auch

$$\sum z_\lambda \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_\lambda} = k \varphi_k$$

ist. Gehen wir von diesen Gleichungen in bekannter Weise zu dem simultanen Systeme von Differentialgleichungen

$$\frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{z_2} = \cdots = \frac{dz_n}{z_n} = \frac{d\varphi_k}{k\varphi_k}$$

über, so erhalten wir als erstes Resultat, dass das allgemeine φ_k eine homogene Function der $z_1, z_2, \cdots z_n$ von der Dimension k wird.

§ 127. Aus φ_1 lassen sich durch

$$(9) \qquad \varphi_k = \sum z_\lambda^k \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_\lambda}$$

alle übrigen φ_k berechnen. Liegen zwei Lösungssysteme für (8) vor, dann giebt die Summe entsprechender Functionen ein neues Lösungssystem. Es reicht daher aus, einen einzigen Summanden

$$\psi_1 = z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n} \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1)$$

von φ_1 daraufhin zu prüfen, welchen Bedingungen er unterworfen werden muss, um (8) zu erfüllen. Dann hat man die nothwendigen Bedingungen für die Bildung von φ_1 und kann daraus jedes φ_k zusammensetzen.

Aus (9) folgt, wenn wir die besondere Form von ψ_1 zu Grunde legen,

$$\psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varepsilon_\nu^{i+k-2},$$

und aus (8) dann

$$k\psi_{k+i-1} = \psi_1 \sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda \varepsilon_\lambda^{i-1} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu \varepsilon_\mu^{k-1} + (k-1)\psi_1 \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varepsilon_\nu^{i+k-2},$$

so dass den beiden Resultaten gemäss für alle Werthe von i und k und alle beliebigen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n$ die Gleichung

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \alpha_\lambda \varepsilon_\lambda^{i-1} \sum_{\mu=1}^{n} \alpha_\mu \varepsilon_\mu^{k-1} = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu \varepsilon_\nu^{i+k-2}$$

befriedigt sein muss. Daraus ergiebt sich sofort das Bestehen der Bedingungen

$$\alpha_\lambda^2 = \alpha_\lambda; \quad \alpha_\mu \alpha_\nu = 0 \qquad (\mu \neq \nu),$$

und diese Gleichungen sind nur durch die Annahme zu erfüllen, dass eins der α gleich 1 wird, während die anderen gleich Null sind.

Aus dieser Speciallösung gehen nun, wie schon erwähnt wurde, durch lineare Combination die allgemeinen Lösungen von (8) in der Form

$$\varphi_k = a_1 \varepsilon_1^k + a_2 \varepsilon_2^k + \cdots + a_n \varepsilon_n^k \qquad \left(\sum a_\lambda = n\right)$$

hervor. Die in Klammern hinzugefügte Bedingung folgt aus $\varphi_0 = n$. Wir wollen diese Ausdrücke in Rücksicht auf ihre Herleitung durch S_k bezeichnen und deshalb

(10) $$S_k = a_1 \varepsilon_1^k + a_2 \varepsilon_2^k + \cdots + a_n \varepsilon_n^k \qquad \left(\sum a_\lambda = n\right)$$

setzen. Die S_k sind also die allgemeinen Lösungen des gesammten Systems (8).

Construirt man zu diesen S_k nun Functionen C_k, welche von ihnen so abhängen, wie die c_k von den s_k, dann liefert dieses System die allgemeinen Lösungen von (7). Denn erstens ist es klar, dass es Lösungen liefert. Zweitens erkennt man, dass man von den allgemeinsten Lösungen der aus (7) stammenden Gleichungen

$$\sum_{\lambda=1}^{n} \varepsilon_\lambda^i \frac{\partial c_k}{\partial \varepsilon_\lambda} = \sum_{(\alpha)} \varepsilon_{\alpha_1}^i \varepsilon_{\alpha_2} \cdots \varepsilon_{\alpha_k} \qquad \left(\sum_{(\alpha)} \text{ ist symmetrisch in den } \varepsilon\right)$$

umgekehrt zu den Lösungen von (8) kommen könnte. Folglich liefern die construirten C_k die allgemeinsten Lösungen. Man hat also den Satz:

Durch die Functionen

(10) $$S_k = a_1 \varepsilon_1^k + a_2 \varepsilon_2^k + \cdots + a_n \varepsilon_n^k \qquad \left(\sum a_\lambda = n\right)$$

und die aus ihnen abgeleiteten

$$
\begin{aligned}
&1!\,C_1 = S_1,\\
&2!\,C_2 = S_1^2 - S_2,\\
&3!\,C_3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 2S_3,\\
&4!\,C_4 = S_1^4 - 6S_1^2S_2 + 8S_1S_3 + 3S_2^2 - 6S_4,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{10^a}
$$

werden die allgemeinen Lösungen des Systems (7) geliefert.

§ 128. Die Darstellung der durch (10^a) bestimmten C vermittels der s kann man einfach durch die symbolische Gleichung

$$\lambda!\,C_\lambda = (a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n)^{(\lambda)} \tag{11}$$

darstellen, wobei die symbolische Potenz $s_\mu^{(\lambda)}$ durch die wirkliche Potenz s_μ^λ, und der symbolische Ausdruck

$$a_\mu^{(\lambda)} \quad \text{durch} \quad a_\mu(a_\mu - 1)(a_\mu - 2)\cdots(a_\mu - \lambda + 1)$$

zu ersetzen ist.

Um (11) zu beweisen, gehen wir auf § 94 zurück. Setzt man dort in die Formel (10) statt jedes

$$s_\mu \quad \text{unser} \quad a_1 s_1^\mu + a_2 s_2^\mu + \cdots + a_n s_n^\mu$$

und geht dann den daselbst eingeschlagenen Weg rückwärts, so kommt man zu der Gleichung

$$
\begin{aligned}
1 - C_1 z + C_2 z^2 - C_3 z^3 + \cdots &= e^{\sum a_\alpha \log(1 - s_\alpha z)}\\
&= (1 - s_1 z)^{a_1}(1 - s_2 z)^{a_2}\cdots(1 - s_n z)^{a_n},
\end{aligned}
\tag{11^a}
$$

durch welche auch schon der Zusammenhang der C mit den $s_1, s_2, \cdots$ einfach festgestellt wird. Durch Ausführung der Potenzirung und der Multiplication auf der rechten Seite erhält man, wie behauptet wurde,

$$
\begin{aligned}
\lambda!\,C_\lambda &= \sum_{(\varkappa)} \binom{a_1}{\varkappa_1}\cdots\binom{a_n}{\varkappa_n}\lambda!\,s_1^{\varkappa_1}\cdots s_n^{\varkappa_n} \qquad (\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \lambda)\\
&= \sum_{(\varkappa)} \frac{\lambda!}{\varkappa_1!\cdots\varkappa_n!}\,a_1(a_1 - 1)\cdots(a_1 - \varkappa_1 + 1)\,s_1^{\varkappa_1}\cdots\\
&= \sum_{(\varkappa)} \frac{\lambda!}{\varkappa_1!\cdots\varkappa_n!}\,a_1^{(\varkappa_1)}s_1^{\varkappa_1}\cdots a_n^{(\varkappa_n)}s_n^{\varkappa_n}\\
&= (a_1 s_1 + a_2 s_2 + \cdots + a_n s_n)^{(\lambda)}.
\end{aligned}
$$

Fordert man von den allgemeinen Lösungen von (7) weiter noch, dass nur $C_1, C_2, \cdots C_n$ von Null verschieden seien, während $C_{n+1}, \cdots$ gleich Null werden, dann zeigt (11^a), dass sämmtliche $a_1, a_2, \cdots$ ganze Zahlen sein müssen; und da ihre Summe gleich n ist, so liefern dann die Potenzsummen

$$s_k = s_1^k + s_2^k + \cdots + s_n^k$$

e allgemeinen Lösungen, sobald man auch die Gleichheit ehrerer der $z_1, z_2, \cdots z_n$ untereinander gestattet.

§ 129. Nachdem durch die Betrachtungen des vorigen Paragraphen erwiesen ist, dass die Gleichungen (7) charakteristisch für die Beziehungen der z_λ, c_λ, s_λ sind, so ist es klar, dass wesentlich neue Differentialgleichungen überhaupt nicht neben (7) treten können. Trotzdem wollen wir hier noch einige ableiten, deren Formen hinreichend interessant sind.

Statt der Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ führen wir jetzt in (1) die Grössen

$$(12) \qquad z_1 + \frac{z_1^i}{f'(z_1)}t, \quad z_2 + \frac{z_2^i}{f'(z_2)}t, \quad \cdots \quad z_n + \frac{z_n^i}{f'(z_n)}t$$

ein und untersuchen, wie sich erstens die Potenzsummen und zweitens die Coefficienten der Gleichung dadurch ändern. An die Stelle von s_x tritt die Summe

$$\sum\left(z_1^x + x\,\frac{z_1^{x+i-1}}{f'(z_1)}t + \cdots\right).$$

Die Euler'schen Formeln (§ 38) zeigen dann, dass für $(x + i - 1) < (n - 1)$ der Coefficient von t gleich Null und für $(x + i - 1) = (n - 1)$ gleich Eins wird. Weiter folgt, unter Berücksichtigung von (1) und mit Benutzung einer Bezeichnung, welche der in § 87 eingeführten analog ist, die Richtigkeit der Gleichungen

$$\sum\frac{z_1^n}{f'(z_1)} = \sum\frac{C_n^{(n-1)}z_1^{n-1} - C_n^{(n-2)}z_1^{n-2} + \cdots}{f'(z_1)} = C_n^{(n-1)},$$

$$\sum\frac{z_1^{n+1}}{f'(z_1)} = \sum\frac{C_{n+1}^{(n-1)}z_1^{n-1} - C_{n+1}^{(n-2)}z_1^{n-2} + \cdots}{f'(z_1)} = C_{n+1}^{(n-1)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum\frac{z_1^{n+\alpha-1}}{f'(z_1)} = \sum\frac{C_{n+\alpha-1}^{(n-1)}z_1^{n-1} - C_{n+\alpha-1}^{(n-2)}z_1^{n-2} + \cdots}{f'(z_1)} = C_{n+\alpha-1}^{(n-1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und es ist also an die Stelle von $s_1, s_2, \cdots$ der Reihe nach zu set unter Fortlassung höherer Potenzen von t

$$(13) \quad \begin{matrix} s_1, s_2 \cdots s_{n-i-1}, \; s_{n-i} + (n-i)C_{n-1}^{(n-1)}t, \; s_{n-i+1} + (n-i+1)C_n^{(n} \\ \cdots, \; s_\alpha + \alpha C_{i+\alpha-1}^{(n-1)}t, \; \cdots, \end{matrix}$$

wobei $C_{n-1}^{(n-1)} = 1$ genommen werden muss.

Jetzt kommen wir zur Berechnung der Grössen, welche ersetzen. Es geht

$$c_1 \text{ in } c_1 + \sum \frac{z_1^i}{f'(z_1)} t,$$

$$c_2 \text{ in } c_2 + \sum \frac{z_1^i (z_2 + z_3 + \cdots)}{f'(z_1)} t = c_2 + \sum \frac{z_1^i (-z_1 + c_1)}{f'(z_1)} t,$$

$$c_3 \text{ in } c_3 + \sum \frac{z_1^i (z_2 z_3 + \cdots)}{f'(z_1)} t = c_3 + \sum \frac{z_1^i (z_1^2 - c_1 z_1 + c_2)}{f'(z_1)} t$$

u. s. f. über; so lange der höchste Exponent im Zähler des Bruches unter dem Summenzeichen $< (n-1)$ ist, verschwindet nach dem Euler'schen Satze die Summe. Für c_{n-i} erhält man dagegen

$$c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} \sum \frac{z_1^i (z_1^{n-i-1} - c_1 z_1^{n-i-2} + \cdots + c_{n-i-1})}{f'(z_1)} t$$
$$= c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} t,$$

und weiter für c_{n-i+1}, c_{n-i+2}, $\cdots$

$$c_{n-i+1} \pm \sum \frac{z_1^n - c_1 z_1^{n-1} + \cdots \pm c_{n-i} z_1^i}{f'(z_1)} t$$

$$= c_{n-i+1} \pm \sum \frac{c_{n-i+1} z_1^{i-1} - \cdots}{f'(z_1)} t = c_{n-i+1},$$

$$c_{n-i+2} \pm \sum \frac{z_1^{n+1} - c_1 z_1^n + \cdots \pm c_{n-i+1} z_1^i}{f'(z_1)} t$$

$$= c_{n-i+2} \pm \sum \frac{c_{n-i+2} z_1^{i-1} - \cdots}{f'(z_1)} t = c_{n-i+2},$$

u. s. f. Es tritt demnach an die Stelle von c_α

$$(14) \qquad \begin{cases} c_\alpha, & \text{wenn } \alpha \neq n-i, \\ c_{n-i} + (-1)^{n-i-1} t, & \text{wenn } \alpha = n-i \end{cases}$$

ist. Nimmt man nun wieder eine symmetrische Function der z_λ, drückt diese auch als Function der c_λ und als Function der s_λ aus, führt dann die Grössen (12), (13), (14) ein und vergleicht die Coefficienten von t in den drei erhaltenen Darstellungen, so ergiebt sich

$$(15) \qquad \sum \frac{z_1^i}{f'(z_1)} \frac{\partial R}{\partial z_1} = (-1)^{n-i-1} \frac{\partial R}{\partial c_{n-i}} = \sum_{k=n-i}^{\infty} k C_{k+i-1}^{(n-1)} \frac{\partial R}{\partial s_k}$$
$$(i = 0, 1, 2, \cdots).$$

§ 130. Es lässt sich auch direct zeigen, was oben durch allgemeine Schlüsse erkannt wurde, dass (15) gegen (7) nichts wesentlich Neues liefert. Man kann nämlich den Quotienten $z_1^i : f'(z_1)$ wie eine jede gebrochene Function der Wurzel z_1 in die Form einer ganzen Function

$$\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1} z_1^{n-1}$$

bringen (§ 108); dadurch geht die linke Seite von (15) in die Gestalt

$$\sum (\alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_1^2 + \cdots + \alpha_{n-1} z_1^{n-1}) \frac{\partial R}{\partial z_1}$$

über, und dieser Ausdruck lässt sich aus den linken Seiten von (7) für $i = 0, 1, 2, \cdots$ zusammensetzen. Bildet man für die mittleren Ausdrücke von (7) dasselbe Aggregat, so muss der mittlere Ausdruck von (15) entstehen, denn sonst hätte man eine für alle Functionen R identisch erfüllte Gleichung

$$p_1 \frac{\partial R}{\partial c_1} + p_2 \frac{\partial R}{\partial c_2} + \cdots + p_n \frac{\partial R}{\partial c_n} = 0,$$

die ja offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht alle $p = 0$ sind. Für die Ausdrücke rechts gilt das Gleiche.

So erhält man z. B. für $n = 2$ aus (7)

$$\frac{\partial R}{\partial z_1} + \frac{\partial R}{\partial z_2} = 2 \frac{\partial R}{\partial c_1} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_2},$$

$$z_1 \frac{\partial R}{\partial z_1} + z_2 \frac{\partial R}{\partial z_2} = c_1 \frac{\partial R}{\partial c_1} + 2c_2 \frac{\partial R}{\partial c_2}.$$

Andererseits ist für die Gleichung zweiten Grades

$$\frac{1}{f'(z_1)} = \frac{1}{2z_1 - c_1} = \frac{c_1 - 2z_2}{c_1^2 - 4c_2}, \quad \frac{z_1}{f'(z_1)} = \frac{c_1 z_1 - 2c_2}{c_1^2 - 4c_2}.$$

Multiplicirt man daher die Gleichungen des voraufgehenden Systems in geeigneter Weise, so entstehen die zu (15) gehörigen Gleichungen

$$\frac{1}{f'(z_1)} \frac{\partial R}{\partial z_1} + \frac{1}{f'(z_2)} \frac{\partial R}{\partial z_2} = - \frac{\partial R}{\partial c_2},$$

$$\frac{z_1}{f'(z_1)} \frac{\partial R}{\partial z_1} + \frac{z_2}{f'(z_2)} \frac{\partial R}{\partial z_2} = + \frac{\partial R}{\partial c_1}.$$

§ 131. Die verschiedenen Gleichungen (15) wollen wir untereinander combiniren. Es besteht (vgl. § 87) für die C die leicht abzuleitende Beziehungsreihe

$$C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} = - C_{k-1}^{(n-2)},$$

$$C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} + c_2 C_{k-2}^{(n-1)} = + C_{k-2}^{(n-3)},$$

$$C_k^{(n-1)} - c_1 C_{k-1}^{(n-1)} + \cdots - c_3 C_{k-3}^{(n-1)} = - C_{k-3}^{(n-4)},$$

. . . . . .

Combinirt man demgemäss die Formeln (15), dann erhält man

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{n-2}\left[\frac{\partial R}{\partial c_{n-1}}+c_1\frac{\partial R}{\partial c_n}\right]\\
&\qquad=(n-1)\frac{\partial R}{\partial s_{n-1}}-\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,C_{n+k-1}^{(n-2)}\frac{\partial R}{\partial s_{n+k}},\\
&(-1)^{n-3}\left[\frac{\partial R}{\partial c_{n-2}}+c_1\frac{\partial R}{\partial c_{n-1}}+c_2\frac{\partial R}{\partial c_n}\right]\\
&\qquad=(n-2)\frac{\partial R}{\partial s_{n-2}}+\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,C_{n+k-1}^{(n-3)}\frac{\partial R}{\partial s_{n+k}},\\
&(-1)^{n-4}\left[\frac{\partial R}{\partial c_{n-3}}+\cdots+c_3\frac{\partial R}{\partial c_n}\right]\\
&\qquad=(n-3)\frac{\partial R}{\partial s_{n-3}}-\sum_{k=1}^{\infty}(n+k)\,C_{n+k-1}^{(n-4)}\frac{\partial R}{\partial s_{n+k}},\\
&\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Hier kann man die rechten Seiten vereinfachen. Da die $c_1, c_2, \cdots c_n$ durch $s_1, s_2, \cdots s_n$ darstellbar sind, so kann man jedes $s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ durch $s_1, s_2, \cdots s_n$ rational ausdrücken und braucht also in den Ausdruck von R_s keine anderen als die ersten n Werthe der s_λ aufzunehmen. Thut man dies, dann fallen auf den rechten Seiten von (16) alle Summen fort, und man erhält die einfachere Gestalt

$$
\sum_{\lambda=k}^{n} c_{\lambda-k}\frac{\partial R}{\partial c_\lambda}+(-1)^k k\frac{\partial R}{\partial s_k}=0. \tag{16a}
$$

Diese Formeln gelten aber, wie ausdrücklich hervorzuheben ist, nur in dem Falle, dass R frei von $s_{n+1}, s_{n+2}, \cdots$ dargestellt wird.

Unserer Herleitung entnimmt man gleichzeitig das Resultat, dass die Ausdrücke in (16) bezw. gleich den Summen

$$
\sum\frac{z_1-c_1}{f'(z_1)}\frac{\partial R}{\partial z_1},\quad \sum\frac{z_1^2-c_1z_1+c_2}{f'(z_1)}\frac{\partial R}{\partial z_1},\quad \sum\frac{z_1^3-c_1z_1^2+c_2z_1-c_3}{f'(z_1)}\frac{\partial R}{\partial z_1},\ \cdots
$$

werden. Daraufhin lässt sich dann auch ein directer Beweis nach der mehrfach benutzten Methode geben.

Setzt man in (16a) für R ein c_i, so folgt

$$
\frac{\partial c_i}{\partial s_k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{k}c_{i-k};
$$

dabei ist $c_0=1$, und c_λ mit negativem Index λ Null.

§ 132. An die Ableitung von (7) in § 124 sind noch zwei Bemerkungen anzuknüpfen. Für $i=0$ hatte man jede Wurzel z_α durch $z_\alpha+t$ zu ersetzen. Wenn nun die Function R nicht nur eine symmetrische Function, sondern zugleich auch eine Function der Wurzel-

differenzen $(z_\alpha - z_\beta)$ ist, so ändert sich diese durch die neue Einführung von $z_\alpha + t$ für z_α nicht, und es ist für solche R

$$R(z_1 + t,\ z_2 + t,\ \cdots\ z_n + t) = R(z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_n).$$

Der Coefficient von t in der Entwickelung nach steigenden Potenzen von t ist sonach gleich Null zu setzen, und man hat für symmetrische Functionen, die gleichzeitig Functionen der Wurzeldifferenzen sind,

$$(17)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\partial R}{\partial z_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} (n + 1 - \lambda)\, c_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda} = 0.$$

In dem Falle, dass R lediglich durch $s_1, s_2, \cdots s_n$ ausgedrückt erscheint, ist die Summe rechts nur von $\lambda = 1$ bis $\lambda = n$ zu erstrecken. —

Für $i = 1$ hat man jede Wurzel z_α in $z_\alpha(1 + t)$ umzuwandeln. Wenn nun R nicht nur eine symmetrische Function, sondern zugleich eine eintypige Function

$$S(z_1^\alpha z_2^\beta \cdots z_n^\delta) \qquad (\alpha + \beta + \cdots + \delta = p)$$

ist, so tritt zu jedem Summanden von S nach der Substitution der Factor $(1 + t)^p$ hinzu, und also ist

$$R(z_1 + z_1 t,\ \cdots\ z_n + z_n t) = R + pR \cdot t + \cdots.$$

Es ist somit der Coefficient von t in der Entwickelung nach steigenden Potenzen gleich $p \cdot R$ zu setzen, und man hat für symmetrische eintypige Functionen von der Dimension p

$$(18)\qquad \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda \frac{\partial R}{\partial z_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda c_\lambda \frac{\partial R}{\partial c_\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda s_\lambda \frac{\partial R}{\partial s_\lambda} = pR.$$

In dem Falle, dass R lediglich durch $s_1, s_2, \cdots s_n$ ausgedrückt erscheint, ist die letzte Summe von $\lambda = 1$ bis $\lambda = n$ zu erstrecken.

§ 133. Wir wollen jetzt von den abgeleiteten Differentialformeln für die numerische Berechnung von symmetrischen Functionen Nutzen zu ziehen versuchen. Nach den Darlegungen von § 96 ist es stets leicht, vorgelegte eintypige, symmetrische Functionen S der Wurzeln als Functionen der Wurzelpotenzen $s_1, s_2, \cdots s_n$ darzustellen; und nach § 99 macht auch die Herstellung des litteralen Theiles der Darstellung von S durch $c_1, c_2, \cdots c_n$ keinerlei Mühe. Setzt man diese beiden vorläufigen Resultate in (16^a) ein und führt die angegebenen Differentiationen aus, dann entsteht eine Reihe von linearen Gleichungen dadurch, dass man die Coefficienten gleicher Aggregate der $c_1^\alpha c_2^\beta \cdots c_n^\delta$ einander gleichsetzt. Mit ihrer Hülfe lassen sich die noch unbekannten Coefficienten des Ausdrucks der Function durch die c_λ bestimmen. Einige Beispiele mögen diese Vorschriften erläutern.

Es soll

$$s_4 = u_0 c_1^4 + u_1 c_1^2 c_2 + u_2 c_1 c_3 + u_3 c_2^2 + u_4 c_4$$

berechnet werden; die u sind unbekannte, numerische Grössen. Aus (16ª) entsteht

$$-4\frac{\partial s_4}{\partial s_4} = -4 = u_4, \quad +3\frac{\partial s_4}{\partial s_3} = 0 = u_2 c_1 + u_4 c_1,$$

$$-2\frac{\partial s_4}{\partial s_2} = 0 = (u_1 c_1^2 + 2u_3 c_2) + u_2 c_1^2 + u_4 c_2,$$

$$+\frac{\partial s_4}{\partial s_1} = 0 = (4u_0 c_1^3 + 2u_1 c_1 c_2 + u_2 c_3) + (u_1 c_1^2 + 2u_3 c_2) c_1 + u_2 c_1 c_2 + u_4 c_3.$$

Es ist infolge dessen das System der sieben linearen Gleichungen für die fünf Grössen u

$$u_4 = -4, \quad u_2 + u_4 = 0, \quad u_1 + u_2 = 0, \quad 2u_3 + u_4 = 0,$$
$$4u_0 + u_1 = 0, \quad 2u_1 + 2u_3 + u_2 = 0, \quad u_2 + u_4 = 0$$

zu befriedigen. Man erhält hierfür widerspruchsfrei die Werthe

$$u_0 = 1, \quad u_1 = -4, \quad u_2 = 4, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = -4,$$

und somit wird

$$s_4 = c_1^4 - 4c_1^2 c_2 + 4c_1 c_3 + 2c_2^2 - 4c_4.$$

Wir nehmen ferner als zweites Beispiel

$$R = S(z_1^3 z_2^2 z_3) = s_1 s_2 s_3 - s_1 s_5 - s_2 s_4 - s_3^2 + 2s_6$$
$$= u_0 c_1^2 c_4 + u_1 c_1 c_2 c_3 + u_2 c_1 c_5 + u_3 c_2^3 + u_4 c_2 c_4 + u_5 c_3^2 + u_6 c_6$$

und erhalten hier zunächst die Differentialquotienten

$$\frac{\partial R}{\partial s_6} = 2, \quad \frac{\partial R}{\partial s_5} = -s_1 = -c_1, \quad \frac{\partial R}{\partial s_4} = -s_2 = 2c_2 - c_1^2,$$

$$\frac{\partial R}{\partial s_3} = s_1 s_2 - 2s_3 = -c_1^3 + 4c_1 c_2 - 6c_3,$$

$$\frac{\partial R}{\partial s_2} = s_1 s_3 - s_4 = c_1^2 c_2 - c_1 c_3 - 2c_2^2 + 4c_4.$$

Daraus folgt dann weiter durch Anwendung von (16ª)

$$-6 \cdot 2 = u_6; \quad u_6 = -12;$$

$$-5c_1 = u_2 c_1 + u_6 c_1; \quad u_2 = 7;$$

$$-4(2c_2 - c_1^2) = (u_4 c_2 + u_0 c_1^2) + u_2 c_1^2 + u_6 c_2; \quad u_0 = -3, \; u_4 = 4;$$

$$3(-c_1^3 + 4c_1 c_2 - 6c_3) = (u_1 c_1 c_2 + 2u_5 c_3) + (u_4 c_1 c_2 + u_0 c_1^3) + u_2 c_1 c_2 + u_6 c_3;$$
$$u_5 = -3, \; u_1 = 1;$$

$$-2(c_1^2 c_2 - c_1 c_3 - 2c_2^2 + 4c_4) = (u_1 c_1 c_3 + 3u_3 c_2^2 + u_4 c_4) + c_1(u_1 c_1 c_2 + 2u_5 c_3) + \cdots;$$
$$u_3 = 0,$$

und demnach schliesslich das Resultat

$$R = S(z_1^3 z_2^2 z_3) = -3c_1^2 c_4 + c_1 c_2 c_3 + 7c_1 c_5 + 4c_2 c_4 - 3c_3^2 - 12c_6.$$

Als drittes Beispiel wählen wir, um an ihm noch besondere Vereinfachungen der Rechnung zu zeigen,

$$R = S(z_1^2 z_2^2 z_3^2 z_4^2) = u_0 c_1 c_7 + u_1 c_2 c_6 + u_2 c_3 c_5 + u_3 c_4^2 + u_4 c_8.$$

Denkt man sich S durch die Potenzsummen s ausgedrückt, so treten nur s_λ mit geradem Index λ auf. Denn aus der Bildungsweise von § 96 geht ohne weiteres hervor, dass bei $S(z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \cdots z_n^{\alpha_n})$ nur Grössen $s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \cdots s_{2\alpha_1}, \cdots s_{\alpha_1+\alpha_2}, \cdots s_{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}, \cdots$ vorkommen können, in unserem Beispiele also nur s_λ mit geradem Index λ. Es ist daher $\frac{\partial R}{\partial s_7} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial s_3} = 0$, und dies giebt unter Verwendung von (16ᵃ)

$$u_0 c_1 + u_4 c_1 = 0, \quad u_2 c_5 + 2u_3 c_4 c_1 + u_2 c_3 c_2 + u_1 c_2 c_3 + u_0 c_1 c_4 + u_4 c_5 = 0,$$

$$u_0 = -u_1 = +u_2 = -2u_3 = -u_4.$$

Hierdurch sind die Verhältnisse der u unter einander bestimmt. Um nun eines derselben wirklich zu finden, machen wir die besondere Annahme, dass die Gleichung in z vom vierten Grade sei,

$$z^4 - c_1 z^3 + c_2 z^2 - c_3 z + c_4 = 0.$$

Hieraus folgt sofort $R = c_4^2$, also hier und allgemein $u_3 = 1$. Demnach ist jetzt jeder der Coefficienten bestimmt, und es wird

$$R = -2c_1 c_7 + 2c_2 c_6 - 2c_3 c_5 + c_4^2 + 2c_8.$$

§ 134. An den beiden ersten Beispielen des vorigen Paragraphen hat sich gezeigt, dass die Differentialgleichungen (16ᵃ) zur Bestimmung der numerischen Coefficienten ausreichen können. Dass sie aber auch wirklich stets zu diesem Zwecke ausreichen, wollen wir jetzt beweisen.

Aus der Herleitung selbst ergiebt sich, dass das System linearer Gleichungen stets ein widerspruchfreies sein wird. Bilden wir nun zunächst für $k = n$

$$(-1)^{n-1} n \frac{\partial R}{\partial s_n} = \frac{\partial R}{\partial c_n},$$

so treten auf die rechte Seite alle und nur diejenigen Coefficienten u, welche in Aggregaten $u c_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma \cdots c_n^\delta$ vorkommen, bei denen c_n einen von Null verschiedenen Exponenten δ besitzt. Gleichzeitig sieht man, dass alle diese u nach der Differentiation wie vorher mit verschiedenen Aggregaten $\delta c_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma \cdots c_n^{\delta-1}$ multiplicirt sind. Ein Vergleich mit der linken Seite giebt demnach die eindeutige Bestimmung aller dieser Coefficienten. Ist das erledigt, dann gehen wir zu

$$(-1)^{n-2}(n-1)\frac{\partial R}{\partial s_{n-1}} = \frac{\partial R}{\partial c_{n-1}} + c_1 \frac{\partial R}{\partial c_n}$$

über. Als unbekannte u können nur solche auftreten, die der erste Summand rechts neu einführt, und das sind eben nur solche, welche in Aggregaten $uc_1^\alpha c_2^\beta c_3^\gamma \cdots c_n^\delta$ vorkommen, bei denen c_{n-1} einen von Null verschiedenen Exponenten besitzt. Jeder derselben gehört einem anderen Aggregate von Potenzen der c an. Ein Vergleich mit den entsprechenden Aggregaten auf der linken Seite der Gleichung liefert demgemäss die eindeutige Bestimmung aller dieser Coefficienten. In derselben Weise geht man weiter; und dadurch zeigt es sich, dass wirklich alle u eindeutig durch die aus (16^a) fliessenden Gleichungen bestimmt sind.

§ 135. Auch die folgende Methode liefert häufig bequeme Berechnungsweisen für symmetrische Functionen. Die zu bestimmende Function $R(z_1, z_2, \cdots z_n)$ denken wir uns durch die c_i ausgedrückt und in die Form

$$R = \varrho_0 c_n^q + \varrho_1 c_n^{q-1} + \varrho_2 c_n^{q-2} + \cdots + \varrho_{q-1} c_n + \varrho_q \tag{19}$$

gebracht, worin die $\varrho_0, \varrho_1, \cdots \varrho_q$ noch unbekannte Functionen von $c_1, c_2, \cdots c_{n-1}$ allein bedeuten, und ϱ_q den Werth von $R(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_{n-1}, \zeta_n)$ angiebt, der zu den Wurzeln der Gleichung

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \mp c_{n-1} z = 0$$

gehört. Wir nehmen an, dass dieses ϱ_q gefunden ist. Weiter setzen wir voraus, dass R als Function von $s_1, s_2, \cdots s_n$ in der Form $I_q(s_1, s_2, \cdots s_n)$ dargestellt sei. Dann folgt aus (7^a) für die Annahme (19)

$$\sum_{\lambda=1}^{n-1} (n+1-\lambda) c_{\lambda-1} \left[\frac{\partial \varrho_0}{\partial c_\lambda} c_n^q + \frac{\partial \varrho_1}{\partial c_\lambda} c_n^{q-1} + \cdots \right]$$

$$+ c_{n-1} [q \varrho_0 c_n^{q-1} + (q-1) \varrho_1 c_n^{q-2} + \cdots] = \sum_{\lambda=1}^{n} \lambda s_{\lambda-1} \frac{\partial R}{\partial s_\lambda},$$

und wenn wir die als bekannt angenommene rechte Seite in die Form

$$= \sigma_0 c_n^q + \sigma_1 c_n^{q-1} + \sigma_2 c_n^{q-2} + \cdots + \sigma_{n-1} c_n + \sigma_n$$

bringen, dann ergeben sich $\varrho_{q-1}, \varrho_{q-2}, \cdots$ der Reihe nach aus den Gleichungen, welche durch Gleichsetzung der Coefficienten von c_n^0, $c_n^1, \cdots$ entstehen,

$$\begin{aligned}
c_{n-1} \varrho_{q-1} &= \sigma_n - \sum_{\lambda=1}^{n-1} (n-\lambda+1) c_{\lambda-1} \frac{\partial \varrho_q}{\partial c_\lambda}, \\
2 c_{n-1} \varrho_{q-2} &= \sigma_{n-1} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} (n-\lambda+1) c_{\lambda-1} \frac{\partial \varrho_{q-1}}{\partial c_\lambda}, \\
3 c_{n-1} \varrho_{q-3} &= \sigma_{n-2} - \sum_{\lambda=1}^{n-1} (n-\lambda+1) c_{\lambda-1} \frac{\partial \varrho_{q-2}}{\partial c_\lambda}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{20}$$

Besonders einfach gestaltet sich die Berechnungsart, wenn R eine Function der Wurzeldifferenzen von (1) ist; denn nach (17) werden dabei sämmtliche σ gleich Null zu setzen sein.

Wir werden auch hierzu zwei Beispiele behandeln, um das Verfahren zu erläutern, und zwar wollen wir gleich die zuletzt erwähnte erleichternde Voraussetzung machen, dass R eine Function der Wurzeldifferenzen von (1) ist.

Wir legen die Gleichung dritten Grades

$$z^3 - c_1 z^2 + c_2 z - c_3 = 0$$

vor und suchen für sie

$$R = (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_3)^2 = \varrho_0 c_3^2 + \varrho_1 c_3 + \varrho_2 .$$

Hier ist ϱ_2 durch die Gleichung

$$z^3 - c_1 z^2 + c_2 z = 0,$$

deren Wurzeln wir mit ζ_1, ζ_2, 0 bezeichnen, als

$$(\zeta_1 - \zeta_2)^2 \zeta_1^2 \zeta_2^2 = (c_1^2 - 4c_2) c_2^2 = \varrho_2$$

bestimmt, und nun hat man nach (20)

$$c_2 \varrho_1 = -3(2c_1 c_2^2) - 2c_1(2c_1^2 c_2 - 12c_2^2) = 18 c_1 c_2^2 - 4c_1^3 c_2,$$

$$\varrho_1 = -4c_1^3 + 18 c_1 c_2;$$

$$2c_2 \varrho_0 = -3(-12c_1^2 + 18c_2) - 2c_1(18c_1) = -54 c_2,$$

$$\varrho_0 = -27;$$

folglich wird

$$R = -27 c_3^2 - 4c_1^3 c_3 + 18 c_1 c_2 c_3 + c_1^2 c_2^2 - 4c_2^3.$$

Das zweite Beispiel mag sich direct anschliessen, indem wir die in gleicher Weise gebildete Function

$$R = (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 (z_2 - z_3)^2 \cdots (z_3 - z_4)^2$$

für die Gleichung vierten Grades

$$z^4 - c_1 z^3 + c_2 z^2 - c_3 z + c_4 = 0$$

berechnen. Wir setzen hier

$$R = \varrho_0 c_4^3 + \varrho_1 c_4^2 + \varrho_2 c_4 + \varrho_3 . \tag{21}$$

ϱ_3 wird aus der Gleichung

$$z^4 - c_1 z^3 + c_2 z^2 - c_3 z = 0,$$

deren Wurzeln wir mit ζ_1, ζ_2, ζ_3, 0 bezeichnen, als

$$(\zeta_1 - \zeta_2)^2 (\zeta_1 - \zeta_3)^2 (\zeta_2 - \zeta_3)^2 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \zeta_3^2$$
$$= -27 c_3^4 - 4c_1^3 c_3^3 + 18 c_1 c_2 c_3^3 + c_1^2 c_2^2 c_3^2 - 4c_2^3 c_3^2 = \varrho_3$$

bestimmt. Die Gleichungen (20) liefern dann

$$c_3\varrho_2 = -4[-12c_1^2c_3^3+18c_2c_3^3+2c_1c_2^2c_3^2]$$
$$-3c_1[18c_1c_3^3+2c_1^2c_2c_3^2-12c_2^2c_3^2]$$
$$-2c_2[-108c_3^3-12c_1^3c_3^2+54c_1c_2c_3^2+2c_1^2c_2^2c_3-8c_2^3c_3];$$
$$\varrho_2 = -6c_1^2c_3^2+144c_2c_3^2-80c_1c_2^2c_3+18c_1^3c_2c_3-4c_1^2c_2^3+16c_2^4.$$

Daraus erhält man weiter auf demselben Wege

$$2c_3\varrho_1 = -4(-12c_1c_3^2-80c_2^2c_3+54c_1^2c_2c_3-8c_1c_2^3)$$
$$-3c_1(144c_3^2-160c_1c_2c_3+18c_1^3c_3-12c_1^2c_2^2+64c_2^3)$$
$$-2c_2(-12c_1^2c_3+288c_2c_3-80c_1c_2^2+18c_1^3c_2);$$
$$\varrho_1 = -192c_1c_3-128c_2^2+144c_1^2c_2-27c_1^4.$$

Endlich ergiebt sich

$$3c_3\varrho_0 = -4(-192c_3+288c_1c_2-108c_1^3)-3c_1(-256c_2+144c_1^2)$$
$$-2c_2(-192c_1);$$
$$\varrho_0 = 256.$$

Damit ist dann die Bestimmung von R vollendet, indem die gefundenen Werthe für die ϱ nur noch in (21) einzutragen sind.

Zwölfte Vorlesung.

Die Resultanten und ihre Darstellung.

§ 136. Es sind zwei ganze Functionen der Variablen z vorgelegt,

$$(1)\qquad \begin{aligned} f(z) &= a_0z^m+a_1z^{m-1}+a_2z^{m-2}+\cdots+a_m,\\ g(z) &= b_0z^n+b_1z^{n-1}+b_2z^{n-2}+\cdots+b_n, \end{aligned} \qquad (m\geq n);$$

es sollen die charakteristischen Bedingungen dafür abgeleitet werden, dass beide Functionen einen gemeinsamen Theiler besitzen, oder, was dasselbe besagt, dass die beiden Gleichungen

$$(2)\qquad f(z)=0,\quad g(z)=0$$

mindestens eine gemeinsame Wurzel haben.

Wir bezeichnen die Wurzeln von

$$f(z)=0 \text{ durch } \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m,$$
$$g(z)=0 \quad \text{„} \quad \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n;$$

dann können wir die gesuchte Bedingung einfach dahin formuliren, dass ein $\alpha_\varkappa$ mit einem β_λ übereinstimmen muss, und dass also das Product

$$(3) \qquad \begin{aligned} R_{f,g} = a_0^n b_0^m &(\alpha_1 - \beta_1)(\alpha_1 - \beta_2)\cdots(\alpha_1 - \beta_n) \\ &(\alpha_2 - \beta_1)(\alpha_2 - \beta_2)\cdots(\alpha_2 - \beta_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &(\alpha_m - \beta_1)(\alpha_m - \beta_2)\cdots(\alpha_m - \beta_n) \end{aligned}$$

verschwindet. Hier ist die geforderte charakteristische Bedingung durch das Nullwerden einer Function der Wurzeln allein ausgedrückt, sobald man den Factor $a_0^n b_0^m$ weglässt. Fasst man aber umgekehrt das zurückbleibende Product in Partialproducte seinen m Zeilen oder seinen n Spalten nach zusammen und bedenkt, dass

$$g(z) = b_0(z - \beta_1)(z - \beta_2)\cdots(z - \beta_n),$$
$$f(z) = a_0(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)\cdots(\alpha_m - z)\cdot(-1)^m$$

ist, dann geht (3) in die Gestalt

$$(4) \quad R_{f,g} = a_0^n g(\alpha_1) g(\alpha_2)\cdots g(\alpha_m) = (-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1) f(\beta_2)\cdots f(\beta_n)$$

über; hier sieht man, dass der Factor $a_0^n b_0^n$ nothwendig war, um $R_{f,g}$ zu einer ganzen Function der Coefficienten $a_\varkappa$, b_λ zu machen. Dieser Ausdruck $R_{f,g}$, welcher eine ganze Function der $a_\varkappa$, b_λ ist, giebt durch sein Verschwinden die charakteristische Bedingung dafür, dass f und g einen gemeinsamen Theiler besitzen. Er heisst die Resultante von f und g.

§ 137. Der erste Ausdruck von $R_{f,g}$ in (4) zeigt, dass die Resultante homogen in den $b_\varkappa$ vom m^{ten} Grade ist; ebenso zeigt der zweite, dass sie homogen in den $a_\varkappa$ vom n^{ten} Grade ist.

Ferner ist leicht zu erkennen, dass R in der Gesammtheit der Coefficienten $a_\varkappa$, b_λ eine isobarische Function vom Gewichte mn wird (vgl. § 99). Ersetzt man nämlich die Functionen f und g durch

$$a_0 z^m + a_1 \varrho z^{m-1} + a_2 \varrho^2 z^{m-2} + \cdots + a_m \varrho^m$$

und

$$b_0 z^n + b_1 \varrho z^{m-1} + b_2 \varrho^2 z^{n-2} + \cdots + b_n \varrho^n,$$

so gehen die Wurzeln $\alpha_\varkappa$, β_λ in $\alpha_\varkappa \varrho$, $\beta_\lambda \varrho$, und der Ausdruck (3) geht in

$$a_0^n b_0^m \varrho^{mn} \prod\prod (\alpha_\varkappa - \beta_\lambda) = \varrho^{mn} R_{f,g}$$

über. Es muss demnach $R_{f,g}$ so beschaffen sein, dass, wenn man jedes $a_\varkappa$ und $b_\varkappa$ durch $a_\varkappa \varrho^\varkappa$ und $b_\varkappa \varrho^\varkappa$ ersetzt, sich die Function einfach mit ϱ^{mn} multiplicirt; wegen der Willkürlichkeit der a, b muss dies bei jedem einzelnen Gliede der Fall sein, welches in $R_{f,g}$ auftritt, d. h. wenn

$$\text{cst.}\, a_0^{p_0} a_1^{p_1}\cdots a_m^{p_m} b_0^{q_0} b_1^{q_1}\cdots b_n^{q_n}$$

ein solches Glied ist, dann muss, wie behauptet wurde,

$$1p_1 + 2p_2 + \cdots + mp_m + 1q_1 + 2q_2 + \cdots + nq_n = mn$$

werden.

Aehnlich wie bei den symmetrischen Functionen ist es durch die soeben bewiesenen Sätze auch hier möglich, den litteralen Theil der Resultante zweier Functionen sofort aufzustellen. Ist z. B. $m = n = 2$, also $mn = 4$, so folgt, dass nur Glieder der Form

$$u_0(a_0^2b_2^2 + a_2^2b_0^2) + u_1(a_0a_1b_1b_2 + a_1a_2b_0b_1) + u_2(a_0a_2b_0b_2) + u_3(a_0a_2b_1^2 + a_1^2b_0b_2) + u_4a_1^2b_1^2$$

auftreten können. Dass Glieder wie $a_0^2b_2^2$ und $a_2^2b_0^2$ oder wie $a_0a_2b_1^2$ und $a_1^2b_0b_2$ gleiche Coefficienten haben, folgt aus der Symmetrie der Bildung hinsichtlich der Functionen f, g von gleichem Grade.

§ 138. Ersetzt man die Function g durch das Product $g_1(z)g_2(z)$ zweier Functionen der Ordnungen n_1 und n_2, dann zeigt die Formel (4) die Beziehung

$$R_{f,g_1g_2} = a_0^{n_1+n_2}(g_1(\alpha_1)g_2(\alpha_1)) \cdots (g_1(\alpha_m)g_2(\alpha_m))$$
$$= a_0^{n_1}g_1(\alpha_1) \cdots g_1(\alpha_m) \cdot a_0^{n_2}g_2(\alpha_1) \cdots g_2(\alpha_m)$$

d. h. es ist

$$R_{f,g_1 \cdot g_2} = R_{f,g_1} \cdot R_{f,g_2}. \tag{5}$$

Aus derselben Formel (4) folgt, wenn q eine Constante bedeutet,

$$R_{f,g+qf} = a_0^n[g(\alpha_1) + qf(\alpha_1)] \cdots [g(\alpha_m) + qf(\alpha_m)],$$

d. h. es wird, weil $f(\alpha_1) = 0, \cdots$ ist, die Gleichung gelten

$$R_{f,g+qf} = R_{f,g}. \tag{6}$$

Nimmt man in (4) ferner $g(z) = z^n$, dann werden sämmtliche β gleich Null und es ergiebt sich die Specialformel

$$R_{f,z^n} = (-1)^{mn}[f(0)]^n = (-1)^{mn}a_m^n. \tag{7}$$

§ 139. Die Berechnung von $R_{f,g}$ durch (4) muss sich auf die Auswerthung der verschiedenen in (4) eingehenden symmetrischen Functionen stützen. Das ist sehr unbequem. Einfacher lässt sich die Berechnung auf die Darstellung von $R_{f,g}$ durch eine Determinante gründen. Wir betrachten zu diesem Zwecke das System von $(m+n)$ Gleichungen

$$\begin{aligned}
(a_m - f(z)) + a_{m-1}z + \cdots + a_0z^m &= 0,\\
(a_m - f(z))z + \cdots + a_1z^m + a_0z^{m+1} &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots

und fassen sie als homogene, lineare Beziehungen für die $(m+n)$ Grössen $1, z, z^2, \cdots z^{m+n-1}$ auf. Die n ersten sind wegen (1) identisch befriedigt, die m letzten gelten nur für $z = \beta_1, \beta_2, \cdots \beta_n$. Man erhält also nach anderer Anordnung von Spalten und Zeilen die für $u = f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots f(\beta_n)$ geltende Gleichung n^{ten} Grades in u

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_m - u & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a_m - u & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_m - u \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} (n \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ \\ \} (m \text{ Zeilen}). \\ \\ \end{matrix}$$

Diese Determinante ist demnach eine Function n^{ten} Grades in u, deren Nullwerthe die Grössen $f(\beta_1), f(\beta_2), \cdots f(\beta_n)$ bestimmen. Dividirt man diese Function durch den in ihr auftretenden Coefficienten von u^n, dann wird das von u freie Glied $= (-1)^n \cdot f(\beta_1) \cdot f(\beta_2) \cdots f(\beta_n)$. Der Coefficient von $(-u)^n$ ist hier $(-1)^{mn} b_0^m$, und somit kommt man zu der Gleichung

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_0 & \cdots & \cdots & b_n \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \} (n \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ \\ \} (m \text{ Zeilen}) \\ \\ \end{matrix} \begin{matrix} = R_{f,g} = a_0^n g(\alpha_1) \cdots g(\alpha_m) \\ = (-1)^{mn} b_0^m f(\beta_1) \cdots f(\beta_n), \end{matrix}$$

welche die Resultante in der Form einer Determinante vom Grade $(m+n)$ darstellt.

§ 140. Wir dringen auf dem folgenden, von Euler*) angegebenen Wege der Betrachtung noch tiefer in die Natur der Frage ein. Haben $f = 0$, $g = 0$ eine Wurzel Θ gemeinsam, dann besitzen die Polynome der Gleichungen die Formen

$$f = (z - \Theta) \cdot f_1(z), \quad g = (z - \Theta) \cdot g_1(z),$$

wobei f_1, g_1 ganze Functionen der Grade $(m-1)$, $(n-1)$ sind.

Hieraus folgt dann durch Combination die Gleichung

$$(9) \qquad f \cdot g_1 - g \cdot f_1 = 0.$$

*) Euler: Mém. de Berlin 1764; p. 96

Umgekehrt ist durch die Existenz einer solchen Gleichung, in welcher f_1, g_1 nicht identisch verschwindende, ganze Functionen der Grade $(m-1)$, $(n-1)$ bedeuten, auch der Beweis für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel von $f=0$ und $g=0$ zu führen; denn $g_1(z)$ kann nicht alle linearen Factoren $(z-\beta_\lambda)$ von $g(z)$ enthalten, und daher giebt es mindestens einen Linearfactor von $g(z)$, der auch in $f(z)$ auftritt. Schreiben wir jetzt

$$(10)\qquad \begin{aligned} f_1 &= p_0 z^{m-1} + p_1 z^{m-2} + \cdots + p_{m-1}, \\ g_1 &= q_0 z^{n-1} + q_1 z^{n-2} + \cdots + q_{n-1}, \end{aligned}$$

tragen dies in (9) ein und setzen in dem nach Potenzen von z geordneten Ausdrucke alle einzelnen Coefficienten $=0$, so entsteht das Gleichungssystem

$$(11)\qquad \begin{array}{rrr} a_0 q_0 & -b_0 p_0 & =0, \\ a_1 q_0 + a_0 q_1 & -b_1 p_0 - b_0 p_1 & =0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_m q_{n-2} + a_{m-1} q_{n-1} & -b_n p_{m-2} - b_{n-1} p_{m-1} & =0, \\ a_m \quad q_{n-1} & -b_n \quad p_{m-1} & =0. \end{array}$$

Die Existenz einer gemeinsamen Wurzel Θ fordert somit, dass diese in den p und q homogenen Relationen durch ein System von Werthen p, q, die nicht sämmtlich verschwinden, erfüllt werden könne. Die Determinante muss also gleich Null sein. Sie ist nach Umstellung von Zeilen und Colonnen gleich der in (8) aufgeschriebenen und wieder gleich der Resultante $R_{f,g}$.

Diese Methode trägt noch weiter. Kann man zwei nicht identisch verschwindende, ganze Functionen $f_1^{(1)}$, $g_1^{(1)}$ der Grade $(m-2)$, $(n-2)$ bestimmen, für die identisch

$$(9^*)\qquad f \cdot g_1^{(1)} - g \cdot f_1^{(1)} = 0$$

wird, so besitzen f, g einen gemeinsamen Factor zweiten Grades und umgekehrt, so dass in (9*) die charakteristischen Bedingungen für das Bestehen zweier gemeinsamer Wurzeln vereinigt sind. Der Beweis für diese neue Behauptung ist dem bei (9) gegebenen durchaus analog. Wir brauchen hier in f_1, g_1 aus (10) nur p_0, q_0 gleich Null zu setzen und das Gleiche in dem Gleichungssysteme (11) zu thun, um den jetzt zu untersuchenden Fall vor uns zu haben. Das System der homogenen Gleichungen besteht dann aus $(m+n-1)$ Relationen zwischen $(m+n-2)$ Unbekannten, und die hinreichenden Bedingungen für unseren Fall liegen in dem Verschwinden aller Determinanten $(m+n-2)^{\text{ten}}$ Grades, die aus der Matrix

$$\left.\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right\} \begin{array}{l} (n-1 \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ (m-1 \text{ Zeilen}) \\ \\ \\ \end{array} \qquad (m+n-1 \text{ Spalten})$$

entspringen. Bekanntlich sind dies nur zwei Bedingungen.

In derselben Weise kann man fortfahren.

Für $m = n = 2$ z. B. erhält man als charakteristische Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel vermittels des Systems

$$\begin{aligned} a_0\beta_0 \qquad\quad - b_0\alpha_0 \qquad\quad &= 0, \\ a_1\beta_0 + a_0\beta_1 - b_1\alpha_0 - b_0\alpha_1 &= 0, \\ a_2\beta_0 + a_1\beta_1 - b_2\alpha_0 - b_1\alpha_1 &= 0, \\ a_2\beta_1 \qquad\quad - b_2\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

die eine Gleichung

$$(12)\quad 0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = (a_0b_2 - a_2b_0)^2 - (a_0b_1 - a_1b_0)(a_1b_2 - a_2b_1);$$

und für die Existenz zweier gemeinsamen Wurzeln bei $m = n = 2$ aus dem Systeme

$$\begin{aligned} a_0\beta_1 - b_0\alpha_1 &= 0, \\ a_1\beta_1 - b_1\alpha_1 &= 0, \\ a_2\beta_1 - b_2\alpha_1 &= 0 \end{aligned}$$

zwei von den drei Gleichungen des Systems

$$0 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix},$$

d. h.

$$a_0 : a_1 : a_2 = b_0 : b_1 : b_2 .$$

Man erkennt leicht, dass es auch ausreicht, zu der Bedingung (12) noch

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} = 0$$

hinzuzunehmen.

§ 141. An diese Euler'sche Methode lässt sich am einfachsten die Ableitung der charakteristischen Bedingungen der Existenz eines grössten gemeinsamen Theilers von bestimmtem Grade für die Functionen f und g knüpfen.

Aus dem Systeme (11) erkennen wir, dass das Verschwinden von (8) die nothwendige Bedingung für die Existenz eines Theilers vom ersten Grade liefert. Wir nehmen an, (8) wäre erfüllt. Dann setzen wir

$$(10^a)\qquad \begin{aligned} f_1^{(1)} &= p_0' z^{m-2} + p_1' z^{m-3} + \cdots + p_{m-2}', \\ g_1^{(1)} &= q_0' z^{n-2} + q_1' z^{n-3} + \cdots + q_{n-2}' \end{aligned}$$

mit unbestimmten Coefficienten p', q', tragen dies in die Function

$$(9^a)\qquad f\cdot g_1^{(1)} - g\cdot f_1^{(1)} = c_0' z^{m+n-2} + c_1' z^{m+n-3} + \cdots + c_{m+n-2}'$$

ein und bilden das System der Coefficienten

$$\begin{aligned}
a_0 q_0' &\qquad\qquad - b_0 p_0' &&= c_0', \\
a_1 q_0' + a_0 q_1' &\qquad\qquad - b_1 p_0' - b_0 p_1' &&= c_1', \\
&\cdots\cdots\cdots

$$c_0' = 0,\ c_1' = 0,\ \cdots\ c_{m+n-4}' = 0,\ c_{m+n-3}' = 0$$

befriedigen. Dadurch wird wieder gemäss (9^a)

$$f \cdot g_1^{(1)} - g \cdot f_1^{(1)} = c_{m+n-2}'.$$

Hier muss die rechte Seite zu Null werden; denn f und g haben einen Factor gemeinsam, und es giebt demnach einen Werth von z, der die linke Seite zum Verschwinden bringt. Aus

$$f \cdot g_1^{(1)} - g \cdot f_1^{(1)} = 0$$

folgt nun genau wie oben bei (9), dass f und g einen Factor mindestens vom zweiten Grade gemein haben.

Ist $R_{f,g} = 0$ und $R^{(1)} = 0$, dann setzen wir

$$(10^b) \qquad \begin{aligned} f_1^{(2)} &= p_0'' z^{m-3} + p_1'' z^{m-4} + \cdots + p_{m-3}'', \\ g_1^{(2)} &= q_0'' z^{n-3} + q_1'' z^{n-4} + \cdots + q_{n-3}'' \end{aligned}$$

mit unbestimmten Coefficienten p'', q'', tragen dies in die Function

$$(9^b) \qquad f \cdot g_1^{(2)} - g \cdot f_1^{(2)} = c_0'' z^{m+n-3} + \cdots + c_{m+n-3}''$$

ein und bilden wieder die Reihe der $(m + n - 2)$ Coefficienten

$$(11^b) \qquad \begin{aligned} a_0 q_0'' \qquad\quad - b_0 p_0'' \qquad\quad &= c_0'', \\ a_1 q_0'' + a_0 q_1'' - b_1 p_0'' - b_0 p_1'' &= c_1'', \\ \cdots\cdots\cdots\

die charakteristischen Bedingungen dafür, dass f und g einen Theiler vom zweiten und von keinem höheren Grade gemeinsam haben.

In gleicher Weise können wir fortgehen. Definiren wir daher für $\nu = 1, 2, 3, \cdots$

$$(8^c) \qquad R^{(\nu)} = \left|\begin{array}{cccccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_n & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}(n-\nu \text{ Zeilen}) \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\}(m-\nu \text{ Zeilen}), \end{array}$$

so können wir sagen: Es liefern

$$R_{f,g} = 0,\ R^{(1)} = 0, \cdots R^{(\varrho-1)} = 0,\ R^{(\varrho)} \neq 0$$

die charakteristischen Bedingungen dafür, dass f und g einen Theiler vom ϱ^{ten} und von keinem höheren Grade gemeinsam haben*).

§ 142. Bézout hat eine, dann weiter von Jacobi durchforschte Methode angegeben, welche die Resultante in der Gestalt einer Determinante vom m^{ten} Grade $(m > n)$ liefert**).

Ist g von geringerem Grade als f, so bilden wir nach (5) und (7)

$$g_1(z) = g(z) \cdot z^{m-n},$$

$$R_{f,g} = \frac{(-1)^{m(m-n)}}{a_m^{m-n}} R_{f,g_1}.$$

Dass hierbei a_m als von Null verschieden angesehen werden muss, ist keine wesentliche Beschränkung. Die letzte Formel zeigt, dass wir f und g als von gleichem Grade voraussetzen dürfen.

Wir führen nun die folgenden abkürzenden Bezeichnungen ein

$$(\lambda, \mu) = a_\lambda b_\mu - a_\mu b_\lambda;$$

$$d_{ik} = (0, i+k-1) + (1, i+k-2) + \cdots + (i-1, k).$$

Für die d besteht auch die Gleichung

$$d_{ki} = (0, i+k-1) + (1, i+k-2) + \cdots + (k-1, i);$$

und weil die beiden rechten Seiten sich nur durch verschwindende Glieder $(\lambda, \mu) + (\mu, \lambda)$ oder (ν, ν) unterscheiden, so ist

$$d_{ki} = d_{ik}.$$

---

*) Diese Herleitung ist von W. Scheibner gegeben: „Mathematische Bemerkungen." Leipz. Ber. 40. S. 1—13. Vgl. auch M. Noether: „Ueber den gemeinsamen Factor zweier binären Formen" Erl. Ber. 1895; 12. Nov.

**) Bézout: Mém. de Paris 1764: p. 317. — Jacobi: De eliminatione variabilis e duabus aequationibus algebraicis. Werke III: 295.

Hierfür erhält man

$$
\begin{aligned}
a_0 g - b_0 f &= d_{11} z^{m-1} + d_{12} z^{m-2} + \cdots + d_{1m} \\
(a_0 z + a_1) g - (b_0 z + b_1) f &= d_{21} z^{m-1} + d_{22} z^{m-2} + \cdots + d_{2m} \\
(a_0 z^2 + a_1 z + a_2) g - (b_0 z^2 + b_1 z + b_2) f &= d_{31} z^{m-1} + d_{32} z^{m-2} + \cdots + d_{3m} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left(\frac{f - a_m}{z}\right) g - \left(\frac{g - b_m}{z}\right) f &= d_{m1} z^{m-1} + d_{m2} z^{m-2} + \cdots + d_{mm}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Für jede gemeinsame Wurzel $z = \Theta$ verschwinden die linken Seiten von (13), also ist dann

$$S = |\, d_{ik} \,| = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m). \tag{14}$$

Dieser Determinante hat Herr Sylvester (On a theory of the syzygetic relations etc.; Phil. Transact. of the R. Acad. of London. V. 143; 1853) den Namen Bézoutiante gegeben. Unserer Ableitung nach ist ihr Verschwinden eine nothwendige Bedingung für die Existenz einer gemeinsamen Wurzel von $f = 0$, $g = 0$. Dass dies umgekehrt auch hinreichend ist, lässt sich in directer Anknüpfung an die Form von S zeigen (§ 145). Wir wollen dasselbe ferner in § 144 durch Vergleichung von S mit $R_{f,g}$ nachweisen.

Cayley hat den Functionen (13) eine andere Erzeugungsweise gegeben*). Bildet man

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z)g(\zeta) - f(\zeta)g(z)}{z - \zeta} &= g(z)\,\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} - f(z)\,\frac{g(z) - g(\zeta)}{z - \zeta} \\
&= g(z)[a_0(\zeta^{m-1} + z\zeta^{m-2} + \cdots) + a_1(\zeta^{m-2} + z\zeta^{m-3} + \cdots)] \\
&\quad - f(z)[b_0(\zeta^{m-1} + z\zeta^{m-2} + \cdots) + b_1(\zeta^{m-2} + z\zeta^{m-3} + \cdots)] \\
&= [g(z)a_0 - f(z)b_0]\zeta^{m-1} + [g(z)(a_0 z + a_1) - f(z)(b_0 z + b_1)]\zeta^{m-2} + \cdots,
\end{aligned}
$$

so treten sie als Coefficienten der Potenzen ζ^{m-1}, ζ^{m-2}, $\cdots$ auf. Uebrigens hat Jacobi (Werke III; 299) bereits die Form

$$g(z)\,\frac{\partial f(z)}{\partial z} - f(z)\,\frac{\partial g(z)}{\partial z}$$

zur Berechnung der Functionen (13) benutzt.

Ueber weitere Darstellungen vergleiche man Baltzer's Theorie und Anwendung der Determinanten (§ 11).

§ 143. Wir können hier auch noch an frühere Untersuchungen anknüpfen. Wenn wir in den Gleichungen (13) aus den beiden ersten z^{m-1}, dann aus den drei ersten z^{m-2}, u. s. w. durch lineare Combinationen eliminiren, so gelangen wir zu dem Gleichungssysteme

*) Cayley: Note sur la méthode d'élimination de Bézout. J. für M. 53. S. 366.

$$
\begin{aligned}
a_0 g - b_0 f &= d'_{11} z^{m-1} + d'_{12} z^{m-2} + d'_{13} z^{m-3} + \cdots, \\
\psi_1 g - \varphi_1 f &= \qquad d'_{22} z^{m-2} + d'_{23} z^{m-3} + \cdots, \\
\psi_2 g - \varphi_2 f &= \qquad\qquad d'_{33} z^{m-3} + \cdots,
\end{aligned} \tag{13a}
$$

in welchem

$$
d'_{1\alpha} = d_{1\alpha}, \; d'_{2\alpha} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{1\alpha} \\ d_{21} & d_{2\alpha} \end{vmatrix}, \; d'_{3\alpha} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{1\alpha} \\ d_{21} & d_{22} & d_{2\alpha} \\ d_{31} & d_{32} & d_{3\alpha} \end{vmatrix}, \; \cdots
$$

ist. Bezeichnet man eine beliebige der Gleichungen (13a) kurz durch

$$\Psi \cdot g - \Phi \cdot f = F,$$

dann folgt sofort wegen $[\psi_\alpha] = [\varphi_\alpha] = \alpha$

$$[\Psi] + [F] \leqq m - 1;$$

es muss also nach den § 72 gegebenen Auseinandersetzungen die Reihe der Functionen rechts in (13a) mit den Restfunctionen identisch sein, die bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers von f und g vorkommen, oder von diesen nur durch gewisse Factoren unterschieden sein. In dem sogenannten regulären Falle, in dem jeder der Quotienten der Divisionen vom ersten Grade ist, erhält man die Restfunctionen selbst oder mit Constanten multiplicirt, und die obigen Ausdrücke für die d' geben eine neue Darstellung ihrer Coefficienten.

§ 144. Wir kommen jetzt zu der Vergleichung der beiden Determinanten S und $R_{f,g}$. Für die Umformung der einen in die andere findet sich bei Baltzer (Determ. § 11) ein Beweis, dem Herr Gordan*) eine concisere Fassung gegeben hat. Wir wollen hier einen anderen vortragen, der den Vorzug besitzt, unverändert auf die Subdeterminanten $R^{(1)}$, $R^{(2)}$, $\cdots$ in (8c) anwendbar zu sein. Wir setzen auch hier wieder $m = n$ voraus.

Aus $R^{(\nu)}$ stellen wir zunächst ein $R_1^{(\nu)} = \pm R^{(\nu)}$ dadurch her, dass wir die Gesammtzeilen der a für sich in umgekehrter Reihenfolge schreiben und ebenso die der b, also die $(m - \nu - \alpha)^{\text{te}}$ Zeile als $(\alpha + 1)^{\text{te}}$ und die $(2m - 2\nu - \alpha)^{\text{te}}$ als $(m - \nu + \alpha + 1)^{\text{te}}$. Aus $R_1^{(\nu)}$ leiten wir ein $R_2^{(\nu)} = \pm R_1^{(\nu)}$ dadurch ab, dass wir die $(m - \nu + \alpha)^{\text{te}}$ Spalte in umgekehrter Elementen-Folge zur α^{ten} Zeile machen ($\alpha = 1, 2, \cdots m - \nu$) und die α^{te} Spalte auch von unten nach oben geschrieben zur $(m - \nu + \alpha)^{\text{ten}}$ Zeile. Endlich formen wir ein $R_3^{(\nu)}$ aus $R_2^{(\nu)}$, indem wir die letzten $(m - \nu)$ Zeilen und Spalten je mit (-1) multipliciren. Bildet man nun

$$R_3^{(\nu)} \cdot R_1^{(\nu)} = \pm R^{(\nu)} \cdot R^{(\nu)},$$

*) Vorlesungen über Invariantentheorie; herausgeg. v. Kerschensteiner. Bd. 1; S. 153.

indem man wie gewöhnlich die Zeilen des ersten Factors mit den Spalten des zweiten combinirt, so erhält man eine Determinante, die sich sofort als das Quadrat von

$$S^{(\nu)} = |\, d_{ik} \,| \qquad (i, k = 1, 2, \cdots m - \nu) \tag{15}$$

ausweist. Es unterscheiden sich demnach $R^{(\nu)}$ und $S^{(\nu)}$ höchstens durch ihr Vorzeichen. Bevor wir dieses bestimmen, wollen wir an einem Beispiele den Gang der Rechnung erläutern. Es sei $m = 4$, $\nu = 1$; dann wird

$$\begin{vmatrix} b_3 & b_2 & b_1 & -a_3 & -a_2 & -a_1 \\ b_4 & b_3 & b_2 & -a_4 & -a_3 & -a_2 \\ 0 & b_4 & b_3 & 0 & -a_4 & -a_3 \\ -b_0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ -b_1 & -b_0 & 0 & a_1 & a_0 & 0 \\ -b_2 & -b_1 & -b_0 & a_2 & a_1 & a_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (0,1) & (0,2) & (0,3) & 0 & (4,1) & (4,2) \\ (0,2) & (0,3)+(1,2) & (0,4)+(1,3) & (1,4) & 0 & 0 \\ (0,3) & (0,4)+(1,3) & (1,4)+(2,3) & (2,4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (0,1) & (0,2) & (0,3) \\ 0 & 0 & 0 & (0,2) & (0,3)+(1,2) & (0,4)+(1,3) \\ 0 & 0 & 0 & (0,3) & (0,4)+(1,3) & (1,4)+(2,3) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}^2 .$$

Um das noch fehlende Vorzeichen zu bestimmen, beachten wir, dass in $R^{(\nu)}$ die Hauptdiagonale das Glied $a_0^{m-\nu} b_{m-\nu}^{m-\nu}$ liefert. In $S^{(\nu)}$ enthalten von allen d_{ik} nur

$$d_{1,\,m-\nu} = (0, m-\nu) + \cdots \quad d_{2,\,m-\nu-1} = (0, m-\nu) + \cdots \cdots$$
$$= a_0 b_{m-\nu} + \cdots \quad , \qquad = a_0 b_{m-\nu} + \cdots \quad , \cdots$$

das Glied $a_0 b_{m-\nu}$. Folglich tritt $a_0^{m-\nu} b_{m-\nu}^{m-\nu}$ hier in der Nebendiagonale auf und hat also das Zeichen $(-1)^{\frac{1}{2}(m-\nu)(m-\nu-1)}$.

Es ist sonach durch

$$R^{(\nu)} = (-1)^{\frac{1}{2}(m-\nu)(m-\nu-1)} S^{(\nu)} \tag{16}$$

die Determinante des Grades $2(m-\nu)$ in eine solche des Grades $(m-\nu)$ umgewandelt.

Daraus folgt, dass die charakteristischen Bedingungen für das Bestehen eines gemeinsamen Theilers genau vom Grade ϱ für die beiden Functionen m^{ten} Grades f und g durch

$$S = 0, \quad S^{(1)} = 0, \quad \cdots \quad S^{(\varrho-1)} = 0, \quad S^{(\varrho)} \neq 0$$

gegeben werden.

§ 145. Aus (13) bilden wir, nachdem die erste Zeile mit der Constanten α_1, die zweite mit α_2 u. s. f., die $\varkappa^{\text{te}}$ mit $\alpha_\varkappa$ multiplicirt ist, durch Addition

$$\begin{aligned} &g[a_0\alpha_1+(a_0 z+a_1)\alpha_2+\cdots+(a_0 z^{\varkappa-1}+\cdots)\alpha_\varkappa]-f\cdot[b_0\alpha_1+(b_0 z+b_1)\alpha_2+\cdots] \\ (17)\quad &=[d_{11}\alpha_1+d_{21}\alpha_2+\cdots+d_{\varkappa 1}\alpha_\varkappa]z^{m-1}+[d_{12}\alpha_1+d_{22}\alpha_2+\cdots+d_{\varkappa 2}\alpha_\varkappa]z^{m-2} \\ &\quad+\cdots+[d_{1m}\alpha_1+d_{2m}\alpha_2+\cdots+d_{\varkappa m}\alpha_\varkappa]. \end{aligned}$$

Ist demnach die Determinante der ersten $\varkappa$ Klammern rechts, nämlich

$$S^{(m-\varkappa)} = |\, d_{ik}\,| \qquad (i,\ k = 1,\ 2,\ \cdots\ \varkappa)$$

gleich Null, dann kann man ein System $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_\varkappa$ bestimmen, dessen Elemente nicht sämmtlich verschwinden, und für welches die linke Seite von (17) sich auf eine Function des Grades $(m-\varkappa-1)$ reducirt.

Nehmen wir nun zunächst $\varkappa = m$, und setzen wir $S = 0$ voraus, dann folgt wegen (17)

$$g\cdot f_1 - f\cdot g_1 = 0, \qquad ([f_1] = [g_1] = m-1)$$

und daraus, dass f und g einen gemeinsamen Theiler ersten Grades haben. Ist auch $S^{(1)} = 0$, dann folgt, dass weiter auch für $\varkappa = m-1$

$$g\cdot f_1^{(2)} - f\cdot g_1^{(2)} = \text{cst.}, \qquad ([f_2] = [g_2] = m-2)$$

wird; da aber f und g einen Theiler gemeinsam hatten, so muss die Constante rechts gleich Null sein; und dann zeigt die Gleichung weiter, dass der Theiler zum zweiten Grade aufsteigt. Ist dagegen $S^{(1)} \neq 0$, dann liefert die letzte Gleichung den Beweis dafür, dass der gemeinsame Factor von f und g nur vom ersten und nicht von höherem Grade sein kann.

Auf diese Weise erkennt man auch direct nach der Methode des § 141 die Richtigkeit des Theorems, welches am Schlusse des vorigen Paragraphen durch Determinanten-Umwandlungen abgeleitet worden war.

Dreizehnte Vorlesung.

Eigenschaften der Resultanten. — Wurzelexistenzbeweis.

§ 146. Wir wollen jetzt eine Reihe von Eigenschaften der Resultanten ableiten. In der vorigen Vorlesung haben wir bereits Folgendes nachgewiesen:

(I) $R_{f,g}$ ist homogen vom Grade n in den a und vom Grade m in den b; $R_{f,g}$ ist isobarisch vom Gewichte $m \cdot n$ in der Gesammtheit der a und der b.

(II) Es ist

$$R_{f,g_1 \cdot g_2} = R_{f,g_1} \cdot R_{f,g_2}$$

und insbesondere

$$R_{f,g_1 \cdot a^x} = (-1)^{xm} a_m^x R_{f,g_1}.$$

(III) Es ist $R_{f,g+qf} = R_{f,g}$, wenn q eine Constante bedeutet.

(IV) Es ist $R_{f,g} = (-1)^{mn} R_{g,f}$. Dies folgt nämlich unmittelbar aus der Formel (3), § 136.

Die Sätze (III) und (IV) lassen sich, wenn p, q, p', q' Constanten sind, in der Form

$$R_{pf+qg,p'f+q'g} = (pq' - p'q)^m R_{f,g} \tag{1}$$

erweitern, falls man f und g als von demselben Grade m voraussetzt. Es tritt dann nämlich in der Bézout'schen Determinante an die Stelle von $(a_i b_k - a_k b_i)$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}(pa_i + qb_i)(p'a_k + q'b_k) - (p'a_i + q'b_i)(pa_k + qb_k) \\ = (pq' - p'q)(a_i b_k - a_k b_i),\end{aligned}$$

und verwendet man also zur Resultantenbildung die abgekürzte Form, so sieht man sofort, dass die neue Determinante sich nur durch den Factor $(pq' - p'q)^m$ von der früheren unterscheidet.

§ 147. Wir setzen in $f(z)$ und in $g(z)$ jetzt den gebrochenen linearen Ausdruck

$$z = \frac{p\zeta + q}{p'\zeta + q'}$$

ein und schreiben

$$f\left(\frac{p\zeta+q}{p'\zeta+q'}\right) = \left(\frac{1}{p'\zeta+q'}\right)^m \varphi(\zeta), \quad g\left(\frac{p\zeta+q}{p'\zeta+q'}\right) = \left(\frac{1}{p'\zeta+q'}\right)^n \psi(\zeta);$$

dann sind $\varphi(\zeta)$ und $\psi(\zeta)$ ganze Functionen von ζ, und zwar ist

$$\varphi(\xi) = a_0 \prod_\lambda (p\xi + q - \alpha_\lambda(p'\xi + q'))$$
$$= a_0 \prod_\lambda (p - \alpha_\lambda p') \prod_\lambda \left(\xi - \frac{\alpha_\lambda q' - q}{p - \alpha_\lambda p'}\right),$$
$$\psi(\xi) = b_0 \prod_\mu (p\xi + q - \beta_\mu(p'\xi + q'))$$
$$= b_0 \prod_\mu (p - \beta_\mu p') \prod_\mu \left(\xi - \frac{\beta_\mu q' - q}{p - \beta_\mu p'}\right).$$

Will man also die Resultante der Functionen φ, ψ bilden, so wird diese nach der Formel (3), § 136 gleich

$$a_0^n \prod_\lambda (p - \alpha_\lambda p')^n b_0^m \prod_\mu (p - \beta_\mu p')^m \prod_{\lambda,\mu} \left(\frac{\alpha_\lambda q' - q}{p - \alpha_\lambda p'} - \frac{\beta_\mu q' - q}{p - \beta_\mu p'}\right)$$
$$= a_0^n b_0^m (pq' - p'q)^{mn} \prod_{\lambda,\mu} (\alpha_\lambda - \beta_\mu),$$

d. h. man erhält die folgende Gleichung, welche sich auf lineare, gebrochene Transformationen der Variablen bezieht,

$$R_{\varphi,\psi} = (pq' - p'q)^{mn} R_{f,g}.$$

§ 148. Ersetzt man in f und g alle Wurzeln α_λ, β_μ durch $\alpha_\lambda + t$, $\beta_\mu + t$, so gehen die a_λ, b_μ (vgl. § 123) bis auf höhere Potenzen von t in $a_\lambda + (m - \lambda + 1)\, a_{\lambda-1} t$, $b_\mu + (n - \mu + 1)\, a_{\mu-1} t$ über, während $R_{f,g}$ dabei ungeändert bleibt. Daraus folgt, wenn man die neue Resultante

$$R_{f,g}(a_\lambda + (m - \lambda + 1)\, a_{\lambda-1} t,\ b_\mu + (n - \mu + 1)\, a_{\mu-1} t)$$

nach Potenzen von t entwickelt und kurz R für $R_{f,g}$ schreibt, die partielle Differentialgleichung

$$(3) \quad m a_0 \frac{\partial R}{\partial a_1} + (m-1) a_1 \frac{\partial R}{\partial a_2} + \cdots + a_{m-1} \frac{\partial R}{\partial a_m} + n b_0 \frac{\partial R}{\partial b_1} + (n-1) \frac{\partial R}{\partial b_2} + \cdots + b_{n-1} \frac{\partial R}{\partial b_n} = 0.$$

Diese Formel kann man dazu benutzen, um nach Herstellung des litteralen Theils von R die Zahlencoefficienten der einzelnen Glieder zu berechnen.

Eine andere Differentialgleichung für R gewinnt man aus (8), § 139. Diese Determinante zeigt, dass

$$R(a_0, \cdots a_m; b_0, \cdots b_n) = R(a_0, \cdots a_{m-n} + q b_0, a_{m-n+1} + q b_1, \cdots; b_0, \cdots b_n)$$

ist. Entwickelt man die rechte Seite wieder nach Potenzen von q, so folgt als Coefficient der ersten Potenz

$$(4)\qquad b_0 \frac{\partial R}{\partial a_{m-n}} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_{m-n+1}} + \cdots + b_n \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0;$$

und für $m = n$ erhalten wir somit die beiden besonderen Formeln

$$(5)\qquad \begin{aligned} b_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \cdots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_m} &= 0, \\ a_0 \frac{\partial R}{\partial b_0} + a_1 \frac{\partial R}{\partial b_1} + \cdots + a_m \frac{\partial R}{\partial b_m} &= 0, \end{aligned} \qquad (m = n).$$

Man kann ferner, wenn $m > n$ ist, die aus früheren Formeln oder auch direct aus der Determinantendarstellung ersichtliche Thatsache benutzen, dass

$$R_{f+q\cdot z^{m-n}g,\,g}$$

von der Constanten q unabhängig ist, um durch Entwickelung nach Potenzen von q zur Herleitung der Formel

$$(6)\qquad b_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \cdots + b_m \frac{\partial R}{\partial a_m} = 0 \qquad (m > n)$$

zu kommen. Endlich erinnern wir an die aus der Eigenschaft der Homogenität folgenden Gleichungen

$$(7)\qquad \begin{aligned} a_0 \frac{\partial R}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial R}{\partial a_1} + \cdots + a_m \frac{\partial R}{\partial a_m} &= nR, \\ b_0 \frac{\partial R}{\partial b_0} + b_1 \frac{\partial R}{\partial b_1} + \cdots + b_n \frac{\partial R}{\partial b_n} &= mR. \end{aligned}$$

§ 149. Wenn man in (vgl. § 139)

$$(8)\qquad R_{f,g} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_m & 0 & \cdots \\ 0 & a_0 & \cdots & a_{m-1} & a_m & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_m & 0 & \cdots \\ 0 & b_0 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}(n \text{ Zeilen}) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\}(m \text{ Zeilen}) \end{matrix}$$

zur letzten Spalte die mit z multiplicirte vorletzte, die mit z^2 multiplicirte drittletzte u. s. f. addirt, und wenn man darauf nach den Elementen der letzten Spalte entwickelt, dann folgt, weil jedes der n ersten Elemente den Factor f, und jedes der m letzten den Factor g besitzt, die fundamentale Gleichung

$$(9)\qquad \begin{gathered} R_{f,g} = f(z)\cdot g_1(z) - g(z)\cdot f_1(z), \\ [f_1] \leqq m-1, \quad [g_1] \leqq n-1. \end{gathered}$$

Differentiirt man diese nach a_λ und bedenkt, dass g von a_λ frei, und dass $\frac{\partial f}{\partial a_\lambda} = z^{m-\lambda}$ ist, dann ergiebt sich

$$(10)\qquad \frac{\partial}{\partial a_\lambda} R_{f,g} = z^{m-\lambda}\cdot g_1 + f\cdot \frac{\partial g_1}{\partial a_\lambda} - g\cdot \frac{\partial f_1}{\partial a_\lambda}.$$

Ersetzt man die bisher willkürlichen a, b durch die Coefficienten zweier Functionen, die einen gemeinsamen Nullwerth ζ haben, so dass $f(\zeta) = 0$, $g(\zeta) = 0$ und $R_{f,g} = 0$ wird, dann liefert (10) für die Substitution $z = \zeta$

$$\frac{\partial}{\partial a_\lambda} R_{f,g} = \zeta^{m-\lambda} \cdot g_1(\zeta), \qquad (R_{f,g} = 0); \tag{11}$$

also folgt hieraus, wenn man $\lambda = m$, $m-1$, $\cdots$ einträgt,

$$1 : \zeta : \zeta^2 : \cdots = \frac{\partial}{\partial a_m} R_{f,g} : \frac{\partial}{\partial a_{m-1}} R_{f,g} : \frac{\partial}{\partial a_{m-2}} R_{f,g} : \cdots, \tag{12}$$

und ebenso ergiebt sich

$$= \frac{\partial}{\partial b_n} R_{f,g} : \frac{\partial}{\partial b_{n-1}} R_{f,g} : \frac{\partial}{\partial b_{n-2}} R_{f,g} : \cdots.$$

Aus (11) erkennt man, dass wenn die Ableitung $\frac{\partial}{\partial a_m} R_{f,g} = 0$ ist, dann $g_1(\zeta) = 0$ wird, und folglich jede andere Ableitung von $R_{f,g}$ nach irgend einem a verschwinden muss. In diesem Falle versagt die erste Reihe rechts in (12), und die zweite muss an ihrer Stelle benutzt werden. Ist aber auch $f_1(\zeta) = 0$, dann versagt auch diese, und die Formel (12) wird illusorisch. Hierbei werden also $f_1(z)$ und $g_1(z)$ durch $(z - \zeta)$ theilbar, und dadurch geht, nach Wegheben des Factors $(z - \zeta)$, weil ja für unser Coefficientensystem die Resultante verschwindet, (9) in die Form

$$0 = f(z) \cdot g_2(z) - g(z) \cdot f_2(z),$$
$$[f_2] \leq m-2, \ [g_2] \leq n-2$$

über; aus ihr geht hervor, dass die beiden Gleichungen $f = 0$, $g = 0$ mindestens zwei gemeinsame Wurzeln besitzen.

Existiren zwei gemeinsame Wurzeln ζ_1 und ζ_2, dann führt uns eine zweimalige Differentiation von (10) zu der Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} R_{f,g} = z^{m-\varkappa} \frac{\partial g_1}{\partial a_\lambda} + z^{m-\lambda} \frac{\partial g_1}{\partial a_\varkappa} + \left(f \cdot \frac{\partial^2 g_1}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} - g \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} \right), \tag{13}$$

aus welcher sich für ζ_1 und ζ_2 und bei $\lambda = \varkappa$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa^2} R_{f,g} = 2\zeta_1^{m-\varkappa} \frac{\partial g_1(\zeta_1)}{\partial a_\varkappa} = 2\zeta_2^{m-\varkappa} \frac{\partial g_1(\zeta_2)}{\partial a_\varkappa} \tag{14}$$

herausstellt, so dass also die Proportion

$$\zeta_1^{m-\varkappa} : \zeta_2^{m-\varkappa} = \frac{\partial g_1(\zeta_2)}{\partial a_\varkappa} : \frac{\partial g_1(\zeta_1)}{\partial a_\varkappa}. \tag{15}$$

gilt. Durch Combination dreier Gleichungen (13) erhält man zunächst

$$\frac{\partial^2}{\partial a_\lambda^2} R_{f,g} \cdot z^{2(\lambda-\varkappa)} - 2 \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} R_{f,g} \cdot z^{\lambda-\varkappa} + \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa^2} R_{f,g}$$

$$= f \cdot \left\{ \frac{\partial^2 g_1}{\partial a_\lambda^2} z^{2(\lambda-\varkappa)} - 2 \frac{\partial^2 g_1}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} z^{\lambda-\varkappa} + \frac{\partial^2 g_1}{\partial a_\varkappa^2} \right\} - g \cdot \left\{ \frac{\partial^2 f_1}{\partial a_\lambda^2} z^{2(\lambda-\varkappa)} - \cdots \right\}$$

und daraus dann für jede etwa vorhandene gemeinsame Wurzel von ζ von $f = 0$, $g = 0$

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial a_\lambda^2} R_{f,g} \cdot \zeta^{2(\lambda-\varkappa)} - 2 \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa \partial a_\lambda} R_{f,g} \cdot \zeta^{\lambda-\varkappa} + \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa^2} R_{f,g} = 0, \\ &\frac{\partial^2}{\partial a_{\varkappa+1}^2} R_{f,g} \cdot \zeta^2 - 2 \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa \partial a_{\varkappa+1}} R_{f,g} \cdot \zeta + \frac{\partial^2}{\partial a_\varkappa^2} R_{f,g} = 0. \end{aligned}$$

Das zeigt, dass bei drei gemeinsamen Wurzeln die Gleichungen (16) illusorisch werden.

§ 150. Die allgemeine Theorie derjenigen, aus den Coefficienten zweier Gleichungen gebildeten Functionen, durch deren Verschwinden die charakteristischen Bedingungen für die Existenz gemeinsamer Factoren geliefert werden, kann und muss von der Voraussetzung des Bestehens von Wurzeln algebraischer Gleichungen frei gemacht werden, die bisher bei unseren Betrachtungen fast durchgehends verwendet wurde. Wir kommen dabei naturgemäss auf frühere in der siebenten Vorlesung angestellte Untersuchungen zurück und erkennen, dass wir schon dort bei der Entwickelung des Quotienten $g:f$ in eine Reihe die hier soeben gestellte Aufgabe gelöst haben. Die früher zu Grunde gelegte Annahme, dass g von geringerem Grade sei als f, lässt sich leicht verwirklichen; man hat nämlich, wenn $m = n$ ist,

$$R_{f,g} = R_{f, g - \frac{b_0}{a_0} f}$$

und die neue Function $g - \frac{b_0}{a_0} f$ ist dann höchstens vom Grade $(m-1)$.

Wir haben in der achten Vorlesung § 84 die charakteristischen Bedingungen dafür gegeben, dass $f(z)$ und $g(z)$ eine Function ν^{ten} Grades als grössten, gemeinsamen Theiler besitzen. Schreiben wir wie dort die Entwickelung des Quotienten nach fallenden Potenzen

$$\frac{g(z)}{f(z)} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots$$

und setzen wir wieder

$$C_\varrho = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{\varrho-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{\varrho-1} & c_\varrho & \cdots & c_{2\varrho-2} \end{vmatrix},$$

so bestehen diese Bedingungen darin, dass

$$C_{m-\nu} \neq 0, \quad C_{m+1-\nu} = 0, \quad C_{m+2-\nu} = 0, \quad \cdots \quad C_m = 0$$

wird. Wir haben dort auch den gemeinsamen Theiler selbst in der

Form einer Determinante gegeben. — Insbesondere ist $C_m = 0$ charakteristisch dafür, dass f und g überhaupt einen Theiler gemeinsam haben. Nach (21) aus § 79 haben wir auch bereits die Determinanten mit den Elementen c_λ in solche mit den a_λ, b_λ umgewandelt. Es war, wenn man das dortige n_1 hier durch $(m-n)$ ersetzt,

$$(17)\qquad (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{m+n} C_m = \left|\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 & \cdots & a_{m+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_m \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m+n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & b_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}(n \text{ Zeilen}) \\ \left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\}(m \text{ Zeilen}) \end{array}$$

($a_x = 0$, wenn $x > m$ ist; $b_\lambda = 0$, wenn $\lambda > n$ ist),

und also hat man durch Vergleichung mit der Determinantenform der Resultante

$$(18)\qquad R_{f,g} = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{m+n} C_m$$

und kommt so auf die Determinantendarstellung (8), § 149 zurück Umgekehrt zeigt die Vergleichung mit der Formel (6) aus § 73, dass $R_{f,g}$ in eine Determinante m^{ten} Grades umgewandelt werden kann, welche die Eigenschaft hat, recurrirend zu sein, da sie sich in der Form

$$|c_{i+k}| \qquad (i, k = 0, 1, \cdots m-1)$$

schreiben lässt.

In gleicher Weise haben wir auch die charakteristischen Bedingungen für die Existenz von gemeinsamen Theilern höherer Ordnung früher bereits durch die a_λ und die b_λ gegeben. Die Resultate aus § 141 und § 144 sind somit von der Voraussetzung der Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen frei gemacht.

§ 151. Gleichfalls ohne die Voraussetzung der Wurzelexistenz, lediglich gestützt auf die Darstellung (17) und (18), wollen wir auch die wichtigsten Eigenschaften der Resultante ableiten.

Aus der Determinantenform geht unmittelbar hervor, dass $R_{f,g}$ in den a homogen vom Grade n und in den b homogen vom Grade m ist. —

Multiplicirt man ferner die erste Spalte der Determinante mit λ^0, die zweite mit λ^1, $\cdots$ die letzte mit λ^{m+n-1} und dividirt dann die erste Zeile durch λ^0, die zweite durch λ^1, $\cdots$ die n^{te} durch λ^{n-1}, ferner die $(n+1)^{\text{te}}$ durch λ^0, die $(n+2)^{\text{te}}$ durch λ^1, $\cdots$ die $(m+n)^{\text{te}}$ durch λ^{m-1}, wodurch im Ganzen eine Multiplication mit

$$\lambda^{\frac{(m+n-1)(m+n)}{2} - \frac{(m-1)m}{2} - \frac{(n-1)n}{2}} = \lambda^{mn}$$

stattgefunden hat, dann zeigt sich die Beziehung

$$\lambda^{mn}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1\lambda & a_2\lambda^2 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1\lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_0 & b_1\lambda & b_2\lambda^2 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1\lambda & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

und daraus folgt, dass jedes Glied der Resultante den Factor λ^{mn} annimmt, wenn man alle a_ϱ und b_σ durch $a_\varrho\lambda^\varrho$ und $b_\sigma\lambda^\sigma$ ersetzt. Es ist also $R_{f,g}$ eine isobarische Function der a und der b vom Gewichte $m \cdot n$. —

Vertauscht man die ersten n und die letzten m Zeilen der Determinante mit einander, dann erhält man die Gleichung

$$R_{g,f} = (-1)^{mn} R_{f,g}.$$

Wenn man in der Determinante (17) die letzte Zeile mit der Constanten α_{m-n}, die vorletzte mit α_{m-n+1}, u. s. w. bis zu α_0 multiplicirt und alle Producte zur letzten Zeile der a in (17) addirt; wenn man dann dieselbe Operation der Multiplication mit α_{m-n} bei der vorletzten Zeile beginnt und alle Producte ebenso zur vorletzten Zeile der a addirt, u. s. w., bis alle n Zeilen der a umgewandelt sind, so treten an die Stelle der a_0, a_1, a_2, $\cdots$, welche die Coefficienten von $f(z)$ waren, die Grössen

$$a_0 + b_0\alpha_0,\ a_1 + (b_0\alpha_1 + b_1\alpha_0),\ a_2 + (b_0\alpha_2 + b_1\alpha_1 + b_2\alpha_0),\ \cdots$$

d. h. wir haben die Coefficienten von f durch die von $f + g \cdot \varphi$ ersetzt, wobei φ die Function

$$\varphi(z) = \alpha_0 z^{m-n} + \alpha_1 z^{m-n-1} + \cdots + \alpha_m$$

bedeutet. Es ist also damit die Gleichung bewiesen

$$R_{f,g} = R_{f+g\cdot\varphi,g} \qquad [\varphi] \leqq m - n. \tag{20}$$

§ 152. Um den früher abgeleiteten Satz (§ 138)

$$R_{f_1\cdot f_2,g} = R_{f_1,g} \cdot R_{f_2,g} \tag{21}$$

mit unseren eingeschränkteren Beweismitteln darzuthun, gehen wir folgendermassen vor. Es sei

$$\begin{aligned} f_1 &= a_0' z^{m_1} + a_1' z^{m_1-1} + \cdots + a_{m_1}', \\ f_2 &= a_0'' z^{m_2} + a_1'' z^{m_2-1} + \cdots + a_{m_2}'', \\ g &= b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n, \\ f = f_1 \cdot f_2 &= a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_m, \qquad (m = m_1 + m_2). \end{aligned}$$

Dann stellen wir $R_{f_1,g}$ und $R_{f_2,g}$ in den Formen dar

$$b_n^{m_2} R_{f_1,g} = \left|\begin{array}{l} a_0' \ldots\ldots a_{m_1}' \; 0 \; 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots a_0' \ldots\ldots a_{m_1}' \ldots\ldots 0 \\ b_0 \ldots b_n \; 0 \ldots 0 \ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots b_0 \ldots\ldots b_n \ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots 0 \ldots\ldots 0 \; b_n \; 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots 0 \ldots\ldots 0 \; 0 \; 0 \ldots b_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (n \text{ Zeilen}), \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (m_1 \text{ Zeilen}), \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (m_2 \text{ Zeilen}), \end{array}$$

wobei die Determinante der ersten $(m_1 + n)$ Zeilen und Spalten die gewöhnliche Determinantenform der Resultanten $R_{f_1,g}$ ist, und an diese sich dann weiter nur nach rechts unten ein Diagonalsystem zur Ränderung anschliesst:

$$a_0''^{m_1} R_{f_2,g} = \left|\begin{array}{l} a_0'' \ldots\ldots a_{m_2}'' \; 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots a_0'' \; a_1'' \ldots a_{m_2}'' \; 0 \; 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots a_0'' \ldots\ldots a_{m_2}'' \; 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0 \ldots a_0'' \; a_1'' \ldots\ldots a_{m_2}'' \\ 0 \ldots\ldots b_0 \ldots\ldots b_n \; 0 \ldots 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \ldots\ldots 0 \ldots\ldots b_0 \ldots\ldots b_n \end{array}\right| \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (m_1 \text{ Zeilen}), \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (n \text{ Zeilen}), \\ \left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\\a\end{array}}\right\} (m_2 \text{ Zeilen}), \end{array}$$

wobei die Determinante der letzten $(m_2 + n)$ Zeilen und Spalten die gewöhnliche Determinantenform der Resultante $R_{f_2,g}$ ist, und an diese sich dann weiter nur nach links und oben das rändernde System anschliesst. Die Productbildung für diese beiden Darstellungsarten liefert eine Determinante $(m + n)^{\text{ten}}$ Grades, deren erste n Zeilen bereits völlig mit denen von $R_{f,g}$ übereinstimmen, und deren letzte durch Zeilencombination unter Heraussetzung von $a_0''^{m_1} \cdot b_n^{m_2}$ sofort in die letzten von $R_{f,g}$ umgewandelt werden können. Damit ist dann der Beweis von (21) geliefert.

§ 153. Wir wollen auf Grund des Satzes (21) und unabhängig von der Bedeutung von $R_{f,g}$ die Irreductibilität der Resultante von f und g bei allgemeinen, unbestimmten Coefficienten a und b nachweisen. $R_{f,g}$ ist in den a homogen vom n^{ten} und in den b homogen vom m^{ten} Grade; zerfällt die Function, so muss auch jeder ihrer Factoren wieder in den a und in den b homogen sein, wie man unmittelbar sieht. Wir nehmen an, es wäre bei gegebenem Grade m der Function f die Resultante $R_{f,g}$ zwar noch für das allgemeine g vom Grade n, aber für kein allgemeines g_1 von geringerem Grade mehr zerfällbar. Nun setzen wir

$$R_{f,g} = R_1(x, \lambda)\, R_2(\mu, \nu);$$

x, μ sollen dabei die Dimensionen der beiden Factoren nach den a und λ, ν diejenigen nach den b bedeuten. Es muss also $(x + \mu) = n$ und $(\lambda + \nu) = m$ sein.

Nunmehr schreiben wir statt g das Product der beiden Functionen

$$g_1(z) = \beta_0' z^\varrho + \beta_1' z^{\varrho-1} + \cdots, \quad g_2(z) = \beta_0'' z^\sigma + \beta_1'' z^{\sigma-1} + \cdots$$
$$(\varrho + \sigma = n);$$

dadurch gehen die b in homogene Functionen zweiten Grades der Grössen β über, und wenn man die Dimensionen der auftretenden Functionen nach den β rechnet, dann liefert die obige Zerlegungsformel die für unsere besondere Annahme gültige Gleichung

$$R_{f,g'\cdot g''} = R_1(x, 2\lambda)\, R_2(\mu, 2\nu) \qquad \begin{pmatrix} \lambda + \nu = m \\ x + \mu = n \end{pmatrix}.$$

Andererseits haben wir nach dem eben bewiesenen Satze (21)

$$R_{f,g'\cdot g''} = R_{f,g'} \cdot R_{f,g''}$$

oder ausführlicher

$$= R_{f,g'}(\varrho, m) \cdot R_{f,g''}(\sigma, m),$$

wobei die eingeklammerten Zahlen wieder die Dimensionen nach den a und nach den β angeben. Ist nun n ausser in die Summanden x und μ noch auf eine andere wesentlich verschiedene Art in zwei Summanden zerlegbar

$$n = x + \mu = \varrho + \sigma,$$

und wählt man hier diese zweite Zerfällungsmöglichkeit, dann können $R_{f,g'}$ und $R_{f,g''}$ nicht mit R_1 und R_2 zusammenfallen; mindestens eine der beiden Resultanten muss sich also aus Factoren von R_1 und von R_2 zusammensetzen und ist folglich, weil $\varrho, \sigma < n$ sind, gegen die Annahme zerlegbar. Diesem Widerspruche können wir nur dann entgehen, wenn n, falls es > 1 ist, nur auf Eine Art in Summanden zerlegt werden kann, wenn also $n = 3$ oder $n = 2$ ist. Findet demnach für ein bestimmtes m eine Zerlegung der Resultante statt, dann tritt eine solche auch bei diesem m für $n = 1$, 2 oder 3 auf.

Genau die gleichen Schlüsse gelten für m; wir können demgemäss jetzt auch m auf 3, auf 2 oder auf 1 reduciren und ersehen also, dass, wenn überhaupt für ein Werthepaar m, n Zerlegung der Resultante allgemeiner, ganzer Functionen m^{ten} und n^{ten} Grades stattfindet, dann auch für $m, n = 1, 2, 3$ das Gleiche eintreten muss.

Wir untersuchen nun zunächst $n = 1$, 2 oder 3 und $m = 3$. Ist dabei eine Zerlegung möglich, so wird zu setzen sein

$$R_{f,g} = R_1(x, \lambda)\, R_2(\mu, \nu)$$
$$(x + \mu = n = 1,\ 2 \text{ oder } 3;\ \lambda + \nu = m = 3).$$

Führen wir nach dem eben verwendeten Principe $g_1(z) \cdot g_2(z)$ statt $g(z)$ ein, indem wir

$$g_1(z) = \beta_0' z + \beta_1',\ \ g_2(z) = \beta_0'' z^{n-1} + \cdots + \beta_{n-1}''$$

nehmen, dann entstehen, genau wie oben, die beiden Gleichungen

$$R_{f,g_1 \cdot g_2} = R_1(x, 2\lambda)\, R_2(\mu, 2\nu),$$
$$R_{f,g_1 \cdot g_2} = R_{f,g_1}(1, 3)\, R_{f,g_2}(n-1, 3),$$

in denen die ersten Grössen der Klammern die Dimensionen nach den a, und die zweiten die Dimensionen nach den β bezeichnen. Da diese letzten in R_1 und in R_2 gerade, in den Resultanten dagegen ungerade sind, so folgt wie oben eine weitere Zerlegung für mindestens eine der Resultanten R_{f,g_1} oder R_{f,g_2}.

Also auch der Fall, dass f oder g vom dritten Grade ist, führt zu weiteren Reductionen, und wir erkennen, dass aus der Zerfällbarkeit für allgemeine Functionen m^{ten} und n^{ten} Grades auch diejenige für $m, n = 1, 2$ folgen müsste. Aber weder

$$(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - (a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1) \qquad (m = n = 2)$$

noch

$$a_0 b_1^2 - a_1 b_0 b_1 + a_2 b_0^2 \qquad (m = 2,\ n = 1)$$

noch

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 \qquad (m = n = 1)$$

ist zerlegbar, also findet auch allgemein keine Zerlegung statt. In den beiden letzten Fällen ist die Irreductibilität klar. Im ersten Falle erkennt man leicht die Richtigkeit der Behauptung, wenn man bedenkt, dass eine isobarische Function nur in isobarische Factoren zerfallen kann, und wenn man demgemäss die einzige Zerlegungsmöglichkeit für die Resultante

$$(\mu a_0 b_2 + \mu_1 a_1 b_1 + \mu_2 a_2 b_0)(\nu a_0 b_2 + \nu_1 a_1 b_1 + \nu_2 a_2 b_0)$$

betrachtet, aus der aber das Glied $a_1^2 b_0 b_2$ nicht hervorgehen kann.

§ 154. Wir wollen nun die Resultante von $f(z + u)$ und $g(z + u)$ untersuchen, wobei u eine Constante bedeuten soll. Setzt man die Existenz von Wurzeln voraus, so folgt ohne Weiteres aus dem Begriffe der Resultante

$$R_{\ldots} = R_{f(z+u),\, g(z+v)}.$$

auch ohne diese Annahme leicht ähnlich $[f] = m$, $[g] = n$ ist,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \binom{n-1}{1}u & \binom{n-1}{2}u^2 & \binom{n-1}{3}u^3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & \binom{n-2}{1}u & \binom{n-2}{2}u^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \binom{m-1}{1}u & \binom{m-1}{2}u^2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \binom{m-2}{1}u & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}(m \text{ Zeilen}) \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}}\right\}(n \text{ Zeilen}) \end{matrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -\binom{m+n-1}{1}u & \binom{m+n-1}{2}u^2 & -\binom{m+n-1}{3}u^3 & \cdots & \pm\, u^{m+n-1} \\ 0 & 1 & -\binom{m+n-2}{1}u & \binom{m+n-2}{2}u^2 & \cdots & \mp\, u^{m+n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix};$$

dann ergiebt sich, wie ohne Schwierigkeit zu sehen ist, durch Multiplication der Determinanten zunächst die Gleichung

$$A\, R_{f(z+u),\, g(z+u)}\, B = R_{f,g},$$

und da $A = 1$, $B = 1$ ist, daraus das zu beweisende Theorem.

§ 155. Hieraus können wir einen weiteren Satz folgern, von dem wir bald Anwendung machen werden. Wir entwickeln die Function $f(z+u)$ nach steigenden Potenzen von u und setzen

$$(23)\quad f(z+u) = f(z) + uf'(z) + \frac{u^2}{2}f''(z) + \cdots = f(z) + uP(z, u).$$

Für die beiden ganzen Functionen der Variablen z

$$f(z) \quad \text{und} \quad P(z, u)$$

bilden wir die Resultante $R_{f,P}$ und können für sie nach dem in den §§ 152 und 154 Bewiesenen folgern

$$(24)\qquad R_{f,P} = R_{f+uP,\,P} = R_{f(z+u),\,P(z,u)} = R_{f(z),\,P(z-u,u)}.$$

Trägt man hingegen in die Definitionsgleichung (23) für P zuerst $(-u)$ statt u ein

$$f(z-u) = f(z) - uP(z, -u),$$

und dann wieder in (23) die Differenz $(z-u)$ statt z, während man u ungeändert lässt,

$$f(z) = f(z-u) + uP(z-u, u),$$

so zeigt die Addition dieser beiden Gleichungen

$$P(z-u, u) = P(z, -u);$$

und somit wird aus (24) unter Benutzung dieses Resultates

(25) $$R_{f,\,P(z,u)} = R_{f,\,P(z,-u)},$$

d. h. in die Resultante $R_{f,P}$ treten nur die geraden Potenzen $u^0, u^2, u^4, \cdots$ von u ein.

Die Entwickelung von P nach Potenzen von z lautet

$$P(z,u) = \binom{n}{1} a_0 z^{n-1} + \left[\binom{n}{2} a_0 u + \binom{n-1}{1} a_1\right] z^{n-2} + \left[\binom{n}{3} a_0 u^2 + \binom{n-1}{2} a_1 u + \binom{n-2}{1} a_2\right] z^{n-3} + \cdots.$$

Um die höchste Potenz in u von $R_{f,P}$ zu bilden, braucht man demnach für P nur die Coefficienten

$$\binom{n}{1} a_0,\ \binom{n}{2} a_0 u,\ \binom{n}{3} a_0 u^2,\ \cdots\ \binom{n}{1} a_0 u^{n-2},\ a_0 u^{n-1}$$

beizubehalten und erkennt aus der Determinantenform, dass $R_{f,P}$ nach Potenzen von u geordnet mit dem Gliede

$$a_0^{m+n} u^{n(n-1)}$$

beginnt. Setzt man v für u^2 ein, so zeigt es sich, dass $R_{f,P}$ eine ganze Function von v ist, die bis zum Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ aufsteigt, und deren erster Coefficient a_0^{m+n} wird.

§ 156. Auf diese Entwickelungen lässt sich ein einfacher Beweis für die Wurzelexistenz algebraischer Gleichungen gründen *).

Wir wollen annehmen, es wäre bereits gezeigt, dass jede Gleichung eines Grades

$$n_1 = 2^{k_1}(2\nu_1 + 1),$$

für welche entweder

$$k_1 < k \quad \text{oder} \quad k_1 = k \text{ und } \nu_1 < \nu$$

ist, eine reelle oder complexe Wurzel besitzt. Es soll dann ohne Benutzung von Stetigkeitsbetrachtungen rein arithmetisch bewiesen werden, dass das Gleiche auch für jede Gleichung des Grades

$$n = 2^k(2\nu - 1)$$

stattfindet. Dadurch wird der Kernpunkt der Frage auf Gleichungen von ungeradem Grade geschoben. An dieser Stelle angelangt, können wir freilich den letzten Schritt nur durch Zweckmässigkeitsgründe thun, wie dies in § 20 geschehen ist. Es wird auf diesem Wege Alles arithmetisch gezeigt, was überhaupt arithmetisch erweisbar ist.

---

*) P. Gordan. Neuer Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Math. Ann. X. 572—573. Die Grundidee des Beweises ist auf Seite 171 dieses Werkes zurückzuführen. Herr Gordan hat es wenn ich mich recht erinnere

Es sei jetzt

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{26}$$

die vorgelegte Gleichung n^{ten} Grades; n sei eine gerade Zahl.

Wir bilden wie oben die Resultante

$$R_{f,P(z,u)} = u^{n(n-1)} + b_1 u^{n(n-1)-2} + \cdots$$
$$= v^{\frac{n(n-1)}{2}} + b_1 v^{\frac{n(n-1)}{2}-1} + \cdots$$

und erkennen, dass R als Function von v aufgefasst den Grad

$$\frac{1}{2} n(n-1) = 2^{k_0}(2v_0 + 1)$$

hat, bei welchem $k_0 = (k-1)$ ist. Folglich besitzt nach unserer Annahme $R(v) = 0$ eine Wurzel v_0, und daher ist für diese

$$R_{f,P(z,\sqrt{v_0})} = 0.$$

Da dann also, wie oben ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz gezeigt wurde, für

$$f(z) \quad \text{und} \quad P(z, \sqrt{v_0})$$

ein gemeinsamer Factor existirt, so ist $f(z)$ sicher auf mindestens eine Art in zwei reelle oder complexe Factoren zerlegbar.

§ 157. Wir unterscheiden bei dieser Art der Zerlegung

$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$$

drei Fälle.

Zuerst sei $\varphi(z)$ und damit $\psi(z)$ reell. Die Grade der beiden Functionen bezeichnen wir bezw. durch

$$n_1 = 2^{k_1}(2\nu_1 + 1) \quad \text{und} \quad n_2 = 2^{k_2}(2\nu_2 + 1);$$

dabei müssen die Gleichungen

$$n = n_1 + n_2,$$
$$2^k(2\nu + 1) = 2^{k_1}(2\nu_1 + 1) + 2^{k_2}(2\nu_2 + 1)$$

gelten. Wenn nun $k_1 < k$ ist, dann hat der Voraussetzung gemäss $\varphi(z) = 0$ eine Wurzel, und damit auch $f(z) = 0$. Ist $k_1 = k$, so muss $\nu_1 < \nu$ sein, und es gilt derselbe Schluss. Ist endlich $k_1 > k$, so kann k_2 nur $= k$ sein; dann wird ψ an die Stelle von φ treten, und der Erfolg ist der gleiche.

Zweitens möge $\varphi(z)$ complexe Coefficienten und einen Grad $n_1 \neq \frac{1}{2} n$ besitzen. Ohne Beschränkung können wir $n_1 < \frac{1}{2} n$ annehmen, da ja bei $n_1 > \frac{1}{2} n$ nur ψ mit φ vertauscht zu werden braucht. Wir schreiben dann

$$\varphi(z) = \sigma(z) + i\tau(z).$$

Haben σ und τ einen gemeinsamen, reellen Theiler, so haben auch φ und f denselben, und wir sind auf den ersten Fall zurückgeführt.

Haben aber σ und τ keinen gemeinsamen, reellen Theiler, dann kann man nach § 68 zwei reelle Functionen $A(z)$, $B(z)$ so bestimmen, dass

$$\sigma(z)\,A(z) + \tau(z)\,B(z) = 1,$$

$$(27) \qquad (\sigma + i\tau)\,\frac{A - Bi}{2} + (\sigma - i\tau)\,\frac{A + Bi}{2} = 1$$

wird. $f(z)$ ist durch $\sigma + i\tau$ theilbar, also hat man

$$f = (\sigma + i\tau)\cdot(\omega_1 + i\omega_2),$$

und daraus folgt durch Verwandlung von i in $(-i)$ auch

$$f = (\sigma - i\tau)\,(\omega_1 - i\omega_2).$$

Multiplicirt man die rechte Seite von (27) mit f, das erste Glied der linken mit $(\sigma - i\tau)\,(\omega_1 - i\omega_2)$ und das zweite Glied der linken Seite mit $(\sigma + i\tau)\,(\omega_1 + i\omega_2)$, dann entsteht

$$f = (\sigma^2 + \tau^2)\,(A\omega_1 - B\omega_2).$$

Der Grad des ersten Factors ist $2n_1 < n$, also haben wir die Existenz des reellen Theilers $(\sigma^2 + \tau^2)$ und damit die einer Wurzel nachgewiesen.

Drittens möge $\varphi(z)$ complexe Coefficienten und einen Grad $n_1 = \frac{n}{2}$ besitzen.

Wir können gleichzeitig annehmen, dass keine andere Zerlegung von $f(z)$ besteht. Denn entweder führte diese direct auf einen der beiden ersten Fälle; oder, wenn eine zweite von der ersten verschiedene Zerlegung in complexe Factoren des Grades $\frac{n}{2}$ bestände, könnte durch die Vergleichung beider ein Factor niederen Grades erlangt werden.

Setzen wir, da wir ja den ersten Coefficienten von φ gleich 1 annehmen können,

$$\varphi(z) = z^{\frac{1}{2}n} + c_1 z^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots = \sigma(z) + i\tau(z),$$

so dürfen σ und τ keinen gemeinsamen Factor haben, weil sonst auch φ diesen besitzen würde, und dann eine weitere Zerfällung möglich wäre, was oben ausgeschlossen wurde.

Wie im zweiten Falle, oder durch unmittelbare Betrachtung können wir zeigen, dass auch $\psi = \sigma - i\tau$ ein Theiler von f, und dass, von einem constanten Factor abgesehen,

$$(28) \qquad f(z) = \varphi(z)\cdot\psi(z) = \sigma^2(z) + \tau^2(z)$$

ist. Hier versagt aber der Schluss, der beim zweiten Falle die Entscheidung lieferte, und deshalb müssen wir jetzt anders vorgehen.

Für den Werth v_0 besitzen die beiden Functionen

$$f(z) \quad \text{und} \quad P(z, \sqrt{v_0})$$

einen gemeinsamen Factor; dieser kann unserer Annahme nach nur entweder gleich $\varphi(z)$ oder gleich $\psi(z)$ sein, immer von einem unwesentlichen, constanten Zahlencoefficienten abgesehen. Wir nehmen an, er sei $\varphi(z)$. Dann hat, vgl. (23), wegen

$$f(z + \sqrt{v_0}) = f(z) + \sqrt{v_0}\, P(z, \sqrt{v_0})$$

auch $f(z + \sqrt{v_0})$ diesen Factor. Andererseits kann nach der aus (28) folgenden Gleichung

$$f(z + \sqrt{v_0}) = \varphi(z + \sqrt{v_0})\, \psi(z + \sqrt{v_0})$$

und den Voraussetzungen über die eindeutige Zerlegbarkeit von f die Function $f(z + \sqrt{v_0})$ keine anderen Factoren als $\varphi(z + \sqrt{v_0})$ und $\psi(z + \sqrt{v_0})$ haben. Folglich muss bis auf einen constanten Zahlencoefficienten $\varphi(z)$ mit einem dieser Werthe übereinstimmen. Wir haben jedoch die Entwickelungen

$$\varphi(z + \sqrt{v_0}) = z^{\frac{1}{2}n} + \left(c_1 + \tfrac{1}{2} n \sqrt{v_0}\right) z^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots,$$

$$\varphi(z) \qquad = z^{\frac{1}{2}n} + \qquad\qquad c_1 z^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots.$$

Demnach wäre eine solche Uebereinstimmung beider Functionen nur für $v_0 = 0$ möglich. Dabei würden aber $f(z)$ und $P(z, 0)$ selbst reell und hätten somit gegen die Annahme einen reellen Factor gemein; also muss dies verworfen werden. Man hat deshalb

$$\varphi(z) = \sigma(z) + i\tau(z) = \psi(z + \sqrt{v_0}) = \sigma(z + \sqrt{v_0}) - i\tau(z + \sqrt{v_0}).$$

Da in $\varphi(z)$ und in $\psi(z + \sqrt{v_0})$ die höchsten Coefficienten $= 1$ sind, so wurde der Zahlenfactor auch gleich der Einheit. Nun sei $\sqrt{v_0} = \alpha + i\beta$, dann liefert die vorige Gleichung

(29) $$\sigma(z) + i\tau(z) = \sigma(z + \alpha + i\beta) - i\tau(z + \alpha + i\beta).$$

Hierin ersetzen wir einmal i durch $(-i)$ und einmal z durch $(z - \alpha - \beta i)$; das giebt

$$\sigma(z) - i\tau(z) = \sigma(z + \alpha - i\beta) + i\sigma(z + \alpha - i\beta),$$

$$\sigma(z) - i\tau(z) = \sigma(z - \alpha - i\beta) + i\sigma(z - \alpha - i\beta),$$

d. h.

$$\varphi(z + \alpha - \beta i) = \varphi(z - \alpha - \beta i),$$

und daher

$$\varphi(z + \alpha) = \varphi(z - \alpha),$$

$$z^{\frac{1}{2}n} + \left(c_1 + \tfrac{1}{2} n\alpha\right) z^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots = z^{\frac{1}{2}n} + \left(c_1 - \tfrac{1}{2} n\alpha\right) z^{\frac{1}{2}n-1} + \cdots,$$

d. h. man erhält $\alpha = 0$, und somit $v_0 = i\beta$.

Für die Substitution $z - i\frac{\beta}{2}$ statt z liefert dann (29)

$$\sigma\left(z - i\frac{\beta}{2}\right) + i\tau\left(z - i\frac{\beta}{2}\right) = \sigma\left(z + i\frac{\beta}{2}\right) - i\tau\left(z + i\frac{\beta}{2}\right),$$

d. h. die Function $\varphi\left(z - i\frac{\beta}{2}\right)$ ändert sich nicht, wenn in ihr überall i durch $(-i)$ ersetzt wird; sie hat also (§ 10, V) reelle Coefficienten; und da ihr Grad $\frac{n}{2}$ ist, so besitzt $\varphi\left(z - i\frac{\beta}{2}\right) = 0$ eine Wurzel. Das Gleiche gilt dann auch für $\varphi(z) = 0$ und folglich auch für $f(z) = 0$.

Damit ist der Fundamentalsatz der Algebra in allen seinen Theilen bewiesen.

Vierzehnte Vorlesung.

Die Discriminanten.

§ 158. Wenn man in § 136 der zwölften Vorlesung

$$(1)\quad \begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n, \\ g(z) &= f'(z) = n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + (n-2) a_2 z^{n-3} + \cdots + a_{n-1} \end{aligned}$$

setzt, dann erkennt man aus der Determinantenform der Resultante § 139, dass $R_{f,f'}$ den Coefficienten a_0 als Factor hat. Wir bezeichnen die in $a_0, a_1, \cdots$ homogene Function des Grades $(2n - 2)$

$$\frac{1}{a_0} R_{f,f'} = D_f,$$

welche natürlich gleichfalls isobarisch vom Gewichte $n(n-1)$ ist, als Discriminante von f. Nach (4) aus § 136 wird

$$(2)\qquad D_f = a_0^{n-2} f'(z_1) f'(z_2) \cdots f'(z_n),$$

wenn $z_1, z_2, \cdots z_n$ die Wurzeln von $f = 0$ bezeichnen, und dieses Product giebt gemäss § 36

$$(2^a)\qquad D_f = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot a_0^{2n-2} \prod_{\lambda,\mu} (z_\lambda - z_\mu)^2$$

$$(\lambda = 1, 2, \cdots n-1;\ \mu = \lambda + 1, \lambda + 2, \cdots n).$$

Wie wir wissen, liefert das Verschwinden von D_f die charakteristische Bedingung dafür, dass f und f' einen gemeinsamen Theiler haben, und dass $f = 0$ also eine mehrfache Wurzel besitzt.

Ist keine Verwechselung zu befürchten, dann schreiben wir statt D_f kürzer D.

§ 159. Der Ausdruck von D_f in der Form einer Determinante nach § 139

$$(3)\quad D=\frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots a_{n-1} & a_n & 0\cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots a_{n-2} & a_{n-1} & a_n\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ na_0 & (n-1)a_1 & (n-2)a_2 & \cdots a_{n-1} & 0 & 0\cdots \\ 0 & na_0 & (n-1)a_1 & \cdots 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0\cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\begin{matrix} \\ \\ (n-1\text{ Zeilen}), \\ \\ \\ (n\text{ Zeilen}). \end{matrix}$$

So erhält man z. B. als Discriminante von $f=a_0z^2+a_1z+a_2$

$$D=\frac{1}{a_0}\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ 2a_0 & a_1 & 0 \\ 0 & 2a_0 & a_1 \end{vmatrix}=4a_0a_2-a_1^2,$$

und das stimmt, wie (2ª) fordert, überein mit

$$D=-a_0^2(z_1-z_2)^2=a_0^2[4z_1z_2-(z_1+z_2)^2]=a_0^2\left[4\frac{a_2}{a_0}-\left(\frac{a_1}{a_0}\right)^2\right]$$
$$=4a_0a_2-a_1^2.$$

Man kann die Discriminante auch nach der Bézout'schen Methode als Determinante n^{ter} Ordnung darstellen, genau wie dies in § 142 angegeben worden ist. Dabei ergiebt sich (§ 146, II)

$$(4)\quad D=\frac{1}{a_0}R_{f,f'}=\frac{(-1)^n}{a_0\cdot a_n}R_{f,f'\cdot s}=\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{a_0a_n}|d_{ik}|\qquad (i,k=1,2,\cdots n),$$

wenn man

$$(5)\quad \begin{aligned} d_{ik}=&(i+k-1)a_0a_{i+k-1}+(i+k-3)a_1a_{i+k-2}\\ &+(i+k-5)a_2a_{i+k-3}+\cdots+(i-k-1)a_{i-1}a_k \end{aligned}$$

setzt, wobei natürlich alle a_λ, bei denen $\lambda>n$ ist, gleich Null anzunehmen sind.

Für die Function zweiten Grades $f=a_0z^2+a_1z+a_2$ entsteht hiernach

$$D=\frac{-1}{a_0a_2}\begin{vmatrix} a_0a_1 & 2a_0a_2 \\ 2a_0a_2 & a_1a_2 \end{vmatrix}=4a_0a_2-a_1^2,$$

und für die Function dritten Grades $f=a_0z^3+a_1z^2+a_2z+a_3$ in gleicher Weise

$$D=\frac{-1}{a_0a_3}\begin{vmatrix} a_0a_1 & 2a_0a_2 & 3a_0a_3 \\ 2a_0a_2 & 3a_0a_3+a_1a_2 & 2a_1a_3 \\ 3a_0a_3 & 2a_1a_3 & a_2a_3 \end{vmatrix}=\begin{aligned} &27a_0^2a_3^2-18a_0a_1a_2a_3\\ &+4a_0a_2^3+4a_1^3a_3-a_1^2a_2^2. \end{aligned}$$

§ 160. Man kann die Discriminante auch in der Gestalt einer Determinante von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung darstellen. Zu diesem Zwecke multiplicirt man in (3) die Elemente jeder der ersten $(n-1)$

Zeilen auf der rechten Seite mit n und erhält dadurch für $n^{n-1}D$ eine Determinante, welche nun dadurch umgewandelt wird, dass man von jedem Elemente der α^{ten} Zeile ($\alpha = 1, 2, \cdots n-1$) das entsprechende Element der $(n-1+\alpha)^{\text{ten}}$ Zeile abzieht. Das ergiebt nach Unterdrückung der ersten Spalte

$$n^{n-1}D = (-1)^{n-1} \cdot n R_{f_1, f'},$$

oder

$$D = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{n-2}} R_{f_1, f'} = \frac{1}{n^{n-2}} R_{f', f_1}, \tag{6}$$

wenn wir die neue Function

$$f_1(z) = a_1 z^{n-1} + 2a_2 z^{n-2} + 3a_3 z^{n-3} + \cdots + na_n \tag{7}$$

einführen. Wendet man nun auf (6) die Bézout'sche Methode an, dann erhält man D als symmetrische Determinante der Ordnung $(n-1)$.

Das gleiche Resultat kann man auch mit Hülfe von § 151, (20) aus der Beziehung

$$nf(z) = zf'(z) + f_1(z)$$

folgern.

Für eine Function dritten Grades ergiebt sich auf diesem Wege die Form

$$D = \frac{-1}{3} \begin{vmatrix} 6a_0a_2 - 2a_1^2, & 9a_0a_3 - a_1a_2 \\ 9a_0a_3 - a_1a_2, & 6a_1a_3 - 2a_2^2 \end{vmatrix}.$$

§ 161. Aehnlich wie in § 150 der vorigen Vorlesung betrachten wir jetzt die entsprechende Entwickelung des Quotienten

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = c_0 z^{-1} + c_1 z^{-2} + c_2 z^{-3} + \cdots$$

und können hier, früheren Untersuchungen gemäss (§ 91),

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z-z_1} + \frac{1}{z-z_2} + \cdots + \frac{1}{z-z_n} = s_0 z^{-1} + s_1 z^{-2} + s_2 z^{-3} + \cdots$$

setzen. Bezeichnen wir demnach

$$C_\varrho = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\varrho-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\varrho \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\varrho-1} & s_\varrho & \cdots & s_{2\varrho-2} \end{vmatrix},$$

so stellt sich für die Discriminante als neue Form heraus

$$D = \frac{1}{a_0} R_{f, f'} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_0^{2n-2} C_n.$$

auch das Verschwinden von C_n die charakteristische Bedingung, dass $f = 0$ eine mehrfache Wurzel besitzt.

Dies können wir auch leicht direct einsehen. Es ist nämlich, wie bekannt,

$$C_n = \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 & \cdots & z_1^{n-1} \\ 1 & z_2 & z_2^2 & \cdots & z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & z_n & z_n^2 & \cdots & z_n^{n-1} \end{vmatrix}^2 = \prod_{\lambda,\mu} (z_\lambda - z_\mu)^2 \quad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1; \mu = \lambda+1, \cdots n).$$

§ 162. Ersetzt man in f jede Wurzel z_λ durch $(z_\lambda + t)$, so gehen die a_λ, wie man nach der Methode von § 123 erkennt, bis auf höhere Potenzen von t in die Werthe $a_\lambda + (n + 1 - \lambda) a_{\lambda-1} t$ über. Dabei kann sich D selbst nicht ändern, denn die Wurzeldifferenzen bleiben ja unberührt. Hieraus folgt, dass, wenn man die Discriminante

$$D(a_\lambda + t(n - \lambda + 1) a_{\lambda-1})$$

nach Potenzen von t entwickelt, der Coefficient von t^1 gleich Null wird; folglich befriedigt die Discriminante die partielle Differentialgleichung

$$(9) \quad n a_0 \frac{\partial D}{\partial a_1} + (n-1) a_1 \frac{\partial D}{\partial a_2} + \cdots + 2 a_{n-2} \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}} + a_{n-1} \frac{\partial D}{\partial a_n} = 0.$$

Eine andere Differentialgleichung liefert die Thatsache, dass D eine homogene, und eine dritte diejenige, dass D eine isobarische Function ist. Die der homogenen Function der Ordnung $(2n-2)$ entsprechende Euler'sche Gleichung lautet

$$(10) \quad a_0 \frac{\partial D}{\partial a_0} + a_1 \frac{\partial D}{\partial a_1} + \cdots + a_n \frac{\partial D}{\partial a_n} = 2(n-1) D.$$

Setzt man ferner $a_\lambda (1 + t)^\lambda$ statt a_λ für $\lambda = 0, 1, \cdots n$, dann wird die isobarische Function D dadurch mit $(1 + t)^{n(n-1)}$ multiplicirt werden; es gilt also die Gleichung

$$D(\cdots, a_\lambda (1 + t)^\lambda, \cdots) = (1 + t)^{n(n-1)} D(\cdots, a_\lambda, \cdots),$$

und die Vergleichung der Coefficienten von t ergiebt

$$(11) \quad n(n-1) D = a_1 \frac{\partial D}{\partial a_1} + 2 a_2 \frac{\partial D}{\partial a_2} + \cdots + n a_n \frac{\partial D}{\partial a_n}.$$

Die beiden Gleichungen (10) und (11) lassen sich zu der neuen Gleichung

$$(12) \quad n(n-1) D = n a_0 \frac{\partial D}{\partial a_0} + (n-1) a_1 \frac{\partial D}{\partial a_1} + \cdots + 1 \cdot a_{n-1} \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}}$$

combiniren.

Mit Hülfe von (9) können wir nach vorläufiger Feststellung des litteralen Theils der Discriminante die Berechnung ihrer Zahlencoefficienten durchführen. Wenn wir z. B. für die Gleichung dritten Grades zunächst

$$D = u_1 a_0^2 a_3^2 + u_2 a_0 a_1 a_2 a_3 + u_3 a_0 a_2^3 + u_4 a_1^3 a_3 + u_5 a_1^2 a_2^2$$

setzen, dann fordert (9) das Bestehen der Gleichungen

$$3u_2 + 2u_1 = 0, \quad 9u_4 + 2u_2 = 0, \quad 4u_5 + u_4 = 0, \quad 6u_5 + 6u_3 + u_2 = 0,$$

und daher müssen die Verhältnisse der Coefficienten durch

$$u_1 = 27k, \quad u_2 = -18k, \quad u_3 = 4k, \quad u_4 = 4k, \quad u_5 = -1k$$

gegeben sein.

Aus der ersten Determinantenform erkennt man ferner unmittelbar, dass D ein Glied $n^n a_0^n a_n^{n-1} \cdot \frac{1}{a_0} = n^n (a_0 a_n)^{n-1}$ enthält. In unserem hier betrachteten Specialfalle ist also $k = 1$ zu setzen, und dadurch wird die Bestimmung von D vollendet.

Ob diese Methode der Coefficientenbestimmung in allen Fällen zu eindeutigen Resultaten führt, müssen wir hier freilich dahingestellt sein lassen (vgl. § 134).

§ 163. Genau wie wir bei der Theorie der Resultante (§ 149) die Gleichung (9) abgeleitet haben, so können wir hier zu der Gleichung

$$D = f \cdot g_1 + f' \cdot g \tag{13}$$

gelangen, in welcher g_1 eine Function höchstens vom Grade $(n-2)$ bedeutet, und g eine solche höchstens vom Grade $(n-1)$. Besitzt $f = 0$ eine Wurzel z_1 in ν-facher Multiplicität, und also $f' = 0$ dieselbe in $(\nu - 1)$-facher Multiplicität, so verschwindet D, wenn $\nu > 1$ ist, und, wie man sieht, muss g dann den Factor $(z - z_1)$ in der ersten Potenz besitzen.

Nehmen wir nun zunächst die Coefficienten von f als willkürlich an, bilden (13) und differenziren diese Gleichung nach a_λ, so entsteht

$$\frac{\partial D}{\partial a_\lambda} = f \frac{\partial g_1}{\partial a_\lambda} + z^{n-\lambda} \cdot g_1 + f' \cdot \frac{\partial g}{\partial a_\lambda} + (n - \lambda) z^{n-\lambda-1} \cdot g.$$

Führen wir dann die $a_0, a_1, \cdots a_n$ in solche Werthe über, dass $f = 0$ eine Wurzel z_1 genau von der Multiplicität 2 erhält, so geht nach der eben gemachten Bemerkung die letzte Gleichung in

$$\frac{\partial D}{\partial a_\lambda} = z_1^{n-\lambda} g_1(z_1) \tag{14}$$

über. Man erhält demnach die Proportionen

$$\frac{\partial D}{\partial a_n} : \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}} : \cdots : \frac{\partial D}{\partial a_0} = 1 : z_1 : \cdots : z_1^n, \tag{15}$$

[redacted]wurzel der Gleichung $f = 0$ berechnet werden

Falle mehrerer vielfachen Wurzeln

unseren früheren (§ 149) ent-

§ 164. In die Formel (2ª) wollen wir für f ein Product $f_1 \cdot f_2$ eintragen.

Wir setzen

$$f_1 = \alpha_0' z^{n_1} + \alpha_1' z^{n_1-1} + \cdots, \quad f_2 = \alpha_0'' z^{n_2} + \alpha_1'' z^{n_2-1} + \cdots,$$
$$f = (\alpha_0'\alpha_0'') z^{n_1+n_2} + (\alpha_0'\alpha_1'' + \alpha_1'\alpha_0'') z^{n_1+n_2-1} + \cdots;$$

dabei sollen die Wurzeln von $f_1 = 0$ mit z_1', z_2', $\cdots$, und die von $f_2 = 0$ mit z_1'', z_2'', $\cdots$ bezeichnet werden. Dann ergeben die Formeln (2ª) und § 136, (3)

$$D_{f_1 \cdot f_2} = (-1)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} (\alpha_0'\alpha_0'')^{2(n_1+n_2-1)} \cdot \prod (z_\lambda' - z_\mu')^2 \cdot \prod (z_\lambda'' - z_\mu'')^2 \cdot \prod (z_\lambda' - z_\mu'')^2$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}(n_1+n_2)(n_1+n_2-1)} (\alpha_0'\alpha_0'')^{2(n_1+n_2-1)} \cdot \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n_1(n_1-1)} D_{f_1}}{(\alpha_0')^{2n_1-2}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{1}{2}n_2(n_2-1)} D_{f_2}}{(\alpha_0'')^{2n_2-2}} \cdot \frac{R^2_{f_1,f_2}}{\alpha_0'^{2n_2} \alpha_0''^{2n_1}},$$

(16) $$D_{f_1 \cdot f_2} = (-1)^{n_1 n_2} D_{f_1} \cdot D_{f_2} \cdot R^2_{f_1, f_2}.$$

Diese Formel hätten wir auch durch Determinantenbetrachtungen ableiten können, die freilich etwas umständlich geworden wären.

Fünfzehnte Vorlesung.

Die quadratischen Formen.

§ 165. Unter einer quadratischen Form von n Variablen verstehen wir einen Ausdruck

(1) $$f = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n),$$

in welchem die x_1, x_2, $\cdots$ x_n Variable, und die $c_{\lambda\mu}$ reelle Constanten sind, für die wir die Bedingung $c_{\lambda\mu} = c_{\mu\lambda}$ aufstellen. Wir werden mitunter, der Kürze halber, die Bezeichnung der Variablen in f durch $f(x)$ andeuten. Wir nennen

(2) $$C = |\, c_{\lambda\mu} \,| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

die Determinante*) der quadratischen Form (1); sie ist symmetrisch.

---

*) Gauss bezeichnet $(-C)$ als Determinante, Disq. arith. § 154. Herr Sylvester nennt C die Invariante der Form.

Den Coefficienten von $c_{\lambda\mu}$ in C schreiben wir $\gamma_{\lambda\mu}$; dann wird auch $\gamma_{\lambda\mu} = \gamma_{\mu\lambda}$, und es gelten die Gleichungen

$$(3) \qquad \sum_{\varkappa} c_{\varkappa\lambda}\gamma_{\varkappa\mu} = \begin{cases} C & (\text{wenn } \lambda = \mu) \\ 0 & (\text{wenn } \lambda \neq \mu) \end{cases} \qquad (\varkappa, \lambda, \mu = 1, 2, \cdots n).$$

Die quadratische Form mit den Coefficienten $\gamma_{\lambda\mu}$

$$(4) \qquad F = \sum_{\lambda,\mu} \gamma_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

nennen wir die adjungirte Form von f und, im Falle dass C von Null verschieden ist, den Quotienten von F durch C

$$(5) \qquad R = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\gamma_{\lambda\mu}}{C} X_\lambda X_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

die reciproke Form von f.

Aus (1) folgt durch Differentiation nach x_λ

$$u_\lambda = \tfrac{1}{2} f'(x_\lambda) = \tfrac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = c_{\lambda 1}x_1 + c_{\lambda 2}x_2 + \cdots + c_{\lambda n}x_n$$
$$= c_{1\lambda}x_1 + c_{2\lambda}x_2 + \cdots + c_{n\lambda}x_n,$$

und also ist die quadratische Form

$$(6) \qquad f = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda} \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} x_\lambda = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda} f'(x_\lambda)\, x_\lambda = \sum_{\lambda} u_\lambda x_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n).$$

Ferner erkennt man, dass, wenn λ eine Constante, und $y_1, y_2, \cdots y_n$ eine Reihe anderer Variablen bedeutet,

$$f(x_i + \lambda y_i) = \sum_{\varkappa,\mu} c_{\varkappa\mu}(x_\varkappa + \lambda y_\varkappa)(x_\mu + \lambda y_\mu)$$
$$(7) \qquad = \sum_{\varkappa,\mu} c_{\varkappa\mu} x_\varkappa x_\mu + \lambda^2 \sum_{\varkappa,\mu} c_{\varkappa\mu} y_\varkappa y_\mu + 2\lambda \sum_{\varkappa,\mu} c_{\varkappa\mu} x_\varkappa y_\mu$$
$$= f(x) + \lambda^2 f(y) + \lambda \sum_{\mu} f'(x_\mu) y_\mu$$
$$= f(x) + \lambda^2 f(y) + \lambda \sum_{\mu} f'(y_\mu) x_\mu$$

wird, wo μ die Zahlenreihe $1, 2, \cdots n$ durchläuft.

§ 166. Wir führen nun in f statt der x neue Variable y durch die Substitutionsgleichungen

$$(8) \qquad x_\mu = \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu} y_\lambda \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

ein, machen aber dabei die Voraussetzung, dass die Determinante

$$A = |\, a_{\lambda\mu} \,| \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

von Null verschieden ist, damit man die Substitution umkehren, und, wenn $\alpha_{\lambda\mu}$ den Coefficienten von $a_{\lambda\mu}$ in A bedeutet,

$$(8^a) \qquad y_\mu = \sum_\lambda \frac{\alpha_{\mu\lambda}}{A} x_\lambda \qquad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \cdots n)$$

setzen könne. Durch diese Umänderung (8) erhalten wir die transformirte, quadratische Form

$$(9) \qquad \begin{aligned} g(y) &= \sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda\mu} y_\lambda y_\mu \qquad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \cdots n), \\ d_{\varkappa\lambda} &= \sum_{\mu,\nu} a_{\varkappa\mu} a_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} \qquad (\varkappa,\ \lambda,\ \mu,\ \nu = 1,\ 2,\ \cdots n), \end{aligned}$$

wobei dann auch wieder $d_{\varkappa\lambda} = d_{\lambda\varkappa}$ sein wird.

Man erkennt sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{n1} \\ \cdots\cdots \\ a_{1n} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots \\ c_{n1} \cdots c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_{11} \cdots d_{1n} \\ \cdots\cdots \\ d_{n1} \cdots d_{nn} \end{vmatrix}$$

oder kürzer

$$A \cdot C \cdot A = D,$$

aus der hervorgeht, dass C und D gleichzeitig Null oder gleichzeitig von Null verschieden sind. Diese Betrachtung lässt sich folgendermassen erweitern: Wir berechnen das Product der drei folgenden Determinanten $(n + r)^{\text{ten}}$ Grades, deren Bildung ja leicht zu übersehen ist, und in denen die $u_{\varkappa\lambda}$, $v_{\varkappa\lambda}$ willkürliche Grössen bedeuten,

$$\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{n1} & 0 & 0 \cdots \\ \cdots\cdots & & \\ a_{1n} \cdots a_{nn} & 0 & 0 \cdots \\ 0 \ \cdots 0 & 1 & 0 \cdots \\ 0 \ \cdots 0 & 0 & 1 \cdots \\ \cdots\cdots & & \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} \cdots c_{1n} & u_{11} \cdots u_{1r} \\ \cdots\cdots & \\ c_{n1} \cdots c_{nn} & u_{n1} \cdots u_{nr} \\ v_{11} \cdots v_{1n} & 0 \ \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \\ v_{r1} \cdots v_{rn} & 0 \ \cdots 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} & 0 & 0 \cdots \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1} \cdots a_{nn} & 0 & 0 \cdots \\ 0 \ \cdots 0 & 1 & 0 \cdots \\ 0 \ \cdots 0 & 0 & 1 \cdots \\ \cdots\cdots & & \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} d_{11} \cdots d_{1n} & \sum a_{\lambda 1} u_{\lambda 1} \cdots \sum a_{\lambda 1} u_{\lambda r} \\ \cdots\cdots & \\ d_{n1} \cdots d_{nn} & \sum a_{\lambda n} u_{\lambda 1} \cdots \sum a_{\lambda n} u_{\lambda r} \\ \sum a_{\lambda 1} v_{1\lambda} \cdots \sum a_{\lambda n} v_{1\lambda} \cdots & 0 \ \cdots 0 \\ \cdots\cdots & \\ \sum a_{\lambda 1} v_{r\lambda} \cdots \sum a_{\lambda n} v_{r\lambda} \cdots & 0 \ \cdots 0 \end{vmatrix}.$$

Der erste und der dritte Factor links besitzt den Werth A. Wenn man nun auf beiden Seiten die Coefficienten von $u_{1\lambda} u_{2\mu} u_{3\nu} \cdots v_{1\varrho} v_{2\sigma} v_{3\tau} \cdots$ bestimmt, so wird dies links das Product aus A^2 in eine Subdeter-

minante $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung von C, rechts dagegen eine lineare, homogene Function aus Subdeterminanten $(n-r)^{\text{ter}}$ Ordnung von D; es sind also alle Subdeterminanten einer beliebigen Ordnung von C lineare Functionen der Subdeterminanten gleicher Ordnung von D; und dasselbe gilt umgekehrt, wie man erkennt, wenn man in der obigen Gleichung die a durch die α und die c durch die d ersetzt.

Ist irgend eine Matrix vorgelegt, so sagen wir, dieselbe besitze den Rang r, wenn alle in ihr enthaltenen Determinanten der Ordnung $(r+1)$ verschwinden, dagegen nicht alle der Ordnung r. Das giebt dann für unseren Fall, mit Hinblick auf das soeben Bewiesene: Die Determinanten C und D der ursprünglichen und der transformirten quadratischen Form haben denselben Rang.

Hat die Determinante einer quadratischen Form den Rang r, so sagen wir, die Form selbst sei vom Range r.

Gesetzt, man könnte die Coefficienten a so wählen, dass in g nur r der Variablen y auftreten, etwa $y_1, y_2, \cdots y_r$, die übrigen Variablen aber fehlen, dann verschwinden alle $d_{\lambda\mu}$, in denen ein Index grösser als r ist, und die Determinante D hat höchstens den Rang ρ; dasselbe gilt dann auch für C.

§ 167. Ist $C = |c_{\lambda\mu}|$ gleich Null, dann sind die Functionen

$$u_\lambda = \tfrac{1}{2} f'(x_\lambda) = c_{\lambda 1}x_1 + c_{\lambda 2}x_2 + \cdots + c_{\lambda n}x_n \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n)$$

durch eine homogene, lineare Gleichung

$$f'(x_1)y_1 + f'(x_2)y_2 + \cdots + f'(x_n)y_n = 0$$

mit einander verbunden, in welcher die y Constanten sind, welche nicht alle verschwinden. Setzt man diese Werthe y statt der x in die Formeln (6) ein, dann folgt $f(y) = 0$, und (7) liefert daher

$$\begin{aligned} f(x + \lambda y) &= f(x) + \lambda \sum f'(x_\mu)y_\mu, \\ &= f(x), \end{aligned}$$

so dass also $f(x + \lambda y)$ von λ und den y unabhängig ist. Wenn jetzt y_α eine der nicht verschwindenden Constanten y bedeutet, dann giebt die eben erhaltene Gleichung für $\lambda = -x_\alpha : y_\alpha$ wegen

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(x - \frac{x_\alpha}{y_\alpha} y\right) \\ &= f\left(x_1 - \frac{x_\alpha}{y_\alpha} y_1, \cdots x_{\alpha-1} - \frac{x_\alpha}{y_\alpha} y_{\alpha-1}, 0, \cdots x_n - \frac{x_\alpha}{y_\alpha} y_n\right) \end{aligned}$$

den Beweis für den Satz: Jede quadratische Form, deren Rang

geringer als n ist, lässt sich als quadratische Form von weniger als n Variablen darstellen, welche lineare Aggregate der ursprünglichen Variablen sind.

Die Umkehrung dieses Satzes ist leicht zu beweisen: Wenn in der quadratischen Form (9) etwa y_n nicht auftritt, und also alle $d_{\lambda n}$ verschwinden, dann ist $D = 0$, und da $A \neq 0$ sein muss, so liefert

$$D = A^2 \cdot C$$

das Resultat $C = 0$. Ist eine quadratische Form von n Variablen als quadratische Form einer geringeren Zahl von Variablen darstellbar, welche lineare Aggregate der ursprünglichen sind, dann ist ihr Rang geringer als n.

Aus der ersten Ueberlegung folgt durch einfache Fortsetzung: Ist der Rang n_1 von f geringer als die Anzahl n der Variablen, dann lässt sich die Form durch n_1 neue Variable darstellen, derart, dass jetzt die Determinante der umgewandelten Form von Null verschieden ist. Eine weitere Verminderung der Zahl der Variablen ist nicht möglich.

§ 168. Setzt man $x_\lambda = x_{i_\lambda}$, indem man unter $i_1, i_2, \cdots i_n$ eine Permutation von $1, 2, \cdots n$ versteht, dann liefert diese elementare Transformation dieselben Coefficienten nur in anderer Folge. Dabei ist jedes Diagonalglied $d_{\varkappa\varkappa}$ gleich einem Diagonalgliede $c_{\mu\mu}$; und sämmtliche Hauptsubdeterminanten, d. h. solche, deren Hauptdiagonale der Hauptdiagonale von C entnommen ist, gehen wieder in Hauptsubdeterminanten von D über. Es ist auch $d_{\varkappa\lambda} = d_{\lambda\varkappa}$.

§ 169. Wir betrachten, zunächst unter der Voraussetzung $C \neq 0$, noch eine bemerkenswerthe Substitution. Wir schreiben (1) in der Form

$$(10)\quad \begin{aligned} f &= x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdot \quad + x_n u_n, \\ u_\lambda &= c_{\lambda 1} x_1 + c_{\lambda 2} x_2 + \cdot\cdot + c_{\lambda n} x_n = \tfrac{1}{2} f'(x_\lambda) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n), \end{aligned}$$

und wollen jetzt die u_λ als neue Variable in f einführen. Es treten dann an die Stelle von (8) die Gleichungen

$$(11)\qquad x_\mu = \sum_\lambda \frac{\gamma_{\lambda\mu}}{C} u_\lambda \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n),$$

und die transformirte Form hat die Coefficienten

$$d_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{C^2} \sum_{\mu,\nu} \gamma_{\varkappa\mu} \gamma_{\lambda\nu} c_{\mu\nu} = \frac{1}{C^2} \sum_\mu \gamma_{\varkappa\mu} \sum_\nu \gamma_{\lambda\nu} c_{\mu\nu}$$

d. h. wie die Vergleichung mit (5) zeigt, die transformirte, quadratische Form ist identisch mit der reciproken Form

$$(12) \qquad g = \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\gamma_{\varkappa\lambda}}{C} u_\varkappa u_\lambda \qquad (\varkappa,\ \lambda = 1,\ 2,\ \cdots n).$$

Wenn $C = 0$ ist, kann man folgendermassen vorgehen, um zu ähnlichen Resultaten zu gelangen. Der Rang der Determinante C sei gleich r, und durch eine elementare Transformation (§ 168) seien die Variablen, wenn es nöthig ist, so umgeordnet, dass

$$C^{(r)} = |\, c_{\lambda\mu}\,| \qquad (\lambda,\ \mu = 1,\ 2,\ \cdots r)$$

von Null verschieden ist. Dann entnehmen wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} u_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n &= c_{11}x_1 + \cdots + c_{1r}x_r, \\ \cdots\cdots\cdots\

$$C^{(r)}g = \sum_{\lambda=1}^{r} u_\lambda \{\gamma_{1\lambda}^{(r)} u_1 - c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots) + \cdots + \gamma_{r\lambda}^{(r)}(u_r - c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots)\}$$

$$+ C^{(r)} \sum_{\mu=r+1}^{r} x_\mu (k_{\mu 1}u_1 + k_{\mu 2}u_2 + \cdots + k_{\mu r}u_r)$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda=1}^{r} \gamma_{\varkappa\lambda}^{(r)} u_\varkappa u_\lambda + \sum_{\mu=r+1}^{n} \sum_{\nu=1}^{r} x_\mu u_\nu \left(k_{\mu\nu} C^{(r)} - \sum_{\varrho=1}^{r} c_{\varrho\mu}\gamma_{\varrho\nu}^{(r)}\right)$$

$$= \sum_{\varkappa,\lambda} \gamma_{\varkappa\lambda}^{(r)} u_\varkappa u_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots r).$$

Denn wegen (15) verschwindet der Coefficient von $x_\mu u_\nu$, weil ja in der symmetrischen Determinante $C^{(r)}$ sowohl $c_{\lambda\nu} = c_{\nu\lambda}$ als $\gamma_{\mu\nu}^{(r)} = \gamma_{\nu\mu}^{(r)}$ ist. Wir haben somit, genau dem Resultate (12) entsprechend,

$$(12^a) \qquad g = \sum_{\varkappa,\lambda} \frac{\gamma_{\varkappa\lambda}^{(r)}}{C^{(r)}} u_\varkappa u_\lambda \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots r).$$

Hierdurch ist die am Schlusse von § 167 bewiesene Reductionsmöglichkeit verwirklicht worden.

§ 170. Für den Fall, dass $C = 0$ ist, ohne dass alle ersten Subdeterminanten von C verschwinden, möge γ_{ik} von Null verschieden sein. Man hat dabei mit Hülfe bekannter Determinantensätze

$$\gamma_{\varkappa\lambda}\gamma_{ik} - \gamma_{\varkappa k}\gamma_{i\lambda} = 0 \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

$$\gamma_{\varkappa\lambda} = \frac{1}{\gamma_{ik}}\gamma_{\varkappa k}\gamma_{i\lambda} = \frac{1}{\gamma_{ik}}\gamma_{\varkappa k}\gamma_{\lambda i},$$

$$\gamma_{1k} : \gamma_{2k} : \cdots \gamma_{nk} = \gamma_{1i} : \gamma_{2i} : \cdots \gamma_{ni},$$

$$F = \sum_{\varkappa,\lambda} \gamma_{\varkappa\lambda} X_\varkappa X_\lambda = \frac{1}{\gamma_{ik}} \sum_{\varkappa} \gamma_{\varkappa k} X_\varkappa \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda i} X_\lambda = \text{cst.} \left(\sum_{\lambda} \gamma_{\lambda i} X_\lambda\right)^2$$

$$(\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots n),$$

d. h. hat die Determinante einer quadratischen Form von n Variablen den Rang $(n-1)$, so ist ihre Adjuncte ein Quadrat. Die Umkehrung dieses Satzes ist gleichfalls richtig.

In der That, wenn die Adjuncte der vorgelegten Form f

$$F = \sum_{\lambda,\mu} \gamma_{\lambda\mu} X_\lambda X_\mu = \tau \left(\sum_{\lambda} p_\lambda X_\lambda\right)^2 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

ist, dann wird der Coefficient von $X_\lambda X_\mu$

$$\gamma_{\lambda\mu} = \tau p_\lambda p_\mu,$$

und demnach kann man aus den beiden Gleichungen

$$C = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda\mu} c_{\lambda\mu} = \tau p_\mu \cdot \sum_{\lambda} p_\lambda c_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots n),$$

$$0 = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda\nu} c_{\lambda\mu} = \tau p_\nu \cdot \sum_{\lambda} p_\lambda c_{\lambda\mu} \qquad (\mu \neq \nu)$$

den Schluss ziehen, dass C gleich Null sein muss. Denn wenn die Summe $\sum p_\lambda c_{\lambda\mu}$ verschwindet, muss auch C verschwinden; wäre hingegen diese Summe von Null verschieden, dann würde $p_\nu = 0$, und auch hier müsste wegen

$$C = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda\nu} c_{\lambda\nu} = \tau p_\nu \sum_{\lambda} p_\lambda c_{\lambda\nu}$$

wiederum $C = 0$ werden.

§ 171. Wir behandeln jetzt die gleichzeitigen Transformationen der Form f und ihrer reciproken Form R

$$f = \sum_{\lambda,\mu} c_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu, \quad R = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\gamma_{\lambda\mu}}{C} X_\lambda X_\mu$$

durch die beiden Substitutionen

$$x_\varkappa = \sum_{\lambda} a_{\varkappa\lambda} \xi_\lambda \quad \text{bezw.} \quad X_\varkappa = \sum_{\lambda} \frac{\alpha_{\varkappa\lambda}}{A} \Xi_\lambda.$$

Dadurch geht f in die Gestalt über

$$g = \sum_{\varkappa,\lambda} \xi_\varkappa \xi_\lambda \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} a_{\mu\varkappa} a_{\nu\lambda} = \sum_{\varkappa,\lambda} \xi_\varkappa \xi_\lambda d_{\varkappa\lambda},$$

und die reciproke Form R in

$$\Gamma = \sum_{\varkappa,\lambda} \Xi_\varkappa \Xi_\lambda \sum_{\mu,\nu} \frac{\gamma_{\mu\nu} \alpha_{\mu\varkappa} \alpha_{\nu\lambda}}{A^2 C} = \sum_{\varkappa,\lambda} \Xi_\varkappa \Xi_\lambda D_{\varkappa\lambda}.$$

Es lässt sich jetzt leicht nachweisen, dass Γ die reciproke Form zu g ist. Es wird nämlich

$$\sum_{\varkappa} d_{\varkappa\lambda} D_{\varkappa\mu} = \sum_{\varkappa} \sum_{\nu,\varrho} c_{\nu\varrho} a_{\nu\varkappa} a_{\varrho\lambda} \sum_{\sigma,\tau} \frac{\gamma_{\sigma\tau} \alpha_{\sigma\varkappa} \alpha_{\tau\mu}}{A^2 C}$$

$$= \frac{1}{A^2 C} \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\lambda} \alpha_{\tau\mu} \sum_{\nu,\sigma} c_{\nu\varrho} \gamma_{\sigma\tau} \sum_{\varkappa} a_{\nu\varkappa} \alpha_{\sigma\varkappa},$$

und da die letzte Summe für $\nu \neq \sigma$ verschwindet, dagegen für $\nu = \sigma$ den Werth A hat, so ergiebt sich zuerst

$$\sum_{\varkappa} d_{\varkappa\lambda} D_{\varkappa\mu} = \frac{1}{AC} \sum_{\varrho,\tau} a_{\varrho\lambda} \alpha_{\tau\mu} \sum_{\nu} c_{\nu\varrho} \gamma_{\nu\tau}.$$

[redacted] ...hwindet wieder die letzte Summe für $\varrho \neq \tau$, während sie ...leich C wird; also ist weiter

$$\sum_{\varkappa} d_{\varkappa\lambda} D_{\varkappa\mu} = \frac{1}{A} \sum_{\varrho} a_{\varrho\lambda} \alpha_{\varrho\mu},$$

und daraus ergiebt sich, dass für $\lambda \neq \mu$ der Werth $\sum d_{\varkappa\lambda} D_{\varkappa\mu}$ zu Null, für $\lambda = \mu$ zu Eins wird. Das enthält den Beweis der ausgesprochenen Behauptung.

§ 172. Zum Zwecke unserer weiteren Ableitungen erinnern wir an die folgenden Determinantensätze (vgl. J. für M. Bd. 114; S. 345). Wir bezeichnen zur Abkürzung unter der Annahme beliebiger Grössen $c_{\varkappa\lambda}$ die Determinanten

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1m} & c_{1\beta} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & \cdots & c_{mm} & c_{m\beta} \\ c_{\alpha 1} & \cdots & c_{\alpha m} & c_{\alpha\beta} \end{vmatrix} = D_{m+1}(\alpha, \beta), \qquad (c_{\alpha\beta} = D_1(\alpha, \beta))$$

und weiter

$$D_{m+1}(m+1, m+1) = D_{m+1} \qquad (c_{11} = D_1),$$

dann gelten die Gleichungen

$$(16) \qquad \begin{vmatrix} D_m(m, m) & D_m(m, \beta) \\ D_m(\alpha, m) & D_m(\alpha, \beta) \end{vmatrix} = D_{m-1} \cdot D_{m+1}(\alpha, \beta),$$

$$(17) \qquad \begin{vmatrix} D_m(m, m) & D_m(m, m+1) & D_m(m, \beta) \\ D_m(m+1, m) & D_m(m+1, m+1) & D_m(m+1, \beta) \\ D_m(\alpha, m) & D_m(\alpha, m+1) & D_m(\alpha, \beta) \end{vmatrix} = D_{m-1}^2 \cdot D_{m+2}(\alpha, \beta).$$

Wir gehen jetzt von der quadratischen Form (1) mit dem Range n_1 aus, wobei $1 \leqq n_1 \leqq n$ sein soll, und wollen sie in ein Aggregat von Quadraten umwandeln. Wir nehmen zunächst an, dass nicht alle $c_{\varkappa\varkappa}$ verschwinden; im Laufe der Untersuchung wird sich zeigen, wie man den jetzt ausgeschlossenen Fall zu behandeln hätte. Durch eine elementare Transformation kann man, wenn es nöthig sein sollte, die Indices so verändern, dass $c_{11} \neq 0$ wird. Dies wollen wir geschehen denken. Da $c_{\varkappa\lambda} = c_{\lambda\varkappa}$ und $D_m(\varkappa, \lambda) = D_m(\lambda, \varkappa)$ ist, so folgt wegen (16)

$$f = \frac{1}{c_{11}} (c_{11} x_1 + \cdots + c_{1n} x_n)^2 + \sum_2^n \left(c_{\varkappa\lambda} - \frac{c_{1\varkappa} c_{1\lambda}}{c_{11}} \right) x_\varkappa x_\lambda$$

$$= \frac{1}{D_1} \left(\sum_1^n D_1(1, \lambda) x_\lambda \right)^2 + \frac{1}{D_1} \sum_2^n (D_1 D_1(\varkappa, \lambda) - D_1(1, \lambda) D_1(\varkappa, 1)) x_\varkappa x_\lambda$$

$$= \frac{1}{D_1} \left(\sum_1^n D_1(1, \lambda) x_\lambda \right)^2 + \frac{1}{D_1} \sum_2^n D_2(\varkappa, \lambda) x_\varkappa x_\lambda.$$

Ist $n_1 = 1$, dann verschwinden die sämmtlichen $D_2(\varkappa, \lambda)$, und f wird gleich einem Quadrate. Ist $n_1 > 1$, und sind nicht sämmtliche $D_2(\varkappa, \varkappa)$ gleich Null, dann kann man durch eine, auf die letzte Summe ausgeübte elementare Transformation die Indices von $x_2, x_3, \cdots x_n$ so verändern, dass $D_2(2, 2) = D_2$ von Null verschieden bleibt. Dann liefert dieselbe Methode

$$f = \frac{1}{D_1}\Big(\sum_1^n D_1(1,\lambda)x_\lambda\Big)^2 + \frac{1}{D_1 D_2}\Big(\sum_2^n D_2(2,\lambda)x_\lambda\Big)^2 + \frac{1}{D_2}\sum_2^n D_3(\varkappa,\lambda)x_\varkappa x_\lambda.$$

Ist $n_1 = 2$, dann verschwinden die sämmtlichen $D_3(\varkappa, \lambda)$, und f wird gleich der Summe zweier Quadrate. Ist $n_2 > 2$, dann kann man in derselben Weise fortfahren, falls nicht alle $D_3(\varkappa, \varkappa)$ gleich Null sind. Wir wollen annehmen, dass wir so etwa bis zu

$$f = \frac{1}{D_1}\Big(\sum_1^n D_1(1,\lambda)x_\lambda\Big)^2 + \frac{1}{D_1 D_2}\Big(\sum_2^n D_2(2,\lambda)x_\lambda\Big)^2 + \cdots$$

(18)

$$+ \frac{1}{D_{m-2}D_{m-1}}\Big(\sum_{m-1}^n D_{m-1}(m-1,\lambda)x_\lambda\Big)^2 + \frac{1}{D_{m-1}}\sum_m^n D_m(\varkappa,\lambda)x_\varkappa x_\lambda$$

gekommen wären, dass $n_1 \geqq m$ sei, und also nicht alle $D_m(\varkappa, \lambda)$ verschwinden, dass aber jedes $D_m(\varkappa, \varkappa)$ gleich Null wird. In diesem Falle kann man durch eine auf die letzte Summe ausgeübte elementare Transformation die Indices von $x_m, x_{m+1}, \cdots x_n$ so umändern, dass $D_m(m, m+1) \neq 0$ wird; dann kann man schreiben

$$\sum_m^n D_m(\varkappa,\lambda)x_\varkappa x_\lambda = \frac{2}{D_m(m,m+1)}\Big[D_m(m,m+1)x_m + \sum_{m+2}^n D_m(m+1,\lambda)x_\lambda\Big]$$

(19)

$$\cdot\Big[D_m(m,m+1)x_{m+1} + \sum_{m+2}^n D_m(m,\mu)x_\mu\Big]$$

$$+ \sum_{m+2}^n \Big(D_m(\lambda,\mu) - \frac{D_m(m+1,\lambda)D_m(m,\mu) + D_m(m,\lambda)D_m(m+1,\mu)}{D_m(m,m+1)}\Big)x_\lambda x_\mu.$$

Die letzte Klammer formen wir mit Hülfe von (17) unter Beachtung von $D_m(m,m) = 0$, $D_m(m+1, m+1) = 0$ in

$$- \frac{D_{m-1}^2 D_{m+2}(\lambda,\mu)}{D_m^2(m,m+1)}$$

um. Aus (16) ergiebt sich ferner

$$D_m^2(m,m+1) = -D_{m-1}D_{m+1},$$

und daraus zuerst $D_{m+1} \neq 0$; und dann folgt weiter für den vorigen Bruch der schliessliche Ausdruck

$$\frac{D_{m-1} \cdot D_{m+2}(\lambda, \mu)}{D_{m+1}}.$$

Auf das erste Glied rechts in (19) wenden wir noch die Substitution

$$D_m(m, m+1)\, x_m \quad + \sum_{m+2}^{n} D_m(m+1, \lambda) x_\lambda = P_m + Q_m,$$

$$D_m(m, m+1)\, x_{m+1} + \sum_{m+2}^{n} D_m(m, \lambda) x_\lambda \quad = P_m - Q_m$$

an, wodurch dasselbe in die Gestalt

$$\frac{2}{D_m(m, m+1)} (P_m^2 - Q_m^2)$$

übergeht. Für (18) haben wir also die neue Darstellung

$$f = \frac{1}{D_1} \Big(\sum_{1}^{n} D_1(1, \lambda) x_\lambda \Big)^2 + \frac{1}{D_1 D_2} \Big(\sum_{2}^{n} D_2(2, \lambda) x_\lambda \Big)^2 + \cdots$$

$$(18^a) \qquad + \frac{1}{D_{m-2} D_{m-1}} \Big(\sum_{m-1}^{n} D_{m-1}(m-1, \lambda) x_\lambda \Big)^2 + \frac{2(P_m^2 - Q_m^2)}{D_{m-1} D_m(m, m+1)}$$

$$+ \frac{1}{D_{m+1}} \sum_{m+2}^{n} D_{m+2}(\lambda, \mu)\, x_\lambda x_\mu, \quad (D_{m+1} \neq 0).$$

Fährt man auf diese Art fort, so erkennt man, dass jede quadratische Form vom Range n_1 ($\leqq n$) sich in ein Aggregat von n_1 Quadraten umwandeln lässt. Zwischen diesen Aggregaten besteht keine lineare, homogene Gleichung mit constanten Coefficienten, d. h. sie sind linear von einander unabhängig. Diese letzte Behauptung muss noch bewiesen werden. Hätte man bei constanten Coefficienten δ die identische Gleichung

$$\delta_1 \sum_{1}^{n} D_1(1, \lambda) x_\lambda + \delta_2 \sum_{2}^{n} D_2(2, \lambda) x_\lambda + \cdots + \delta_{m-1} \sum_{m-1}^{n} D_{m-1}(m-1, \lambda) x_\lambda$$
$$+ \delta_m P_m + \delta_{m+1} Q_m + \cdots = 0,$$

was die x auch immer für Werthe annehmen, dann zeigt zuerst das Werthsystem $x_2 = x_3 = \cdots = 0$, dass δ_1 verschwinden muss; danach $x_3 = x_4 = \cdots = 0$, dass auch δ_2 verschwindet, u. s. w. bis zu $\delta_{m-1} = 0$. Setzt man dann

$$\delta_m P_m + \delta_{m+1} Q_m = \frac{\delta_m + \delta_{m+1}}{2} (P_m + Q_m) + \frac{\delta_m - \delta_{m+1}}{2} (P_m - Q_m),$$

so ist ersichtlich, dass $(\delta_m + \delta_{m+1})$ und $(\delta_m - \delta_{m+1})$ Null werden, und demnach auch δ_m und δ_{m+1} selber. Also kann die homogene, lineare Gleichung überhaupt nicht bestehen.

§ 173. Derartige Umwandlungen in Aggregate von Quadraten können auf unendlich viele Arten gemacht werden. Greift man z. B. auch nur zwei Quadrate heraus

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2$$

und benutzt die Substitution mit nicht verschwindender Determinante

$$X_1 = m Y_1 + n Y_2, \quad X_2 = \mu Y_1 + \nu Y_2,$$

dann entsteht auch wieder eine Summe von Quadraten

$$a_1 X_1^2 + a_2 X_2^2 = (a_1 m^2 + a_2 \mu^2) Y_1^2 + (a_1 n^2 + a_2 \nu^2) Y_2^2,$$

sobald die vier Substitutionscoefficienten die einzige Bedingung

$$a_1 mn + a_2 \mu\nu = 0$$

erfüllen; und das kann ja auf unendlich viele Arten herbeigeführt werden.

Wir wollen nun annehmen, es sei auf irgend einem Wege

$$f = \sum_1^r \varepsilon_\lambda (e_{\lambda 1} x_1 + e_{\lambda 2} x_2 + \cdots + e_{\lambda n} x_n)^2 = \sum_1^r \varepsilon_\lambda X_\lambda^2 \qquad (r \leq n)$$

gefunden worden, wobei die Coefficienten ε und e reelle Grössen bedeuten, und zwischen den k linearen, homogenen Functionen X_1, X_2, $\cdots X_k$ keine lineare Abhängigkeit besteht. Der Rang von f ist dann r. Wir wollen den Rang des Systems

$$\begin{matrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_{r1} & e_{r2} & \cdots & e_{rn} \end{matrix}$$

ϱ nennen $(\varrho \leq r)$ und etwa $|e_{\varkappa\lambda}| \neq 0$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots \varrho)$ voraussetzen, während alle Determinanten der Ordnung $(\varrho + 1)$ verschwinden. Dann ist

$$|e_{\varkappa 1} \; e_{\varkappa 2} \cdots e_{\varkappa\varrho} \; X_\varkappa| = 0 \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots \varrho + 1),$$

und zwar ist diese Gleichung nicht identisch erfüllt, da der Coefficient von $X_{\varrho+1}$ nicht Null ist. Damit diese Gleichung der Voraussetzung über die lineare Unabhängigkeit der X nicht widerspreche, muss $\varrho = r$ sein, und wir können $|e_{\varkappa\lambda}| \neq 0$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots r)$ annehmen. Danach kann man aus dem Systeme

$$\begin{aligned} e_{11} x_1 + \cdots + e_{1r} x_r &= X_1 - e_{1,r+1} X_{r+1} - \cdots - e_{1,n} X_n, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad

die Werthe der Variablen x eindeutig durch die X und umgekehrt ausdrücken, wobei alle eingehenden Constanten reell sind.

Jede Darstellung einer quadratischen Form f als Aggregat von Quadraten, in welcher nur reelle Constanten vorkommen, kann durch eine reelle Transformation erlangt werden.

§ 174. An die Formeln von § 173 haben wir noch eine Bemerkung zu knüpfen. Es giebt nämlich auch Beziehungen zwischen den Vorzeichenanzahlen der Quadrate bei verschiedenen Arten der Umwandlung. Im Falle eines Aggregats von zwei Quadraten findet z. B. die Gleichung statt

$$(a_1 m^2 + a_2 \mu^2)(a_1 n^2 + a_2 \nu^2) = (a_1 mn + a_2 \mu\nu)^2 + a_1 a_2 (n\mu - m\nu)^2$$
$$= a_1 a_2 (n\mu - m\nu)^2.$$

Die letzte Klammer darf der Annahme nach nicht verschwinden, und es folgt daher die Zeichenrelation

$$\operatorname{sgn}(a_1 m^2 + a_2 \mu^2)(a_1 n^2 + a_2 \nu^2) = \operatorname{sgn}(a_1 a_2).$$

Hieraus sehen wir, dass wenn a_1 und a_2 verschiedene Vorzeichen haben, dies auch bei den neuen, transformirten Coefficienten $a_1 m^2 + a_2 \mu^2$ und $a_1 n^2 + a_2 \nu^2$ statthat. Ferner erkennt man unmittelbar, dass die letzten beiden Coefficienten beide positiv oder beide negativ bleiben, je nachdem dies bei den ersten eintrifft. Folglich liefert die neue Darstellung von f ebensoviele Glieder mit positiven und mit negativen Zeichen, wie die erste. Dieser Satz lässt sich auf die Darstellung eines beliebigen f als Summe von Quadraten verallgemeinern; Sylvester hat ihn unter dem Namen Trägheitsgesetz der quadratischen Formen im Phil. Mag. 1852, 1853 veröffentlicht; Jacobi kannte ihn bereits 1847 (Werke, III, 501), jedoch wurden die betreffenden Untersuchungen erst nach seinem Tode veröffentlicht.

Wir können voraussetzen, dass die Zahl der Variablen von f gleich dem Range n genommen wird (§ 167). Wir können ferner die Coefficienten der einzelnen Quadrate gleich ± 1 setzen, indem wir die Quadratwurzeln aus den absoluten, zunächst vorhandenen Werthen zu den Aggregaten ziehen. Somit dürfen wir also unsere reelle Darstellung der quadratischen Form

$$(20)\quad f = K_1^2 + K_2^2 + \cdots + K_s^2 - K_{s+1}^2 - \cdots - K_{s+t}^2 \qquad (s + t = n)$$

schreiben. Die K sind linear unabhängig, und die x lassen sich durch sie ausdrücken (§ 173). Man kann demnach jede Substitution durch die K linear ausdrücken. Ist in anderer Weise f durch die Quadrate der n Ausdrücke $Q_1, Q_2, \cdots Q_n$ darstellbar, dann gilt von den Q das

Gleiche, und somit können wir auch die K durch die Q ausdrücken. Es möge das in der Form

$$K_\lambda = g_{\lambda 1} Q_1 + g_{\lambda 2} Q_2 + \cdots + g_{\lambda n} Q_n \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots s),$$
$$K_\mu = h_{\mu 1} Q_1 + h_{\mu 2} Q_2 + \cdots + h_{\mu n} Q_n \qquad (\mu = 1, 2, \cdots t)$$

geschehen. Setzt man dies in (20) ein, so entsteht

$$(20^a) \quad \begin{aligned} f = &\sum_\lambda (g_{1\lambda}^2 + \cdots + g_{s\lambda}^2 - h_{1\lambda}^2 - \cdots - h_{t\lambda}^2) Q_\lambda^2 \\ &+ \sum_{\lambda,\mu} (g_{1\lambda} g_{1\mu} + \cdots + g_{s\lambda} g_{s\mu} - h_{1\lambda} h_{1\mu} - \cdots - h_{t\lambda} h_{t\mu}) Q_\lambda Q_\mu. \end{aligned}$$

Weil dies nun gleichfalls ein Aggregat von Quadraten wird, müssen die Coefficienten von sämmtlichen Producten $Q_\lambda Q_\mu$ verschwinden, und das Trägheitsgesetz fordert, dass s von den Klammern der ersten Summe positiv, und die anderen t negativ werden.

In rein arithmetischer Form ausgesprochen lautet das behauptete Theorem so: Wenn bei beliebigen reellen $g_{\lambda\mu}$, $h_{\lambda\mu}$ und den Bezeichnungen

$$g_{1\lambda} g_{1\mu} + \cdots + g_{s\lambda} g_{s\mu} = \sigma_{\lambda\mu}; \quad h_{1\lambda} h_{1\mu} + \cdots + h_{t\lambda} h_{t\mu} = \tau_{\lambda\mu};$$
$$\sigma_{\lambda\mu} - \tau_{\lambda\mu} = \varrho_{\lambda\mu} \qquad (\lambda, \mu = 1, \cdots n;\ s + t = n)$$

alle $\varrho_{\lambda\mu}\,(\lambda \neq \mu)$ verschwinden, dann sind s der Grössen $\varrho_{\lambda\lambda}$ positiv, während die anderen t negativ werden.

Wir wollen zunächst einen rein arithmetischen Beweis dieses Satzes geben (vgl. J. für M. 110; S. 184). Man hat für $\alpha > s$

$$|\,\tau_{\lambda\mu} + \varrho_{\lambda\mu}\,| = |\,\sigma_{\lambda\mu}\,| = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots s;\ \alpha);$$

denn die Determinante der σ entsteht aus der Composition der beiden Matrizen des defectiven Systems

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{21} & \cdots & g_{s1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{1s} & g_{2s} & \cdot\ \cdot & g_{ss} \\ g_{1\alpha} & g_{2\alpha} & \cdots & g_{s\alpha} \end{matrix} \qquad \begin{matrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1s} & g_{1\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & g_{ss} & g_{s\alpha}. \end{matrix}$$

Wegen $\varrho_{\lambda\mu} = 0$ $(\lambda \neq \mu)$ vereinfacht sich die Determinante zu

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} + \varrho_{11} & \tau_{12} & \cdot & \tau_{1\alpha} \\ \tau_{21} & \tau_{22} + \varrho_{22} & \cdots & \tau_{2\alpha} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \tau_{\alpha 1} & \tau_{\alpha 2} & \cdots & \tau_{\alpha\alpha} + \varrho_{\alpha\alpha} \end{vmatrix} = 0,$$

und entwickelt giebt das die Gleichung

$$-|g_{\mu\nu}|^2 \varrho_{\alpha\alpha} = \varrho_{11}\varrho_{22}\cdots\varrho_{ss}\left\{\tau_{\alpha\alpha} + \sum_{\lambda}\frac{1}{\varrho_{\lambda\lambda}}\begin{vmatrix}\tau_{\lambda\lambda} & \tau_{\lambda\alpha}\\ \tau_{\alpha\lambda} & \tau_{\alpha\alpha}\end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda,\mu}\frac{1}{\varrho_{\lambda\lambda}\varrho_{\mu\mu}}\cdot\begin{vmatrix}\tau_{\lambda\lambda} & \tau_{\lambda\mu} & \tau_{\lambda\alpha}\\ \tau_{\mu\lambda} & \tau_{\mu\mu} & \tau_{\mu\alpha}\\ \tau_{\alpha\lambda} & \tau_{\alpha\mu} & \tau_{\alpha\alpha}\end{vmatrix} + \cdots\right\}$$

$$(\lambda, \mu, \cdots = 1, 2, \cdots s).$$

Der erste Coefficient rechts in der Klammer, nämlich

$$\tau_{\alpha\alpha} = h_{1\alpha}^2 + \cdots + h_{t\alpha}^2$$

ist direct die Summe von Quadraten; die Determinante des zweiten ist aus den beiden Matrizen des excessiven Systems der Elemente h

$$\begin{matrix}h_{1\lambda} & h_{2\lambda} & \cdots & h_{t\lambda}\\ h_{1\alpha} & h_{2\alpha} & \cdots & h_{t\alpha}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}h_{1\lambda} & h_{1\alpha}\\ \vdots & \vdots\\ h_{t\lambda} & h_{t\alpha}\end{matrix}$$

zusammengesetzt, so dass die Determinante

$$\begin{vmatrix}\tau_{\lambda\lambda} & \tau_{\lambda\alpha}\\ \tau_{\alpha\lambda} & \tau_{\alpha\alpha}\end{vmatrix} = \sum_{\mu,\nu}(h_{\mu\lambda}h_{\nu\alpha} - h_{\nu\lambda}h_{\mu\alpha})^2$$

auch wieder die Summe von Quadraten wird, u. s. w. Folglich zeigt die obere Gleichung durch eine Identität, dass, wenn $\varrho_{11}, \cdots \varrho_{ss}$ positiv sind, alle $\varrho_{\alpha\alpha}(\alpha > s)$ negativ sein müssen, dass es also in (20) nicht mehr als s positive Glieder geben kann. Dasselbe gilt ebenso für t, und damit ist der Satz bewiesen: Wandelt man durch irgend eine reelle Substitution die Form f in ein Aggregat von n Quadraten um, so ist die Anzahl der positiven Glieder desselben invariant für f.

§ 175. Wir wollen noch den Jacobi'schen Beweis des Trägheitsgesetzes, der auf besonders einfachen Ueberlegungen beruht, hier mittheilen. Dazu bemerken wir, dass, wenn $K_1, K_2, \cdots K_{s+t}$ $(s + t = n)$ von einander unabhängige, homogene, lineare Functionen der x sind, ihre Gesammtheit nur verschwinden kann, wenn sämmtliche Variable gleich Null gesetzt werden. Sind aber weniger als n lineare, homogene Functionen gegeben, so kann man diese sämmtlich zu Null machen, ohne dass dies bei den Variablen eintritt. Wenn nun

$$\begin{aligned}&K_1^2 + \cdots + K_s^2 - K_{s+1}^2 - \cdots - K_{s+t}^2 \qquad \begin{pmatrix}s + t = n\\ p + r = n\end{pmatrix}\\ &= Q_1^2 + \cdots + Q_p^2 - Q_{p+1}^2 - \cdots - Q_{p+r}^2\end{aligned}$$

und $p > s$ also $r < t$ und $s + r < n$ wäre, dann könnten wir den Variablen ein von Null verschiedenes Werthsystem geben, durch welches

$$K_1 = 0, \cdots K_s = 0, \; Q_{p+1} = 0, \cdots Q_{p+r} = 0$$

wird, ohne dass gleichzeitig

$$K_1 = 0, \cdots K_s = 0, K_{s+1} = 0, \cdots K_{s+t} = 0$$

ist. Dadurch ginge die obige Gleichung in die Form

$$-K_{s+1}^2 - \cdots - K_{s+t}^2 = Q_1^2 + \cdots + Q_p^2$$

über, welche, da ihre linke Seite wesentlich negativ ist, einen Widerspruch in sich birgt. Ebenso folgt, dass nicht $s > p$ sein kann; deshalb muss, wie behauptet wurde, $s = p$ und $t = r$ sein.

§ 176. Das Bestehen des Trägheitsgesetzes zerlegt die quadratischen Formen, je nach der Anzahl der positiven und negativen Glieder bei der Darstellung als Aggregat von Quadraten, in verschiedene Species, die durch ihre Signatur von einander verschieden sind. Unter Signatur soll (vgl. Frobenius: Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen; Berl. Ber. 1884; 241) die Differenz der Anzahl positiver und negativer Coefficienten bei der Darstellung der Form als Aggregat von Quadraten verstanden werden. Diese Signatur kann bei Formen vom Range n eine der Zahlen

$$n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots\cdots,\ -n+4,\ -n+2,\ -n$$

sein. Gauss hatte die beiden Extreme, in denen nur Glieder eines Zeichens vorkommen, als definite Formen bezeichnet, da bei ihnen der Zahlenwerth stets dasselbe Vorzeichen besitzt, im Gegensatze zu den übrigen, den indefiniten Formen, die sowohl positive wie negative Werthe annehmen können.

Wenn in der Darstellung (18[a]), § 172 alle Determinanten

$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \cdots\ D_n$$

von Null verschieden sind, kann man die quadratische Form

$$f = \frac{1}{D_1} U_1^2 + \frac{1}{D_1 D_2} U_2^2 + \cdots + \frac{1}{D_{n-1} D_n} U_n^2$$

schreiben und erhält als Formel für die Signatur

$$s = \sum_{\varrho=1}^{n} \operatorname{sign}(D_{\varrho-1} D_\varrho), \qquad (D_0 = 1). \tag{21}$$

Wir haben ferner gesehen, dass wenn alle $D_m(x, x)$ Null sind, die Variablen so angeordnet werden können, dass ein $D_{m+1}(x, x)$ von Null verschieden ist (S. 192, Z. 1), und dass man dabei die Darstellung

$$f = \frac{1}{D_1} U_1^2 + \cdots + \frac{1}{D_{m-2} D_{m-1}} U_{m-1}^2 + V_1^2 - V_2^2 + \frac{1}{D_{m+1} D_{m+2}} U_{m+2}^2 + \cdots$$

erhält. Hier ist dann also

$$s = \sum_{\varrho=1}^{m-1} \operatorname{sign}(D_{\varrho-1}D_\varrho) + \sum_{\varrho=m+2}^{n} \operatorname{sign}(D_{\varrho-1}D_\varrho) + 1 - 1$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{m-1} \operatorname{sign}(D_{\varrho-1}D_\varrho) + \operatorname{sign}(D_{m-1}D_m) + \operatorname{sign}(D_m D_{m+1})$$

$$+ \sum_{\varrho=m+2}^{n} \operatorname{sign}(D_{\varrho-1}D_\varrho), \qquad (D_m = 0),$$

und man kommt auch in diesem Falle wieder auf die Formel (21).

§ 177. Bilden wir das Determinantenproduct

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t-c_{11} & -c_{12} & -c_{13} & \cdots & -c_{1n} \\ -c_{21} & t-c_{22} & -c_{23} & \cdots & -c_{2n} \\ -c_{31} & -c_{32} & t-c_{33} & \cdots & -c_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ -c_{n1} & -c_{n2} & -c_{n3} & \cdots & t-c_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und berücksichtigen (9), so ergiebt sich als Resultat

$$= \begin{vmatrix} t\sum a_{1\lambda}a_{1\lambda} - d_{11}, & t\sum a_{1\lambda}a_{2\lambda} - d_{12}, & \cdots & t\sum a_{1\lambda}a_{n\lambda} - d_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ t\sum a_{n\lambda}a_{1\lambda} - d_{n1}, & t\sum a_{n\lambda}a_{2\lambda} - d_{n2}, & \cdots & t\sum a_{n\lambda}a_{n\lambda} - d_{nn} \end{vmatrix}.$$

Da $A = |a_{\lambda\mu}|$ von Null verschieden ist, so folgt, dass die Gleichung

$$(22) \qquad \left| t\sum_\lambda a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} - d_{\mu\nu} \right| = 0 \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \cdots n)$$

dieselben Wurzeln t besitzt, wie die Gleichung

$$(23) \qquad |t\varepsilon_{\mu\nu} - c_{\mu\nu}| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots n)$$

($\varepsilon_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$ ist; $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$ ist).

Ein Transformationssystem $a_{\mu\nu}$ heisst ein orthogonales, wenn

$$(24) \qquad \sum_\lambda a_{\mu\lambda}a_{\nu\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu} \qquad (\lambda, \mu, \nu = 1, 2, \cdots n).$$

Aus (9) folgt als charakteristische Eigenschaft dieser Systeme, dass sie die Summe von Quadraten $\sum x^2$ wieder in eine Summe von Quadraten $\sum y^2$ transformiren. Für solche orthogonalen Systeme vereinfacht sich (22), indem bei ihnen t nur in den Gliedern der Hauptdiagonale und dort mit dem Factor 1 versehen auftritt.

Es lässt sich zeigen, dass es stets eine orthogonale Substitution giebt, welche die quadratische Form (1) in ein Aggregat von Quadraten umwandelt. Wir wollen, ohne auf den

Beweis näher einzugehen, nur darauf hinweisen, dass eine ausreichende Zahl von Constanten dafür zur Verfügung steht. Das System (24) enthält nämlich $\frac{1}{2}n(n+1)$ Bedingungsgleichungen, und das Verschwinden der Producte $y_\lambda y_\mu$ bei $(\lambda \neq \mu)$ in der transformirten Form fordert die Erfüllung von $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gleichungen zwischen den Substitutionscoefficienten. Weil nun einerseits n^2 solche vorhanden sind, und weil andererseits die Zahl der Bedingungsgleichungen auch insgesammt

$$\frac{1}{2}n(n+1)+\frac{1}{2}n(n-1)=n^2$$

ist, so ist wenigstens die Möglichkeit der Erfüllung unserer Forderungen dargethan. Damit wollen wir uns hier begnügen.

Setzen wir in (22) voraus, dass die $a_{\lambda\mu}$ derjenigen orthogonalen Substitution angehören, welche (1) in ein Aggregat von Quadraten umwandelt, dann wird diese Determinante (22) zu

$$|t\varepsilon_{\mu\nu}-d_{\mu\nu}|=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots n)$$

bei $d_{\mu\nu}=0$ $(\mu \neq \nu)$, oder einfacher, da nur Diagonalglieder existiren, zu

$$\prod(t-d_{\mu\mu})=0 \qquad (\mu=1,2,\cdots n). \tag{22a}$$

Unter den $d_{\mu\mu}$ kommen so viele positive und so viele negative Glieder vor, als das Aggregat von Quadraten positive bezw. negative Glieder enthält. Es ist demgemäss die Signatur von (1) gleich der Differenz der Anzahlen der positiven und der negativen Wurzeln von (22a), und da ja diese Wurzeln mit denen von (23) übereinstimmen, so folgt der Satz: Die Gleichung

$$|t\varepsilon_{\mu\nu}-c_{\mu\nu}|=0 \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots n), \tag{23}$$

in welcher $c_{\mu\nu}=c_{\nu\mu}$ ist, besitzt stets n reelle Wurzeln. Die Differenz aus den Anzahlen ihrer positiven und ihrer negativen Wurzeln ist gleich der Signatur der quadratischen Form

$$f=\sum_{\lambda,\mu}c_{\lambda\mu}x_\lambda x_\mu. \tag{1}$$

Den hierbei zufällig erhaltenen Satz, dass die Gleichung (23) keine complexen Wurzeln besitzt, können wir auch auf directem Wege ableiten, ohne das Theorem aus der Theorie der orthogonalen Substitutionen zu verwenden. Der folgende Beweis ist von Sylvester angegeben.

§ 178. Wir bezeichnen

$$g(t)=|t\varepsilon_{\mu\nu}-c_{\mu\nu}| \qquad (\mu,\nu=1,2,\cdots n;\ c_{\mu\nu}=c_{\nu\mu}).$$

Dann ist

$$g(-t)=|t\varepsilon_{\mu\nu}+c_{\mu\nu}|,$$

und es wird

$$g(t)g(-t) = \left| -t^2\varepsilon_{\lambda\mu} + \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\lambda\varkappa}c_{\mu\varkappa} \right|$$

$$= \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\lambda\varkappa}c_{\mu\varkappa} \right| - t^2 \sum_{i} \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\lambda_1\varkappa}c_{\mu_1\varkappa} \right|$$

$$+ t^4 \sum_{i,k} \left| \sum_{\varkappa=1}^{n} c_{\lambda_2\varkappa}c_{\mu_2\varkappa} \right| - \cdots.$$

Hierbei durchlaufen im ersten Summanden λ und μ die Reihe 1, 2, $\cdots n$; im zweiten λ_1 und μ_1 die Werthe 1, 2, $\cdots i-1, i+1, \cdots n$, wobei i von 1 bis n geht; im dritten λ_2 und μ_2 die Werthe 1, 2, $\cdots i-1, i+1, \cdots k-1, k+1, \cdots n$, wobei $k > i$ ist und beide alle möglichen Combinationen aus 1, 2, $\cdots n$ annehmen, u. s. w. Nach den Sätzen über die Composition von Systemen, die wir schon im § 174 verwendet haben, folgt, dass jede der rechts auftretenden Determinanten ein Quadrat oder eine Summe von Quadraten ist. Wenn wir also

$$g(t)g(-t) = C_0 - C_1t^2 + C_2t^4 - C_3t^6 + \cdots$$

setzen, dann sind alle Coefficienten C positiv, und $g(t)g(-t) = 0$ besitzt als Gleichung für t^2 keine negative Wurzel $t^2 = -\tau$, weil hierfür das Polynom positiv werden würde. Demnach kann $g(t) = 0$ keine rein imaginäre Wurzel besitzen.

Aus diesem ersten Resultate folgt leicht, dass $g(t) = 0$ auch keine complexe Wurzel $t = \xi + \eta i$ hat. Denn wäre dies der Fall, und ersetzte man in der Determinante für $g(t)$ die c_{11}, c_{22}, c_{33}, $\cdots$ durch $c_{11} - \xi$, $c_{22} - \xi$, $c_{33} - \xi$, $\cdots$ so erhielte man eine Determinante von ganz gleicher Bildungsform $\gamma(t)$, die aber gleichwohl zu der Gleichung $\gamma(t) = 0$ mit der rein imaginären Wurzel ηi führen würde. Da dies nach dem zuerst bewiesenen Satze nicht angeht, so ist die Annahme einer complexen Wurzel $t = \xi + \eta i$ nicht haltbar, und damit zeigt es sich, dass $g(t) = 0$ nur reelle Wurzeln haben kann.

Es möge noch bemerkt werden, dass hiermit zugleich der Beweis für die Realität aller Wurzeln von Gleichungen der Form

$$\begin{vmatrix} t-c_{11} & c_1 & c_1 & c_1 & \cdots \\ c_2 & t-c_{22} & c_2 & c_2 & \cdots \\ c_3 & c_3 & t-c_{33} & c_3 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (\operatorname{sgn} c_1 = \operatorname{sgn} c_2 = \cdots)$$

geliefert ist. Denn durch Multiplication der λ^{ten} Spalte mit u_λ und Division der λ^{ten} Zeile durch u_λ für $\lambda = 1, 2, \cdots n$ kann man eine

Form erlangen, die bei geeigneter Wahl der u in (23) übergeführt werden kann. — Das Gleiche gilt natürlich von

$$\begin{vmatrix} c_1 t - c_{11} & 1 & 1 & 1 \cdots \\ 1 & c_2 t - c_{22} & 1 & 1 \cdots \\ 1 & 1 & c_3 t - c_{33} & 1 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0 \qquad (\operatorname{sgn} c_1 = \operatorname{sgn} c_2 = \cdots).$$

Sechzehnte Vorlesung.

Grenzen für die Wurzeln. Das Rolle'sche Theorem.

§ 179. Wir wenden uns jetzt zur numerischen Auflösung von Gleichungen, d. h. zum Studium von Methoden, durch welche wir Grössen finden können, deren Substitution in das Polynom $f(z)$ der Gleichung

(1) $$f(z) \equiv a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

den absoluten Betrag von $f(z)$ entweder gleich Null oder doch kleiner macht, als eine gegebene, beliebig kleine, positive Grösse.

Zunächst handelt es sich darum, Grenzen anzugeben, ausserhalb deren keine reelle Wurzel der Gleichung (1) sich befindet, und an zweiter Stelle darum, Intervalle zu bestimmen, deren jedes nicht mehr als eine von den reellen Wurzeln der Gleichung in sich enthält.

§ 180. Es mögen die Coefficienten a als complex angesehen werden, und α_i sei der absolute Betrag von a_i; auch für z denken wir uns complexe Werthe eingesetzt, und bezeichnen $|z|$ durch ϱ. Dann wird

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq |a_0 z^n| - |a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n| \\ &\geq \alpha_0 \varrho^n - (\alpha_1 \varrho^{n-1} + \alpha_2 \varrho^{n-2} + \cdots + \alpha_n). \end{aligned}$$

Ist nun α der grösste unter den Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, dann folgt weiter

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geq \alpha_0 \varrho^n - \alpha(\varrho^{n-1} + \varrho^{n-2} + \cdots + 1) = \alpha_0 \varrho^n - \alpha \frac{\varrho^n - 1}{\varrho - 1} \\ &\geq \frac{(\alpha_0(\varrho - 1) - \alpha)\varrho^n + \alpha}{\varrho - 1}. \end{aligned}$$

Nimmt man daher für ϱ die Ungleichung

(2) $$\varrho > 1 + \frac{\alpha}{\alpha_0},$$

so bleibt der absolute Betrag von $f(z)$ stets positiv, und ϱ

ist eine obere Grenze für die absoluten Beträge der Wurzeln. Diesen Satz hatten wir in § 17 bereits abgeleitet.

In besonderen Fällen lässt sich durch Berücksichtigung der Natur der Coefficienten die soeben erhaltene Grenze häufig noch herabdrücken.

§ 181. Nehmen wir von jetzt ab bis auf Weiteres die Coefficienten als reell an und etwa $a_0, a_1, \cdots a_{\varkappa-1}$ als positiv, $a_\varkappa$ als negativ, so ist für positive Werthe von z

$$|f(z)| \geq |a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{\varkappa-1} z^{n-\varkappa+1}| - |a_\varkappa| z^{n-\varkappa} + |a_{\varkappa+1}| z^{n-\varkappa-1} + \cdots + |a_n||,$$

und wenn A den grössten der Werthe $|a_\varkappa|, |a_{\varkappa+1}|, \cdots |a_n|$ bedeutet,

$$|f(z)| \geq a_0 z^n - A \frac{z^{n-\varkappa+1} - 1}{z-1} \geqq \frac{z^{n-\varkappa+1}(a_0(z^\varkappa - z^{\varkappa-1}) - A) + A}{z-1}.$$

Da nun, wie wir ohne Weiteres erkennen,

$$a_0(z^\varkappa - z^{\varkappa-1}) > a_0(z-1)^\varkappa \qquad (z>1)$$

ist, so braucht man nur für die positive Variable z die Ungleichung

$$z > 1 + \sqrt[\varkappa]{\frac{A}{a_0}} \tag{3}$$

anzusetzen, um $|f(z)|$ wesentlich positiv zu machen. Es wird

$$1 + \sqrt[\varkappa]{\frac{A}{a_0}} \tag{3*}$$

eine obere Grenze für die positiven Wurzeln der Gleichung. Offenbar gelten dieselben Schlüsse, wenn man unter A, enger als bisher, nur den grössten absoluten Werth aller vorkommenden negativen Coefficienten versteht.

Wenden wir dieselbe Regel auf die durch $z = -\zeta$ transformirte Gleichung an, so erlangen wir eine untere Grenze für die negativen Wurzeln. Ebenso kann man durch die Substitutionen $z = \frac{1}{\zeta}$, $z = -\frac{1}{\zeta}$ eine untere Grenze für die positiven und eine obere Grenze für die negativen Wurzeln erhalten.

§ 182. Ist das Polynom der Gleichung so beschaffen, dass auf ein oder auf mehrere Glieder mit positiven Coefficienten nur solche mit negativen Coefficienten folgen, dann besitzt die Gleichung eine und nur eine positive Wurzel. In der That, aus der Annahme

$f(z) = (a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{x-1} z^{n-x+1}) - (a_x z^{n-x} + a_{x+1} z^{n-x-1} + \cdots + a_n)$

folgt die Gleichung

$$\frac{f(z)}{z^{n-x+1}} = (a_0 z^{x-1} + \cdots + a_{x-1}) - (a_x z^{-1} + a_{x+1} z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n+x-1}).$$

Lässt man nun hier z von 0 bis $+\infty$ wachsen, so wird die erste Klammer von a_{x-1} ab bis ins Unendliche beständig zunehmen, während die zweite vom Unendlichen bis nach Null beständig abnimmt. Dabei werden folglich ein und nur ein Mal beide Klammern denselben positiven Werth annehmen, d. h. die Gleichung besitzt eine und nur eine positive Wurzel.

Ist das Polynom der Gleichung nicht der obigen Beschränkung unterworfen, dann kann man es wenigstens in einzelne Summanden

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_\nu(z) \tag{4}$$

derart zerlegen, dass in einem jeden die Exponenten der folgenden Glieder geringer sind, als die der vorhergehenden, und dass zugleich auf anfängliche Glieder mit positiven Coefficienten nur solche mit negativen Coefficienten folgen. Jede der Gleichungen

$$f_1(z) = 0,\ f_2(z) = 0,\ \cdots f_\nu(z) = 0$$

besitzt dann nach dem soeben Besprochenen eine einzige positive Wurzel, und ihr Polynom wird für höhere Werthe von z positiv; die höchste der für die ν Gleichungen gefundenen positiven Wurzeln ist daher zugleich eine obere Grenze für die positiven Wurzeln von $f(z) = 0$. Durch passende Vertheilung der einzelnen Glieder des Polynoms f in $f_1, f_2, \cdots f_\nu$ kann man häufig die Grenze herabdrücken.

§ 183. Cauchy giebt die nachstehende Regel. Sind in der Function

$$f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{\alpha-1} z^{n-\alpha+1} - a'_\alpha z^{n-\alpha} + \cdots - a'_\beta z^{n-\beta} + \cdots$$
$$(a_0 = 1)$$

die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a'_\alpha, a'_\beta, \cdots$ sämmtlich positiv, und ist die Anzahl der mit negativem Zeichen versehenen Coefficienten $a'_\alpha, a'_\beta, \cdots$ gleich x, dann liefert die grösste der Zahlen

$$(x a'_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\quad (x a'_\beta)^{\frac{1}{\beta}},\quad \cdots$$

eine obere Grenze der positiven Wurzeln. In der That wenn zunächst für ein ξ die Ungleichungen gelten

$$\xi > (x a'_\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},\quad \xi > (x a'_\beta)^{\frac{1}{\beta}},\quad \cdots,$$

dann folgt aus ihnen zunächst durch Potenzirung und Multiplication

$$\begin{aligned} &\xi^{\alpha} > \varkappa a'_{\alpha}, \qquad \xi^{\beta} > \varkappa a'_{\beta}, \quad \cdots, \\ &\xi^{n} > \varkappa a'_{\alpha}\xi^{n-\alpha}, \quad \xi^{n} > \varkappa a'_{\beta}\xi^{n-\beta}, \quad \cdots, \end{aligned} \qquad (\xi > 0)$$

und dann weiter durch Addition dieser letzten $\varkappa$ Ungleichungen und Division durch die ganze Zahl $\varkappa$ die Beziehung

$$\xi^{n} > a'_{\alpha}\xi^{n-\alpha} + a'_{\beta}\xi^{n-\beta} + \cdots.$$

Es wird also in $f(\xi)$ schon das Glied ξ^{n} grösser werden, als die positiv genommene Summe aller vorkommenden negativen Glieder, so dass damit die Cauchy'sche Regel bewiesen ist.

§ 184. Eine andere, bequem zu verwendende Regel leitet man folgendermassen ab. Wir setzen

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{\alpha-1}z^{n-\alpha+1} - a'_{\alpha}z^{n-\alpha} - a'_{\alpha+1}z^{n-\alpha-1} - \cdots + \cdots \\ + a_{\beta-1}z^{n-\beta+1} - a'_{\beta}z^{n-\beta} - a'_{\beta+1}z^{n-\beta-1} - \cdots + \cdots + a_{\gamma-1}z^{n-\gamma+1} - \cdots, \end{aligned}$$

so dass auch hier, wie im vorigen Paragraphen, die positiven Coefficienten ohne Accente, die negativen mit Accenten versehen auftreten. Nun schreiben wir für jedes positive Glied bei beliebigem ϱ

$$a_{n-\tau}z^{\tau} = a_{n-\tau}(z-\varrho)(z^{\tau-1} + z^{\tau-2}\varrho + \cdots + \varrho^{\tau-1}) + a_{n-\tau}\varrho^{\tau},$$

während die Glieder $a'_{n-\sigma}z^{\sigma}$ ungeändert bleiben. Tragen wir dies in $f(z)$ ein, dann entsteht die Form des Polynoms

$$\begin{aligned} f(z) = a_0(z-\varrho)z^{n-1} + [(z-\varrho)(a_0\varrho + a_1)]z^{n-2} + \cdots \\ + [(z-\varrho)(a_0\varrho^{\alpha-1} + a_1\varrho^{\alpha-2} + \cdots + a_{\alpha-1}) - a'_{\alpha}]z^{n-\alpha} \\ + [(z-\varrho)(a_0\varrho^{\alpha} + a_1\varrho^{\alpha-1} + \cdots + a_{\alpha-1}\varrho) - a'_{\alpha+1}]z^{n-\alpha-1} + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

Setzt man also für irgend ein positives ϱ fest, dass

$$\begin{aligned} z &> \varrho + \frac{a'_{\alpha}}{a_0\varrho^{\alpha-1} + a_1\varrho^{\alpha-2} + \cdots + a_{\alpha-1}}, \\ z &> \varrho + \frac{a'_{\alpha+1}}{a_0\varrho^{\alpha} + a_1\varrho^{\alpha-1} + \cdots + a_{\alpha-1}\varrho}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z &> \varrho + \frac{a'_{\beta}}{a_0\varrho^{\beta-1} + a_1\varrho^{\beta-2} + \cdots + a_{\beta-1}}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

sein soll, dann werden alle Glieder in der obigen Form (5) von $f(z)$ positiv sein, und also liefert der höchste Werth unter den Ausdrücken (6) eine obere Grenze für die positiven Wurzeln von $f(z) = 0$. Ist das absolute Glied in $f(z)$ negativ, so kann in (6) bei der zu a'_{n} gehörigen Ungleichung das erste ϱ rechts unterdrückt werden. Die Unbestimmtheit von ϱ kann zur Herabdrückung der Grenze ausgenützt werden. Wir können diese Grenze

$$(6^a) \qquad \zeta = \varrho + \frac{a_x'}{\sum_\lambda' a_\lambda \varrho^{x-\lambda-1}}$$

schreiben, wobei a_x' den passend gewählten unter den negativen Coefficienten bedeutet, und die Summe auf alle ihm vorangehenden positiven Coefficienten erstreckt wird*).

§ 185. Newton hat eine Regel gegeben, die von der Entwickelung

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{1}{1\cdot 2} f''(a)(z-a)^2 + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(z-a)^n$$

ausgeht. Wird für irgend einen reellen Werth a jeder der Coefficienten

$$(7) \qquad f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ \cdots f^{(n)}(a)$$

positiv, dann ist für alle $z > a$ der Werth der Function $f(z)$ auch positiv, und das kleinste a, welches alle Glieder der Reihe (7) positiv macht, ist eine obere Grenze der Wurzeln von $f(z) = 0$.

Dabei ist zuerst zu berücksichtigen, dass $f^{(n)}(a) = n! a_0$ nach der Voraussetzung (§ 181) positiv ist. Man sucht also die Wurzel der Gleichung ersten Grades $f^{(n-1)}(z) = 0$, etwa z_1. Die kleinste Grösse $z_2 \geqq z_1$, welche $f^{(n-2)}(z)$ positiv macht, ist dann nach unserem Satze eine obere Grenze der Wurzeln von $f^{(n-1)}(z) = 0$ und $f^{(n-2)}(z) = 0$. Die kleinste Grösse $z_3 \geq z_2$, welche $f^{(n-3)}(z)$ positiv macht, ist deshalb nach demselben Satze eine obere Grenze der Wurzeln für die drei Gleichungen

$$f^{(n-1)}(z) = 0, \quad f^{(n-2)}(z) = 0, \quad f^{(n-3)}(z) = 0,$$

u. s. f. Auf diesem Wege gelangt man zu der gesuchten Grenze a.

Die hierbei nöthigen Rechnungen sind einigermassen umständlich, besonders deswegen, weil die Berechnung des Werthes der Function $f^{(\lambda)}(a)$ durch die vorhergegangenen Rechnungen für $f^{(\lambda+1)}(a)$, $f^{(\lambda+2)}(a)$ in keiner Weise erleichtert wird.

Man kann diesem Uebelstande, freilich nur unter Verzichtleistung auf möglichst genaue Annäherung, in folgender Art abhelfen**).

Wir benutzen die Functionen

$$(8) \qquad \begin{aligned} f_1 &= a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-2} z + a_{n-1}, \\ f_2 &= a_0 z^{n-2} + a_1 z^{n-3} + \cdots + a_{n-2}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{n-1} &= a_0 z + a_1, \\ f_n &= a_0, \end{aligned}$$

*) Vgl. über diese und ähnliche Regeln: Burnside and Panton, Theory of equations. London 1881. S. 157. — Longchamps: Théorème d'algèbre. Nouv. Ann. (2), 19. S. 71—74.

**) Laguerre: Sur la détermination d'une limite supérieure etc. Nouv. Ann. (2), 19. S. 49.

und erkennen dann die Gültigkeit der Formeln

$$\frac{1}{n!}f^{(n)} = f_n,$$

$$\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)} = f_{n-1} + \binom{n-1}{1} f_n \cdot z,$$

$$(8^a)\quad \frac{1}{(n-2)!}f^{(n-2)} = f_{n-2} + \binom{n-2}{1} f_{n-1}\cdot z + \binom{n-1}{2} f_n \cdot z^2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)} = f_\alpha + \binom{\alpha}{1} f_{\alpha+1}\cdot z + \binom{\alpha+1}{2} f_{\alpha+2}\cdot z^2 + \cdots + \binom{n-1}{n-\alpha} f_n \cdot z^{n-\alpha},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

In der That, wenn wir die Coefficienten von $a_\lambda z^{n-\lambda-\alpha}$ auf beiden Seiten der letzten Gleichung mit einander vergleichen, so ergiebt sich ihre Richtigkeit aus dem Bestehen der Beziehung

$$\binom{n-\lambda}{\alpha} = 1 + \binom{\alpha}{1} + \binom{\alpha+1}{2} + \cdots + \binom{n-\lambda-1}{n-\lambda-\alpha},$$

deren Wahrheit durch allmäliches Aufrechnen der Summanden auf der rechten Seite leicht erkannt wird.

Die Formeln (8ª) zeigen nun, dass, wenn ein positives a die Functionen f, f_1, f_2, $\cdots f_n$ positiv macht, auch f, f', f'', $\cdots$ positiv sind, so dass wir also auf den Newton'schen Satz zurückgeführt werden. Zugleich lehrt aber (8ª), dass im Allgemeinen die so erlangte Grenze a die durch das Newton'sche Verfahren gelieferte übertrifft. Der Vorzug der Laguerre'schen Methode liegt in einer, durch die Gleichung

$$f_\lambda(z) = f_{\lambda+1}(z)\cdot z + a_{n-\lambda}$$

begründeten bequemeren Berechnung von $f_\lambda(a)$ aus $f_{\lambda+1}(a)$.

§ 186. Wir wollen jetzt die verschiedenen bisher besprochenen Methoden auf ein Beispiel anwenden. Es sei die Gleichung

$$f(z) = z^5 - 3z^3 + z^2 - 8z - 10 = 0$$

zur Untersuchung vorgelegt.

Aus § 180 ergiebt sich für die obere Grenze der absoluten Beträge der Wurzeln der Werth $\varrho = 1 + 10 = 11$.

Aus § 181 folgt als obere Grenze für die positiven Wurzeln

$$1 + \sqrt[2]{10} = 4{,}1\cdots;$$

als untere Grenze für die positiven Wurzeln

$$1 : \left(1 + \sqrt[2]{\frac{1}{10}}\right) = 0{,}7\cdots;$$

als obere Grenze für die negativen Wurzeln

$$-1:\left(1+\sqrt[1]{\frac{8}{10}}\right)=-0{,}5\cdots,$$

und als untere Grenze für die negativen Wurzeln

$$-1-\sqrt[1]{8}=-3{,}8\cdots.$$

Um die Regel von § 182 anzuwenden, setzen wir

$$f(z)=(z^5-3z^3-8z-10)+z^2$$

und erhalten 2,5 als obere Grenze der Wurzeln.

Die Cauchy'sche Methode liefert den grössten Werth unter den drei Ausdrücken

$$(3\cdot 3)^{\frac{1}{2}},\ (3\cdot 8)^{\frac{1}{4}},\ (3\cdot 10)^{\frac{1}{5}},$$

also die Grenze 3.

Bei der Vorschrift von § 184 haben wir die Werthe der Ausdrücke

$$\varrho+\frac{3}{\varrho},\quad \varrho+\frac{8}{\varrho^3+1},\quad \frac{10}{\varrho^4+\varrho}$$

zu untersuchen. Für $\varrho=1$ erhält man die Werte 4, 5, 5; für $\varrho=\sqrt{3}$ die Werthe

$$2\sqrt{3},\ \sqrt{3}+\frac{8}{1+3\sqrt{3}},\ \frac{10}{\sqrt{3}+9},$$

so dass $2\sqrt{3}=2{,}7\cdots$ als obere Grenze gewählt werden kann.

Die Newton'sche Methode betrachtet die Functionenreihe

$$\begin{aligned}&5z;\\&10z^2-3;\\&10z^3-9z+1;\\&5z^4-9z^2+2z-8;\\&z^5-3z^3+z^2-8z-10,\end{aligned}$$

bei welcher die erste Function für jeden positiven Werth z selbst positiv wird. Damit auch die zweite positiv werde, ist $z>\sqrt{0{,}3}$ zu nehmen. Der Werth $\sqrt{0{,}3}$ lässt aber die dritte Function noch negativ. Wir wählen $z=1$ und erhalten dafür positive Werthe der drei ersten und für $z=2$ positive Werthe der vier ersten Functionen. Aber $z=2$ macht $f(z)$ selbst noch negativ; will man bei ganzzahligen Grenzen bleiben, so reicht $z=3$ aus, um $f(z)$ und seine Ableitungen grösser als Null zu machen.

Die Laguerre'sche Methode liefert dasselbe Resultat.

§ 187. Nachdem wir gesehen haben, auf welche Art Grenzen für die Wurzeln gefunden werden können, wollen wir die Frage zu beantworten suchen, wie die reellen Wurzeln getrennt, d. h. wie Inter-

valle angegeben werden können, in denen nur eine (einfache oder mehrfache) reelle Wurzel liegt. Wir beginnen mit der Ableitung des Rolle'schen Satzes*): Zwischen zwei aufeinanderfolgenden reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ liegt eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$, also stets mindestens eine.

Wir haben früher (§ 36) gesehen, dass bei reellen Coefficienten

$$(9) \quad \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\varkappa_1}{z - z_1} + \frac{\varkappa_2}{z - z_2} + \cdots + \frac{\varkappa_\nu}{z - z_\nu} + \frac{2\lambda_1(z - \xi_1)}{(z - \xi_1)^2 + \eta_1^2} + \cdots$$

ist, wenn f in das Product seiner Wurzelfactoren zerlegt die Form

$$f(z) = (z - z_1)^{\varkappa_1}(z - z_2)^{\varkappa_2} \cdots (z - z_\nu)^{\varkappa_\nu}(z - \xi_1 - \eta_1 i)^{\lambda_1}(z - \xi_1 + \eta_1 i)^{\lambda_1} \cdots$$

giebt, wobei $z_1, z_2, \cdots z_\nu$ die reellen und $\xi_1 + \eta_1 i$, $\xi_1 - \eta_1 i, \cdots$ die complexen Wurzeln bedeuten, und die Exponenten ihre Multiplicität angeben. Setzt man jetzt einmal $z = z_1 - \delta$ und dann $z = z_1 + \delta$ bei hinreichend kleinem δ, so wird der Bruch $\frac{\varkappa_1}{z - z_1}$ einen beliebig grossen negativen und einen beliebig grossen positiven Werth erhalten, während alle anderen Brüche endliche Grenzen nicht überschreiten. Folglich wird, da Gleiches für $z_2 - \delta$ und $z_2 + \delta$ stattfindet,

$$\operatorname{sgn} \frac{f'(z_1 \pm \delta)}{f(z_1 \pm \delta)} = \operatorname{sgn} \frac{\varkappa_1}{\pm \delta} = \pm 1, \quad \operatorname{sgn} \frac{f'(z_1 + \delta)}{f(z_1 + \delta)} \cdot \frac{f'(z_2 - \delta)}{f(z_2 - \delta)} = -1.$$

Sind nun z_1 und z_2 zwei aufeinander folgende reelle Wurzeln, so hat der Nenner $f(z_1 + \delta) \cdot f(z_2 - \delta)$ das positive, und der Zähler folglich das negative Vorzeichen, d. h. $f'(z)$ wechselt zwischen $(z_1 + \delta)$ und $(z_2 - \delta)$ eine ungerade Anzahl von Malen sein Vorzeichen, und $f'(z) = 0$ hat zwischen diesen Grenzen eine ungerade Anzahl von Wurzeln.

Als Specialfall dieses Rolle'schen Theorems kann man nun auch den schon früher (§ 36) bewiesenen Satz betrachten: dass eine ν-fache Wurzel z_a von $f(z) = 0$ eine $(\nu - 1)$-fache Wurzel von $f'(z) = 0$ ist.

Aus dem Theoreme folgt die Reihe der Sätze:

I) Zwischen zwei Wurzeln von $f'(z) = 0$ kann höchstens eine Wurzel von $f(z) = 0$ liegen. II) Hat $f'(z) = 0$ gerade ν reelle Wurzeln, so hat $f(z) = 0$ entweder $(\nu + 1)$ oder um eine gerade Anzahl weniger. III) Sind alle Wurzeln von $f(z) = 0$ reell, so sind auch alle Wurzeln von $f'(z) = 0$ reell, und diese trennen jene von einander. IV) Sind z_1, z_2 zwei

*) Traité de l'algèbre. Paris, 1690.

aufeinander folgende, reelle Wurzeln von $f(z) = 0$, so ist sgn $f'(z_1) f'(z_2) = -1$.

Aus (9) geht ferner hervor, dass, wenn z wachsend eine Wurzel von f passirt, dabei sgn $f \cdot f'$ stets vom Negativen zum Positiven übergeht.

§ 188. Im Allgemeinen dient der Rolle'sche Satz weniger dazu, vorgelegte Gleichungen auf die Realität ihrer Wurzeln hin zu untersuchen, als dazu, Gleichungen herzustellen, deren Wurzeln hinsichtlich ihrer Realität gegebene Bedingungen erfüllen. Wir wollen dies an einer Reihe von Beispielen darlegen.

Besitzt die Gleichung

$$(1) \qquad f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

$\varkappa$ reelle Wurzeln, so besitzt

$$a_0 z^{n+\omega} + a_1 z^{n+\omega-1} + a_2 z^{n+\omega-2} + \cdots + a_n z^{\omega} = 0,$$

wobei ω eine ganze, positive Zahl bedeutet, $(\varkappa + \omega)$ reelle Wurzeln und nach dem Rolle'schen Satze

$$(n+\omega) a_0 z^{n+\omega-1} + (n+\omega-1) a_1 z^{n+\omega-2} + \cdots + \omega a_n z^{\omega-1} = 0$$

mindestens $(\varkappa + \omega - 1)$, also, wenn wir den Factor $z^{\omega-1}$ unterdrücken,

$$(10) \qquad \begin{aligned} &(n+\omega) a_0 z^n + (n+\omega-1) a_1 z^{n-1} + \cdots \\ &\qquad + (\omega+1) a_{n-1} z + \omega a_n = 0 \end{aligned}$$

mindestens $\varkappa$ reelle Wurzeln, d. h. mindestens so viele als (1).

Wenn ins Besondere (1) nur reelle Wurzeln besitzt, so gilt das Gleiche von (10). —

Besitzt (1) $\varkappa$ reelle Wurzeln, so hat für jedes reelle ϖ

$$f(z) \cdot (z + \varpi) = a_0 z^{n+1} + (a_1 + a_0 \varpi) z^n + (a_2 + a_1 \varpi) z^{n-1} + \cdots + a_n \varpi = 0$$

$(\varkappa + 1)$ und die durch Ableitung des Polynoms entstehende Gleichung

$$(11) \qquad \begin{aligned} &(n+1) a_0 z^n + n(a_1 + a_0 \varpi) z^{n-1} + (n-1)(a_2 + a_1 \varpi) z^{n-2} + \cdots \\ &\qquad + (a_n + a_{n-1} \varpi) = 0 \end{aligned}$$

mindestens $\varkappa$ reelle Wurzeln. —

Besitzt (1) $\varkappa$ reelle Wurzeln, dann gilt dasselbe von

$$z^n f\left(\frac{z+1}{z}\right) = a_0 (z+1)^n + a_1 (z+1)^{n-1} z + a_2 (z+1)^{n-2} z^2 + \cdots = 0.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit z und nimmt die Ableitung, so erkennt man, dass auch

$$\begin{aligned} &(n+1)(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) z^n + n(n a_0 + (n-1) a_1 + \cdots + a_{n-1}) z^{n-1} \\ &\quad + (n-1)\left(\binom{n}{2} a_0 + \binom{n-1}{2} a_1 + \cdots + a_{n-2}\right) z^{n-2} + \cdots + a_0 = 0 \end{aligned}$$

mindestens $\varkappa$ reelle Wurzeln besitzt. —

§ 189. Da die Gleichung des Grades $(m+n)$

$$z^m(z-1)^n = 0,$$

in welcher m und n ganze, positive Zahlen bedeuten, nur reelle Wurzeln besitzt, so ist dies auch mit jeder, durch Nullsetzen einer Ableitung erhaltenen Gleichung ebenso; bilden wir also für p $(< m, n)$ die p^{te} Ableitung und dividiren das Resultat durch $z^{m-p}(z-1)^{n-p}$, dann besitzt der Quotient gleich Null gesetzt auch nur reelle Wurzeln. Das ergiebt

$$\binom{m}{p}(z-1)^p + \binom{m}{p-1}\binom{n}{1}(z-1)^{p-1}z + \binom{m}{p-2}\binom{n}{2}(z-1)^{p-2}z^2 + \cdots + \binom{n}{p}z^p = 0. \tag{13}$$

Zugleich lehrt das Rolle'sche Theorem, wie man leicht erkennt, dass alle diese Wurzeln zwischen $z=0$ und $z=1$ liegen, und dass sie sämtlich nur einfache Wurzeln sind.

Durch die Substitution $u = \frac{z-1}{z}$ ergiebt sich aus (13), dass die Gleichungen von der Form

$$\binom{m}{p}u^p + \binom{m}{p-1}\binom{n}{1}u^{p-1} + \binom{m}{p-2}\binom{n}{2}u^{p-2} + \cdots + \binom{n}{p} = 0 \tag{14}$$

lauter reelle, negative, von einander getrennte Wurzeln haben.

Der Fall $m=n=p$ beansprucht seiner Wichtigkeit wegen ein besonderes Interesse. Die linke Seite von (13) wird dabei

$$(z-1)^n + \binom{n}{1}^2(z-1)^{n-1}z + \binom{n}{2}^2(z-1)^{n-2}z^2 + \cdots + z^n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z(z-1))^n. \tag{13a}$$

Setzt man $2z = x+1$, dann entsteht

$$z^n(z-1)^n = \frac{1}{2^{2n}}(x^2-1)^n,$$

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}(z(z-1))^n = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n = X_n.$$

Es hat also die Gleichung

$$X_n = 0 \tag{15}$$

nur reelle, getrennte, zwischen -1 und $+1$ liegende Wurzeln. Die Functionen X_n heissen Legendre'sche Polynome. Ausser der angeführten Entstehungsart erwähnen wir noch, dass die Entwickelung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}} = 1 + X_1\cdot\alpha + X_2\cdot\alpha^2 + \cdots + X_n\cdot\alpha^n + \cdots$$

gilt, und dass zwischen drei X_i mit aufeinander folgenden Indices

X_{n-1}, X_n, X_{n+1} die Recursionsformel

$$(15^a) \qquad (n+1)X_{n+1} - (2n+1)x X_n + n X_{n-1} = 0$$

besteht. (15^a) unterscheidet sich von den in der achten Vorlesung behandelten Recursionsformeln dadurch, dass seine Coefficienten von den Indices der X abhängig sind. Die Ausdrücke für X_n sind für $n = 1, 2, 3, 4, \cdots$ die folgenden

$$X_1 = x, \qquad X_2 = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$X_3 = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad X_4 = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3),$$

. . . . . .

§ 190. Zu ähnlichen Formeln gelangt man, wenn man von

$$z^m(z^2 - 1)^n = 0$$

ausgeht; auch hier sind alle Wurzeln reell und liegen zwischen -1 und $+1$, die Grenzen eingeschlossen. Differentiirt man bei $m = 0$ z. B. $p$mal und dividirt dann durch

$$p!(z^2 - 1)^{n-p},$$

so erhält man, wenn $2z = u$ und $(z^2 - 1) = v$ gesetzt wird,

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\binom{n}{p} u^p + \binom{n}{p-1}\binom{p-1}{1} u^{p-2}v + \binom{n}{p-2}\binom{p-2}{2} u^{p-4}v^2 \\ &\quad + \binom{n}{p-3}\binom{p-3}{3} u^{p-6}v^3 + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung hat nur reelle, getrennte Wurzeln, die alle zwischen $z = -1$ und $z = +1$ liegen. Setzt man $w = \frac{v}{u^2}$, dann ergiebt sich die Gleichung

$$(17) \qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1}\binom{p-1}{1} w + \binom{n}{p-2}\binom{p-2}{2} w^2 + \cdots = 0,$$

deren Wurzeln sämmtlich reell und von einander getrennt sind.

§ 191. Als weitere Anwendungen des Rolle'schen Theorems beweisen wir die Sätze:

Die Gleichung

$$g(z) = f(z) + hf'(z) = 0$$

hat mindestens so viele reelle Wurzeln, wie $f(z) = 0$, wenn h eine beliebige reelle Constante bedeutet*).

In der That, wenn z_1, z_2 auf einander folgende reelle Wurzeln von $f = 0$ sind, dann ist nach § 187, IV

$$\operatorname{sgn}(f(z_1) + hf'(z_1))(f(z_2) + hf'(z_2)) = \operatorname{sgn} f'(z_1) f'(z_2) = -1,$$

so dass $g(z) = 0$ eine reelle Wurzel zwischen z_1 und z_2 besitzt. Folg-

*) Poulain: Nouv. Ann. (2). 16.

lich hat $g = 0$ höchstens eine reelle Wurzel weniger als $f = 0$. Da aber die Differenz der Anzahlen reeller Wurzeln zweier Gleichungen desselben Grades eine gerade Zahl sein muss, so hat $g = 0$ mindestens so viele reelle Wurzeln wie $f = 0$. —

Bedeutet $f(z)$ unser Polynom (1), und

$$1 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_x z^x = 0 \tag{18}$$

eine Gleichung mit nur reellen Wurzeln, dann hat die Gleichung

$$g(z) = f(z) + A_1 f'(z) + A_2 f''(z) + \cdots + A_x f^{(x)}(z) = 0$$

mindestens so viele reelle Wurzeln wie $f(z) = 0$.*)

Für $x = 1$ ist der Satz soeben bewiesen worden. Wir nehmen an, er sei für $(x - 1)$ richtig, und brauchen dann nur zu zeigen, dass er für x gültig ist, um den vollständigen Beweis durch strenge Induction zu liefern.

Es sei $\zeta = -\frac{1}{h}$ eine der reellen Wurzeln von (18) und

$$1 + A_1 z + \cdots + A_x z^x = (1 + hz)(1 + B_1 z + B_2 z^2 + \cdots + B_{x-1} z^{x-1}).$$

Setzen wir jetzt, unserem Satze für $(x - 1)$ entsprechend,

$$G(z) = f(z) + B_1 f'(z) + B_2 f''(z) + \cdots + B_{x-1} f^{(x-1)}(z),$$

dann wird

$$G'(z) = f'(z) + B_1 f''(z) + B_2 f'''(z) + \cdots + B_{x-1} f^{(x)}(z),$$

$$\begin{aligned} G(z) + G'(z) \cdot h &= f(z) + (B_1 + h) f'(z) + (B_2 + hB_1) f''(z) + \cdots \\ &= f(z) + A_1 f'(z) + A_2 f''(z) + \cdots \\ &= g(z). \end{aligned}$$

Nun hat der Annahme nach $G(z) = 0$ mindestens so viele reelle Wurzeln, wie $f(z) = 0$, und dem vorigen Satze gemäss hat

$$g(z) = G(z) + hG'(z) = 0$$

mindestens so viele wie $G(z) = 0$, so dass also das Theorem dadurch bewiesen ist. —

Ohne näher auf den einfachen Beweis einzugehen, führen wir noch den Satz an: Die Gleichung, in der h eine reelle Constante bedeutet,

$$g(z) = f^2(z) - h^2 f'^2(z) = 0,$$

hat mindestens $2x$ reelle Wurzeln, wenn $f(z) = 0$ deren x hat. (Man substituirt $z = -\infty$, z_1, z_2, $\cdots$ z_x, $+\infty$).

Dieses Theorem lässt sich leicht verallgemeinern. —

*) Poulain: Nouv. Ann. (2). 16. Vgl. auch: Fouret: C. R. 106. S. 1135—1139; 1220—1222.

§ 192. Die Gleichung

$$f(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} = 0$$

besitzt für ein gerades n keine, für ein ungerades n nur eine einzige reelle Wurzel*).

Da

$$f(z) = f'(z) + \frac{1}{n!} z^n$$

ist, so würden aus der Existenz zweier auf einander folgender, reeller Wurzeln z_1, z_2 der vorgelegten Gleichung die beiden Beziehungen

$$0 = f'(z_1) + \frac{z_1^n}{n!}, \quad 0 = f'(z_2) + \frac{z_2^n}{n!}$$

sich ergeben. Es ist aber klar, dass $f(z) = 0$, wenn überhaupt, dann nur negative, reelle Wurzeln besitzen kann; es haben demnach z_1^n und z_2^n und also auch $f'(z_1)$ und $f'(z_2)$ je das gleiche Vorzeichen. Das würde dem Satze § 187, IV. widersprechen. —

Hat die Gleichung $f(z) = 0$ vom Grade n höchstens eine reelle Wurzel, dann ist dasselbe mit

$$g(z) = f(z) + hf'(z) + h^2 f''(z) + \cdots + h^n f^{(n)}(z) = 0$$

der Fall, wo h eine willkürliche, reelle Constante bedeutet**).

Wir haben hier, da $f^{(n+1)}(z)$ gleich Null wird,

$$g'(z) = f'(z) + hf''(z) + h^2 f'''(z) + \cdots + h^{n-1} f^{(n)}(z),$$
$$g(z) = f(z) + hg'(z).$$

Nun sei zuerst $n = 2\nu$, so dass also $f(z) = 0$ überhaupt keine reelle Wurzel besitzt. Wenn $g = 0$ eine solche besässe, so müsste noch eine andere reelle Wurzel vorhanden sein, da die Anzahl der complexen Wurzeln einer Gleichung mit reellen Coefficienten stets gerade ist. Es mögen also z_1, z_2 zwei auf einander folgende Wurzeln von $g = 0$ bedeuten. Dann wären die beiden Beziehungen erfüllt

$$0 = f(z_1) + hg'(z_1), \quad 0 = f(z_2) + hg'(z_2),$$

und da $\operatorname{sgn} g'(z_1) g'(z_2) = -1$ ist, so müsste auch $\operatorname{sgn} f(z_1) f(z_2) = -1$ sein, d. h. $f(z) = 0$ hätte, gegen die Voraussetzung, eine reelle Wurzel zwischen z_1 und z_2.

Wenn ferner $n = (2\nu + 1)$ ist, dann hat $f = 0$ eine und nur eine reelle Wurzel. Hätte $g = 0$ deren mehrere, so müssten es

---

*) Sylvester: Nouv. Ann. (2) 5. 1866. S. 520 ff.

**) Hermite: ibidem.

mindestens drei sein. Wir bezeichnen mit z_0, z_1, z_2 drei unmittelbar auf einander folgende; dann wäre

$$\operatorname{sgn} g'(z_0 + \delta) = -\operatorname{sgn} g'(z_1 - \delta);\ \operatorname{sgn} g'(z_1 + \delta) = -\operatorname{sgn} g'(z_2 - \delta),$$

und aus den Gleichungen

$$g(z_0 + \delta) = f(z_0 + \delta) + hg'(z_0 + \delta);$$
$$g(z_1 - \delta) = f(z_1 - \delta) + hg'(z_1 - \delta); \cdots$$

folgte wegen der kleinen Werthe von $g(z_0 + \delta)$, $g(z_1 - \delta)$, $\cdots$, dass

$$\operatorname{sgn} f(z_0 + \delta) = -\operatorname{sgn} f(z_1 + \delta);\ \operatorname{sgn} f(z_1 + \delta) = -\operatorname{sgn} f(z_2 - \delta)$$

ist, d. h. dass f zwischen z_0 und z_1 und ebenso zwischen z_1 und z_2 verschwindet, was wieder der Voraussetzung entgegen ist.

§ 193. Wir wollen endlich mit Hülfe des Rolle'schen Theorems noch einen Satz beweisen, den wir später gebrauchen, und der gewöhnlich durch Methoden der Differentialrechnung begründet wird. Hier sollen Stetigkeitsbetrachtungen nur in so weit benutzt werden, als sie zum Nachweise der Wurzelexistenz und des Rolle'schen Satzes nothwendig sind. Den Satz, um den es sich handelt, nennen wir den Mittelwerthsatz. (Vgl. übrigens Pasch: Differentialrechnung S. 83.)

Zuerst leiten wir folgendes Lemma ab. Die Gleichung

$$na_0 z^{n-1} + (n-1)a_1 z^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}z + a_{n-1}$$
$$= a_0 \omega^{n-1} + a_1 \omega^{n-2} + \cdots + a_{n-2}\omega + a_{n-1},$$

in welcher ω eine reelle Constante bedeutet, hat eine zwischen $z = 0$ und $z = \omega$ liegende Wurzel.

Dies folgt nach dem Rolle'schen Satze daraus, dass die Gleichung

$$a_0 z(z^{n-1} - \omega^{n-1}) + a_1 z(z^{n-2} - \omega^{n-2}) + \cdots + a_{n-2}z(z - \omega) = 0$$

die beiden reellen Wurzeln $z = 0$ und $z = \omega$ besitzt. —

Nebenbei möge bemerkt werden, dass aus der Betrachtung von

$$z^{\lambda}(f(z^{\varkappa}) - f(\omega^{\varkappa})) = 0$$

auf dieselbe Art die Existenz einer zwischen 0 und ω liegenden reellen Wurzel der Gleichung

$$f(z) + \frac{\varkappa}{\lambda} z f'(z) = f(\omega)$$

gefolgert werden kann. —

Wenn nun eine ganze Function n^{ten} Grades

$$f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_{n-1}z + c_n$$

gegeben ist, dann hat man

$$\frac{f(h+\omega)-f(h)}{\omega} = \frac{f'(h)}{1!} + \frac{f''(h)}{2!}\omega + \cdots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}\omega^{n-1},$$

$$f'(h+z) = f'(h) + 2\frac{f''(h)}{2!}z + \cdots + n\frac{f^{(n)}(h)}{n!}z^{n-1}.$$

Setzt man jetzt in dem eben bewiesenen Lemma

$$a_0 = \frac{f^{(n)}(h)}{n!}, \quad a_1 = \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}, \quad \cdots a_{n-1} = \frac{f'(h)}{1},$$

dann zeigt sich: Die Gleichung $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades in z

$$\frac{f(h+\omega)-f(h)}{\omega} = f'(h+z)$$

hat eine zwischen 0 und ω liegende Wurzel. Diese können wir $\omega\Theta$ schreiben, wobei Θ einen positiven, echten Bruch bedeutet. Es ist also die Existenz eines solchen Θ bewiesen, für welches die Gleichung gilt

(19) $$f(h+\omega) = f(h) + \omega f'(h+\omega\Theta), \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$

§ 194. In genau derselben Weise leiten wir das Lemma ab, dass die Gleichung, in welcher ω eine reelle, beliebige Constante bedeutet,

$$\binom{n}{2}a_0 z^{n-2} + \binom{n-1}{2}a_1 z^{n-3} + \cdots + \binom{3}{2}a_{n-3}z + \binom{2}{2}a_{n-2}$$
$$= a_0\omega^{n-2} + a_1\omega^{n-3} + \cdots + a_{n-3}\omega + a_{n-2},$$

eine zwischen $z=0$ und $z=\omega$ gelegene reelle Wurzel besitzt. Da nämlich

$$a_0 z^2(z^{n-2} - \omega^{n-2}) + a_1 z^2(z^{n-3} - \omega^{n-3}) + \cdots + a_{n-3}z^2(z-\omega) = 0$$

die Doppelwurzel $z=0$ und die einfache Wurzel $z=\omega$ hat, so wird die erste Ableitung des Polynoms einen Nullwerth $z=0$ und einen zweiten $z=\omega'$ haben, wobei ω' zwischen 0 und ω liegt. Die zweite Ableitung des Polynoms hat deswegen, wie behauptet worden war, einen gleichfalls zwischen 0 und ω gelegenen Nullwerth.

Bilden wir

$$\frac{f(h+\omega)-f(h)-\omega f'(h)}{\omega^2} = \frac{f''(h)}{2!} + \frac{f'''(h)}{3!}\omega + \cdots + \frac{f^{(n)}(h)}{n!}\omega^{n-2},$$

$$\frac{f''(h+z)}{1\cdot 2} = \binom{2}{2}\frac{f''(h)}{2!} + \binom{3}{2}\frac{f'''(h)}{3!}z + \cdots + \binom{n}{2}\frac{f^{(n)}(h)}{n!}z^{n-2}$$

und setzen in das Lemma dieses Paragraphen

$$a_0 = \frac{f^{(n)}(h)}{n!}, \quad a_1 = \frac{f^{(n-1)}(h)}{(n-1)!}, \quad \cdots a_{n-2} = \frac{f''(h)}{2!}$$

ein, dann zeigt sich: Man kann

$$(19^a) \qquad f(h+\omega) = f(h) + \omega f'(h) + \frac{\omega^2}{1\cdot 2} f''(h+\Theta\omega)$$

setzen, wobei Θ einen echten, positiven Bruch bedeutet.

Es ist ersichtlich, dass man die Reihe der Mittelwerthsätze in derselben Art vermehren kann.

Siebzehnte Vorlesung.

Das Budan-Fourier'sche Theorem.

§ 195. Wir leiten jetzt einen Satz ab, der für die praktischen Zwecke der Wurzeltrennung geeigneter ist, als das bisher besprochene Rolle'sche Theorem.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir die Aenderungen in der Reihe der Vorzeichen, welche sich ergeben, wenn man in

$$(1) \qquad f(z),\ f'(z),\ f''(z),\ \cdots f^{(n)}(z)$$

einmal $z = z_1$ und einmal $z = z_2$ einträgt $(z_2 > z_1)$, also die Unterschiede in den beiden Reihen

$$(2) \qquad \operatorname{sgn} f(z_1),\ \operatorname{sgn} f'(z_1),\ \cdots \operatorname{sgn} f^{(n)}(z_1),$$

$$(3) \qquad \operatorname{sgn} f(z_2),\ \operatorname{sgn} f'(z_2),\ \cdots \operatorname{sgn} f^{(n)}(z_2).$$

Wenn in einer solchen Reihe

$$(4) \qquad \operatorname{sgn} f(\zeta),\ \operatorname{sgn} f'(\zeta),\ \cdots \operatorname{sgn} f^{(n)}(\zeta)$$

zwei aufeinander folgende Signa denselben Werth haben, dann werden wir dies eine Zeichenfolge, oder kürzer eine Folge nennen und durch ein F bezeichnen; wenn zwei aufeinander folgende Signa verschieden sind, sprechen wir von einem Zeichenwechsel oder kürzer von einem Wechsel und bezeichnen einen solchen durch ein W. Die Anzahl der in einer Reihe, wie (4), vorkommenden Zeichenfolgen oder Zeichenwechsel wird durch

$$\sum F(\zeta) \quad \text{bezw.} \sum W(\zeta)$$

angegeben. Es ist klar, dass bei unserer $(n+1)$-gliedrigen Reihe

$$(5) \qquad \sum F(\zeta) + \sum W(\zeta) = n$$

sein wird, falls keins der Glieder von (4) verschwindet. Sind in (4) Glieder gleich Null, dann zählen wir die F und die W einfach so, als ob die verschwindenden Glieder überhaupt nicht vorhanden wären.

§ 196. Der zu beweisende Budan-Fourier'sche Satz lautet: Die Anzahl der reellen, zwischen z_1 und z_2 $(> z_1)$ liegenden Wurzeln von $f = 0$ ist gleich der Anzahl der beim Uebergange von (2) zu (3) verlorenen Zeichenwechsel oder um eine gerade Anzahl geringer. Wenn man also diese Wurzelanzahl mit $Z(z_1, z_2)$ bezeichnet, dann ist

$$Z(z_1, z_2) = \sum W(z_1) - \sum W(z_2) - 2h, \tag{6}$$

wobei h eine positive, ganze Zahl bedeutet.

Geht die Variable ζ von z_1 stetig wachsend bis z_2, dann kann eine Aenderung in den Zeichen (4) nur dadurch eintreten, dass eine oder mehrere der Functionen (1) durch Null gehen. Wir nehmen zunächst an, dass $f(\zeta) \neq 0$ ist, während eine oder mehrere der mittleren Functionen in (1) für $z = \zeta$ verschwinden. Da $f^{(n)}(z) = n! a_0$ eine Constante ist, so kann die letzte Function nicht zu den verschwindenden gehören, und auf die verschwindenden folgt demnach jedenfalls eine für $z = \zeta$ von Null verschiedene Function. Es ist, wie sich zeigen wird, indifferent, welches Signum sie für $z = \zeta$ hat; wir nehmen, um die Begriffe zu fixiren, an, dass es das Pluszeichen sei. Es mögen demnach etwa

$$f^{(\varkappa)}(\zeta),\ f^{(\varkappa+1)}(\zeta),\ \cdots\ f^{(\varkappa+\lambda-1)}(\zeta) \qquad (\varkappa > 0) \tag{7}$$

gleich Null sein, während $\operatorname{sgn} f^{(\varkappa+\lambda)}(\zeta) = +1$ ist. Dann kann man zwei Intervalle $J_1 = (\zeta - \delta, \cdots \zeta)$ und $J_2 = (\zeta, \cdots \zeta + \delta)$ zu beiden Seiten von ζ bei so geringer Ausdehnung abgrenzen, dass $f^{(\varkappa+\lambda)}$ in beiden beständig positiv bleibt. Folglich muss $f^{(\varkappa+\lambda-1)}$ in J_1 und J_2 wachsen, und da $f^{(\varkappa+\lambda-1)}(\zeta) = 0$ ist, so ist diese Function in J_1 negativ und in J_2 positiv. Für $f^{(\varkappa+\lambda-2)}$ und J_2 gilt dasselbe, u. s. f., derart, dass alle Functionen (7) in J_2 positiv sind. Da ferner $f^{(\varkappa+\lambda-1)}$ in J_1 negativ ist, so muss $f^{(\varkappa+\lambda-2)}$ abnehmen, und weil $f^{(\varkappa+\lambda-2)}(\zeta) = 0$ ist, in J_1 positiv sein. In gleicher Weise setzen sich die Schlüsse fort, und man erkennt die Richtigkeit der Tabelle

sgn:	$f^{(\varkappa-1)}$	$f^{(\varkappa)}$	$f^{(\varkappa+1)}$	...	$f^{(\varkappa+\lambda-3)}$	$f^{(\varkappa+\lambda-2)}$	$f^{(\varkappa+\lambda-1)}$	$f^{(\varkappa+\lambda)}$
(J_1)	ε	$(-1)^\lambda$	$(-1)^{\lambda-1}$	...	$-$	$+$	$-$	$+$
ζ	ε	0	0	...	0	0	0	$+$
(J_2)	ε	$+$	$+$	...	$+$	$+$	$+$	$+$

Hierin bedeutet $\varepsilon = \pm 1$ das Signum von $f^{(\varkappa-1)}(\zeta)$. Ist λ eine gerade Zahl, dann sieht man, dass beim Passiren von ζ eine gerade Anzahl von W, nämlich λ verloren gehen. Ist λ ungerade und $\varepsilon = +1$, dann gehen $(\lambda + 1)$ verloren; ist λ ungerade und $\varepsilon = -1$, dann

gehen $(\lambda - 1)$ verloren; in jedem Falle also eine gerade Anzahl. (Vgl. § 203.) Ganz so wird es bei $\operatorname{sgn} f^{(\varkappa+\lambda)}(\xi) = -1$.

Jetzt gehen wir auf den bisher ausgeschlossenen Fall ein, dass $f(\xi) = 0$ ist. Gleichzeitig mit f mögen $f', f'', \cdots f^{(\lambda-1)}$ verschwinden, während $f^{(\lambda)}(\xi)$ positiv bleibt. Wir können die hierbei eintretenden Verhältnisse sofort erkennen, wenn wir in der obigen Tabelle die zu $f^{(\varkappa-1)}$ gehörige Spalte unterdrücken und in den folgenden für $\varkappa$ die Null einsetzen. Dann folgt, dass hier beim Uebergange von $(\xi - \delta)$ zu $(\xi + \delta)$ genau λ Zeichenwechsel verloren gehen, d. h. so viele, als die Multiplicität der Wurzel ξ von $f = 0$ angiebt.

Soweit der Verlust an W vom Passiren einer oder mehrerer Wurzeln abhängt, soweit stimmt die Anzahl der verlorenen W mit der Anzahl der passirten Wurzeln überein; soweit er aber vom Verschwinden mittlerer Functionen abhängt, soweit beträgt er eine gerade Zahl $2h$. Damit ist also der Budan-Fourier'sche Satz bewiesen.

Eine stillschweigend gemachte Voraussetzung muss noch geprüft werden. Wir haben nämlich bei der bisherigen Abzählung angenommen, dass für z_1 und für z_2 sämmtliche Glieder der Reihe (1) von Null verschieden seien. Verschwinden aber für z_1 mehrere der mittleren Glieder, ohne dass $f(z_1) = 0$ ist, dann kann man die untere Grenze durch ein hinreichend nahe gelegenes $(z_1 + \delta)$ ersetzen, ohne die Zahl $Z(z_1, z_2)$ zu verändern. Die obige Tabelle lehrt dabei, dass $\sum W(z_1)$ mit $\sum W(z_1 + \delta)$ übereinstimmt, so dass auch in diesem Falle der Satz bestehen bleibt. Verschwinden ferner für z_2 mehrere der mittleren Glieder, ohne dass $f(z_2) = 0$ ist, dann kann man die obere Grenze durch ein hinreichend nahe gelegenes $(z_2 - \delta)$ ersetzen, und es gilt

$$Z(z_1, z_2) = Z(z_1, z_2 - \delta) = \sum W(z_1) - \sum W(z_2 - \delta) - 2h.$$

Hier wären auf Grund der obigen Tabelle $W(z_2)$ und $W(z_2 - \delta)$ mit einander zu vergleichen, und dieser Vergleich zeigt sofort

$$\sum W(z_2 - \delta) = \sum W(z_2) - 2h_1,$$

so dass also auch in diesem Falle der Satz richtig ist. Man braucht demnach keine Aenderungen anzubringen, auch wenn an den Grenzen mittlere Functionen der Reihe (1) verschwinden.

Ist dagegen $f(z_1) = 0$ oder $f(z_2) = 0$, dann wird der Ausdruck des Satzes infolge der Worte „zwischen z_1 und z_2 liegende Wurzeln" unbestimmt.

Der Budan-Fourier'sche Satz liefert eine obere Grenze für die Anzahl der Wurzeln innerhalb eines Intervalles. Wir können leicht

ersehen, wann die richtige Anzahl geliefert wird. Beim Verschwinden von λ aufeinanderfolgenden mittleren Functionen von (1) gehen bei geradem λ auch λ der W verloren; bei ungeradem λ und positivem ε hingegen $(\lambda+1)$, und bei ungeradem λ und negativem ε endlich $(\lambda-1)$. Damit diese Zahl gleich Null werde, muss also $\lambda = 1$ und $\varepsilon = -1$ sein, d. h. es dürfen nicht mehrere aufeinanderfolgende, mittlere Functionen von (1) gleichzeitig verschwinden, und beim Verschwinden einer einzigen müssen die benachbarten Functionen rechts und links verschiedene Signa besitzen.

§ 197. Wir wollen bei der Function f und ihren Ableitungen

$$(8)\quad \begin{aligned} f(z) &= a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1} z + a_n, \qquad (a_0 > 0)\\ f'(z) &= n a_0 z^{n-1} + (n-1) a_1 z^{n-2} + \cdots + a_{n-1},\\ f''(z) &= n(n-1) a_0 z^{n-2} + (n-1)(n-2) a_1 z^{n-3} + \cdots + 2 \cdot 1 a_{n-2},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ f^{(n)}(z) &= n!\, a_0 \end{aligned}$$

die Zeichenreihen (2) und (3) für $z_1 = 0$ und für einen so grossen positiven Werth z_2 bestimmen, dass dieser eine obere Grenze der positiven Wurzeln von $f = 0$ bildet. Dazu reicht es aus (§ 185), dass z_2 alle Functionen (8) positiv macht. Wir bekommen somit

$$\operatorname{sgn} f(0) = \operatorname{sgn} a_n,\ \operatorname{sgn} f'(0) = \operatorname{sgn} a_{n-1},\ \cdots\ \operatorname{sgn} f^{(x)}(0) = \operatorname{sgn} a_{n-x},\ \cdots$$
$$\operatorname{sgn} f(z_2) = +1,\quad \operatorname{sgn} f'(z_2) = +1,\qquad \cdots\ \operatorname{sgn} f^{(x)}(z_2) = +1,\ \cdots$$

und erhalten als Specialfall des Budan-Fourier'schen Theorems den Descartes'schen Satz: Die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(z) = 0$ ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_n$ oder um eine gerade Anzahl geringer. Dieser Satz behält nach dem vorigen Paragraphen auch dann seine Gültigkeit, wenn die Coefficienten nicht sämmtlich von Null verschieden sind.

Substituirt man in $f(z)$ statt z den Werth $-z$, so folgt: Die Anzahl der negativen Wurzeln von $f(z) = 0$ ist gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe

$$(-1)^n a_0,\ (-1)^{n-1} a_1,\ (-1)^{n-2} a_2,\ \cdots\ -a_{n-1},\ a_n$$

oder um eine gerade Anzahl geringer.

Aus diesen Betrachtungen erkennt man unmittelbar die Richtigkeit der Sätze: Hat eine Gleichung $f(z) = 0$ nur reelle, positive Wurzeln, dann ist sie vollständig, d. h. keiner ihrer Coefficienten verschwindet, und sie besitzt nur Zeichenwechsel in der Reihe der Coefficienten. — Hat eine Gleichung $f(z) = 0$

nur reelle, negative Wurzeln, dann ist sie vollständig und besitzt nur Zeichenfolgen in der Reihe der Coefficienten.

§ 198. Wir untersuchen jetzt eingehender die Verhältnisse, welche mit dem Nullwerden von Coefficienten a_λ unserer Gleichung $f(z) = 0$ zusammenhängen. Unter den Differenzen der Grade der wirklich auftretenden Glieder können zuerst ungerade Zahlen vorkommen. Diese Differenzen bezeichnen wir durch

$$2k_1 + 1,\ 2k_2 + 1,\ \cdots\ 2k_\varkappa + 1.$$

Es können ferner unter den Graddifferenzen gerade Zahlen vorkommen, welche zu Gliedern mit entgegengesetzten Vorzeichen gehören. Diese Differenzen bezeichnen wir mit

$$2l_1 + 2,\ 2l_2 + 2,\ \cdots\ 2l_\lambda + 2.$$

Endlich können noch geradzahlige Differenzen auftreten, welche Gliedern mit gleichen Vorzeichen in $f(z)$ entstammen. Diese mögen

$$2g_1,\ 2g_2,\ \cdots\ 2g_\mu$$

sein. Dann kommen in dem Polynome $(\varkappa + \lambda + \mu + 1)$ Glieder wirklich vor, da $(\varkappa + \lambda + \mu)$ Graddifferenzen vorhanden sind. Es fehlen ferner, wie sich aus der Betrachtung der Grösse der einzelnen Gradintervalle ergiebt,

$$\sum_1^{\varkappa} 2k_\alpha + \sum_1^{\lambda}(2l_\beta + 1) + \sum_1^{\mu}(2g_\gamma - 1)$$
$$= 2\left(\sum k + \sum l + \sum g\right) + (\lambda - \mu)$$

Glieder. Die Summe aus der Zahl der vorhandenen und der fehlenden muss $(n + 1)$ sein. Das giebt somit

$$n + 1 = 2\left(\sum k + \sum l + \sum g\right) + \varkappa + 2\lambda + 1,$$

$$n = 2\left(\sum k + \sum l + \sum g\right) + \varkappa + 2\lambda. \tag{9}$$

Weiter bezeichnen wir, wie bisher, die Anzahl der in $f(z)$ vorkommenden Folgen und Wechsel mit $\sum F$ und $\sum W$, und ferner die zu $f(-z)$ gehörigen entsprechenden Anzahlen mit $\sum F'$ und $\sum W'$.

In $f(z)$ liefert jede Differenz der zweiten Sorte einen Wechsel und ebenso in $f(-z)$. Die Differenzen dritter Sorte liefern sowohl in $f(z)$ wie in $f(-z)$ nur Folgen. Jede Differenz der ersten Sorte liefert entweder nur in $f(z)$ oder nur in $f(-z)$ einen Wechsel. Man hat also

$$\varkappa + 2\lambda = \sum W + \sum W',$$

und dadurch geht die Gleichung (9) in

$$(10) \qquad n = \sum W + \sum W' + 2\left(\sum k + \sum l + \sum g\right)$$

über. Bezeichnen wir ferner die Anzahl der positiven Wurzeln von $f(z) = 0$ mit P, die der negativen mit N und die der complexen mit $2J$, dann ist natürlich

$$n = P + N + 2J,$$

und die Subtraction dieser Gleichung von der vorhergehenden liefert

$$(11) \quad 2J = \left(\sum W - P\right) + \left(\sum W' - N\right) + 2\left(\sum k + \sum l + \sum g\right).$$

Hieraus können wir eine Reihe von Schlüssen ziehen. Nach dem Descartes'schen Satze ist jede der beiden ersten Klammern rechts positiv oder Null, und die letzte Klammer enthält nach der Definition der Zahlen k, l, g auch nur positive oder verschwindende Elemente. Falls also $f(z) = 0$ lediglich reelle Wurzeln enthält, und daher $J = 0$ ist, muss auch einzeln

$$\sum W = P, \quad \sum W' = N; \quad \sum k = 0, \quad \sum l = 0, \quad \sum g = 0$$

sein. Es können demnach keine Differenzen der dritten Art vorkommen, und bei jeder Differenz der beiden ersten Arten kann nur der extreme Fall auftreten, dass alle k und l Null werden. So sehen wir: Wenn eine Gleichung nur reelle Wurzeln hat, dann ist die Anzahl ihrer positiven Wurzeln gleich der Zahl der in den Coefficienten von $f(z)$ vorkommenden Zeichenwechsel, und die Anzahl ihrer negativen Wurzeln gleich der Zahl der bei $f(-z)$ vorkommenden Zeichenwechsel. Es können in $f(z)$ höchstens einzelne Glieder fehlen und die Coefficienten der, den fehlenden rechts und links benachbarten müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben. —

In einer Gleichung $f(z) = 0$ folgt aus der Existenz einer Lücke von der Graddifferenz $(2k + 1)$ das Vorhandensein von $2k$ complexen Wurzeln, aus der Existenz einer Lücke von der Graddifferenz $2h$ das Vorhandensein von $2h$ oder $(2h - 2)$ complexen Wurzeln, je nachdem die einschliessenden Glieder Coefficienten mit denselben oder mit entgegengesetzten Vorzeichen besitzen.

In dem ersten betrachteten Falle, dass die Gleichung $f(z) = 0$ nur reelle Wurzeln hat, und also $\sum W = P$ wird, können nur Lücken in der Gestalt

$$\pm \mid a_\mu \mid z^{n-\mu} \mp \mid a_{\mu+2} \mid z^{n-\mu-2}$$

eintreten; schiebt man hier ein Glied $\pm 0 \cdot z^{n-\mu-1}$ mit beliebig ge-

wähltem Vorzeichen ein, dann wird $\sum W$ nicht geändert. Man hat demnach auch in der so vervollständigten Gleichung $\sum W = P$. Da aber jetzt $\sum W + \sum F = n$ ist, wie (5) es angiebt, so wird in ihr $\sum F = N$ werden.

Von dieser letzten Bemerkung wollen wir sofort eine Anwendung auf die im § 178 behandelte Sorte von Gleichungen machen. Es ist dort gezeigt worden, dass die Gleichung für t

$$(12) \qquad |\, t\varepsilon_{\mu\nu} - c_{\mu\nu} \,| = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots n)$$

($c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}$; $\varepsilon_{\mu\nu} = 0$, wenn $\mu \neq \nu$ ist; $\varepsilon_{\mu\nu} = 1$, wenn $\mu = \nu$ ist)

nur reelle Wurzeln besitzt, und nehmen wir dazu die Betrachtungen aus § 177, so können wir sagen: Vervollständigt man die entwickelte linke Seite von (12) nöthigenfalls durch Glieder $\pm 0 \cdot z^r$, so dass sie alle $(n+1)$ Terme z^n, z^{n-1}, $\cdots z$, 1 enthält, dann ist die Differenz $\sum W - \sum F$, bezogen auf die Coefficienten, gleich der Signatur der quadratischen Form

$$\sum c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots n;\ c_{\mu\nu} = c_{\nu\mu}).$$

§ 199. Wir haben im § 197 aus dem Budan-Fourier'schen Theoreme das Descartes'sche als Specialfall hergeleitet. Wir können es aber auch in einfacher Art direct beweisen*), und wir wollen dies thun, um von dem Beweisgange nach anderer Seite hin noch Vortheil zu ziehen.

Zuerst zeigen wir: Das Polynom $f(z) \cdot (z - c)$, in welchem c eine positive Zahl bedeutet, hat eine ungerade Anzahl von Wechseln mehr unter den Coefficienten als $f(z)$. Es sei

$$f(z) = (a_0 z^n + \cdots + b_0 z^{n_1+1}) - (a_1 z^{n_1} + \cdots + b_1 z^{n_2+1}) + \cdots + (-1)^r (a_r z^{n_r} + \cdots + b_r z^\varrho).$$

Dabei sollen alle Coefficienten a positiv, die b positiv oder 0 sein, so dass also die aufeinanderfolgenden Glieder desselben Zeichens in je eine Klammer vereinigt sind. Dann wird

$$f(z)(z-c) = (a_0 z^{n+1} + \cdots) - (a_1' z^{n_1+1} + \cdots) + \cdots + (-1)^r (a_r' z^{n_r+1} + \cdots),$$

$$a_1' = a_1 + c b_0, \quad a_2' = a_2 + c b_1, \quad \cdots,$$

und daraus folgt, dass $a_1', a_2', \cdots a_r'$ gleichfalls positive Werthe haben. Trotzdem daher über die anderen Coefficienten nichts bekannt ist, können wir doch schliessen, dass von $a_0 z^{n+1}$ bis zu $-a_1' z^{n_1+1}$ mindestens ein Zeichenwechsel, bis $+a_2' z^{n_2+1}$ mindestens zwei, bis

*) Gauss, Werke Bd. 3; S. 67.

$(-1)^\nu a'_\nu z^{n_\nu+1}$ mindestens ν eingetreten sind, und dass die wirkliche Zahl diese Minimalzahl um ein Vielfaches von 2 übertrifft. Lautete nun in $f(z)$ das letzte Glied $(-1)^\nu b_\nu z^\varrho$, so lautet das letzte in $f(z)\cdot(z-c)$ natürlich $(-1)^{\nu+1} b_\nu c z^\varrho$, und es findet sonach von $(-1)^\nu a'_n z^{n_\nu+1}$ bis $(-1)^{\nu+1} b_\nu c z^\varrho$ noch eine ungerade Anzahl von Wechseln statt. Damit ist der ausgesprochene Hülfsatz bewiesen. —

Um hieraus den Descartes'schen Satz abzuleiten, sondern wir in dem Polynome $f(z)$ alle linearen Factoren ab, die gleich Null gesetzt negative oder imaginäre Wurzeln ergeben. Das Product dieser Factoren heisse Z; die positiven Wurzeln von $f=0$ seien z_1, z_2, $\cdots$ z_x. Dann haben nach dem Hülfssatze die Polynome

$$Z\cdot(z-z_1),\ Z\cdot(z-z_1)(z-z_2),\ \cdots\ Z\cdot(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_x)$$

mindestens einen, zwei, $\cdots$ x Zeichenwechsel mehr als Z. Dieses Polynom Z hat für den ersten und den letzten Coefficienten gleiche Vorzeichen, da ja im entgegengesetzten Falle $Z=0$ eine positive Wurzel besitzen würde. Folglich hat das vorgelegte

$$f(z)=Z\cdot(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_x)$$

$(x+2\nu)$ Zeichenwechsel, d. h. um eine gerade Anzahl mehr, als die Gleichung $f=0$ positive Wurzeln hat, w. z. b. w.

§ 200. Wir haben im § 198 die Differenzen der einzelnen aufeinanderfolgenden Exponenten von $f(z)$ betrachtet und sie daraufhin unterschieden, ob diese Differenz eine gerade oder eine ungerade Zahl war. Jetzt wollen wir die Wechsel und die Folgen in gleicher Art vertheilen, indem wir

$$\sum W=\sum W_u+\sum W_g,\quad \sum F=\sum F_u+\sum F_g$$

setzen, derart, dass zu W_u, F_u alle die Wechsel bezw. Folgen gerechnet werden, bei denen die Differenzen der zugehörigen Exponenten von z ungerade, dagegen zu W_g, F_g alle die, bei denen sie gerade sind. Es liefern folglich z. B.

$$z^{20}-z^{17},\ z^{17}-z^{11},\ z^{11}+z^{10},\ z^{10}+z^6$$

Einheiten die bezw. zu

$$W_u,\qquad W_g,\qquad F_u,\qquad F_g$$

gehören. Man erkennt sofort, dass in $f(z)$ den W_u und den F_g Zeichenfolgen, den W_g und den F_u Zeichenwechsel entsprechen müssen; und es giebt folglich der Descartes'sche Satz für die Anzahlen P und N der positiven und negativen Wurzeln von $f=0$

$$P<\sum W,\quad N<\sum W_g+\sum F_u.$$

Ferner ist ersichtlich, dass ein W_g oder ein F_g nur auftreten kann, wenn mindestens ein Glied im Polynome f fehlt. Bezeichnet man also die Anzahl aller fehlenden Glieder mit T, dann ist

$$T \geqq \sum W_g + \sum F_g.$$

Nun bilden wir $f(z)(z-c) = f^{(0)}(z)$, wobei c wie im Hülfssatze des vorigen Paragraphen eine positive Grösse sein soll, und die Anzahl der Wechsel von $f^{(0)}(z)$ nach demselben Satze um eine ungerade Zahl $(2k+1)$ grösser werden wird, als die der Wechsel von $f(z)$. Wir bezeichnen alle auf $f^{(0)}$ bezogenen Grössen durch angefügten, oberen Index 0 und haben dann

$$\sum W^{(0)} = \sum W + (2k+1),$$
$$P^{(0)} = P + 1, \quad N^{(0)} = N, \quad 2J^{(0)} = 2J.$$

Den Grad von $f^{(0)}$ können wir einmal als Summe aus Wechseln, Folgen und fehlenden Gliedern und andererseits als Summe der Anzahlen von positiven, negativen und complexen Wurzeln aufschreiben. So entsteht die Gleichung

$$P^{(0)} + N^{(0)} + 2J^{(0)} = \sum F^{(0)} + \sum W^{(0)} + T^{(0)},$$

und wenn wir hierin die einzelnen bisher gefundenen Grössen eintragen,

$$\left(\sum W + 1\right) + \left(\sum W_g^{(0)} + \sum F_u^{(0)}\right) + 2J$$
$$\geqq \sum F^{(0)} + \left(\sum W + 2k + 1\right) + \left(\sum W_g^{(0)} + \sum F_g^{(0)}\right)$$

oder vereinfacht

$$2J \geqq 2\sum F_g^{(0)} + 2k.$$

Diese von Sturm aufgestellte Formel giebt eine untere Grenze für die Anzahl der complexen Wurzeln einer Gleichung: Wenn bei beliebiger Wahl der positiven Constanten c die Coefficienten des Products $f(z)(z-c)$ an Wechseln $(2k+1)$ mehr enthalten, als die von $f(z)$, dann besitzt $f(z) = 0$ mindestens $2k$ complexe Wurzeln.

§ 201. Die im letzten Paragraphen abgeleiteten Sätze lassen mancherlei Anwendungen zu.

Bilden wir $f(z) \cdot (z-c)$, dann können wir durch passende Wahl von c zwei aufeinanderfolgende Glieder

$$(a_\varkappa - a_{\varkappa-1}c)\, z^{n-\varkappa+1}, \quad (a_{\varkappa+1} - a_\varkappa c)\, z^{n-\varkappa}$$

des Products zum Verschwinden bringen, sobald $a_{\varkappa-1} : a_\varkappa = a_\varkappa : a_{\varkappa+1}$ ist, da ja dann die reelle Grösse

$$c = \frac{a_x}{a_{x-1}} = \frac{a_{x+1}}{a_x}$$

genommen werden kann. Es hat somit (§ 199) die Gleichung $f(z)\cdot(z-c) = 0$ complexe Wurzeln, und da c reell ist, so ergiebt sich: Bilden drei aufeinanderfolgende Coefficienten einer Gleichung eine geometrische Progression, dann besitzt die Gleichung complexe Wurzeln.

Von Herrn Hermite*) stammt der Satz: Bilden vier aufeinanderfolgende Coefficienten einer Gleichung eine arithmetische Progression erster Ordnung, dann besitzt die Gleichung complexe Wurzeln.

Wenn nämlich

$$f(z) = a_0 z^n + \cdots + a_{x-1} z^{n-x+1} + a_x z^{n-x} + a_{x+1} z^{n-x-1} + a_{x+2} z^{n-x-2} + \cdots$$

gesetzt wird, dann erhält man in $f(z)(z-1)^2$ die Glieder

$$(a_{x-1} - 2a_x + a_{x+1}) z^{n-x+1},\ (a_x - 2a_{x+1} + a_{x+2}) z^{n-x};$$

und stehen nun a_{x-1}, a_x, a_{x+1}, a_{x+2} in arithmetischer Progression erster Ordnung, dann verschwinden beide Coefficienten, und es hat $f(z)(z-1)^2 = 0$, und also auch $f(z) = 0$ complexe Wurzeln nach § 199**).

Erweiterungen dieses Theorems sind naheliegend.

Achtzehnte Vorlesung.

Das Sylvester'sche Theorem. — Biehler'sche Sätze.

§ 202. Wir kommen jetzt zu einem von Sylvester gegebenen Theoreme, dessen Wirkung nach derselben Seite hin geht, wie die des Budan-Fourier'schen Theorems, und dabei im Allgemeinen bessere Grenzen für $Z(z_1, z_2)$ liefert.

Die in der letzten Vorlesung untersuchte Functionenreihe f, f', f'', $\cdots$ formen wir durch Multiplication mit positiven, vorläufig noch unbestimmten, positiven Constanten $h_0, h_1, \cdots h_n$ etwas um, indem wir

$$(1) \qquad f_\nu = h_\nu f^{(\nu)}; \qquad \frac{h_\nu}{h_{\nu+1}} = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \cdots n)$$

setzen. Dieser Functionenreihe stellen wir eine zweite zur Seite, die

*) Nouv. Ann. (1); 1. S. 385.

**) Vgl. Faure ibid. (2); 4. S. 79 und Catalan ibid. (2); 3. S. 136.

mit Hülfe anderer, auch noch unbestimmter, positiver Constanten k_1, k_2, $\cdots$ k_ν gebildet ist

(2) $$g_\nu = k_\nu f_\nu^2 - f_{\nu-1} f_{\nu+1};\quad g_0 = f^2;\quad g_n = k_n f_n^2.$$

Aus diesen Festsetzungen folgt

(3) $$f_\nu' = h_\nu f^{(\nu+1)} = \varepsilon_\nu f_{\nu+1};$$
$$g_\nu' = 2k_\nu f_\nu f_\nu' - f_{\nu-1}' f_{\nu+1} - f_{\nu-1} f_{\nu+1}'$$
$$= 2k_\nu \varepsilon_\nu f_\nu f_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu-1} f_\nu f_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1} f_{\nu-1} f_{\nu+2};$$

(4) $$g_\nu' f_\nu = (2k_\nu \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f_\nu^2 f_{\nu+1} - \varepsilon_{\nu+1} f_{\nu-1} (k_{\nu+1} f_{\nu+1}^2 - g_{\nu+1})$$
$$= f_{\nu+1} [(2k_\nu \varepsilon_\nu - \varepsilon_{\nu-1}) f_\nu^2 - \varepsilon_{\nu+1} k_{\nu+1} f_{\nu-1} f_{\nu+1}]$$
$$+ \varepsilon_{\nu+1} f_{\nu-1} g_{\nu+1}.$$

Setzt man daher fest, dass die ε und die k den Gleichungen

(5) $$\varepsilon_{\nu+1} k_\nu k_{\nu+1} - 2\varepsilon_\nu k_\nu + \varepsilon_{\nu-1} = 0$$

genügen sollen, dann geht (4) in

$$g_\nu' f_\nu = \varepsilon_{\nu+1} k_{\nu+1} g_\nu f_{\nu+1} + \varepsilon_{\nu+1} f_{\nu-1} g_{\nu+1}$$

über, und daraus folgt: (I) Ist $g_\nu = 0$, dann wird

$$\operatorname{sgn} g_\nu' = \operatorname{sgn} f_{\nu-1} f_\nu \cdot g_{\nu+1}.$$

Es möge ferner $(z-a)$ ein $\varkappa$-facher Wurzelfactor von $f_{\nu-1}$, und

$$f_{\nu-1}(z) = (z-a)^\varkappa \varphi(z), \qquad \varphi(a) \neq 0,$$

sein; das ergiebt

$$f_\nu(z) = \frac{1}{\varepsilon_{\nu-1}} f_{\nu-1}'(z) = \frac{\varkappa}{\varepsilon_{\nu-1}} (z-a)^{\varkappa-1} \varphi(z) + (z-a)^\varkappa \chi(z),$$

$$f_{\nu+1}(z) = \frac{1}{\varepsilon_\nu} f_\nu'(z) = \frac{\varkappa(\varkappa-1)}{\varepsilon_\nu \varepsilon_{\nu-1}} (z-a)^{\varkappa-2} \varphi(z) + (z-a)^{\varkappa-1} \psi(z),$$

wo $\chi(z)$ und $\psi(z)$ wie $\varphi(z)$ ganze Functionen von z sind. Setzt man diese Ausdrücke für $f_{\nu-1}$, f_ν, $f_{\nu+1}$ in (2) ein, so entsteht

(6) $$g_\nu = \frac{\varkappa}{\varepsilon_{\nu-1}^2 \varepsilon_\nu} [\varkappa k_\nu \varepsilon_\nu - (\varkappa-1)\varepsilon_{\nu-1}](z-a)^{2\varkappa-2} \varphi^2(z) + (z-a)^{2\varkappa-1} \Phi(z),$$

wo $\Phi(z)$ auch eine ganze Function bedeutet. Die Constanten ε und k unterwerfen wir nun für alle in Betracht kommenden ν und $\varkappa$ der zweiten Bedingung

(7) $$\varkappa k_\nu \varepsilon_\nu - (\varkappa-1)\varepsilon_{\nu-1} > 0.$$

Dann folgt aus (6): (II) Ist $f_{\nu-1}(a) = 0$, dann wird für hinlänglich kleine Werthe von $(z-a)$ die Function $g_\nu(z)$ positiv. Für $z = a$ kann sie verschwinden.

Aus § 70 ist bekannt, dass wenn a eine $\varkappa$-fache Wurzel von $f_\nu(z) = 0$ ist, derselbe Werth eine $(\varkappa-1)$-fache Wurzel von $f_\nu'(z) = 0$, also nach (3) auch von $f_{\nu+1}(z) = 0$ wird. Infolge dessen zeigt die

Formel (2) auch noch: (III) Ist $f_{r-1}(a) \neq 0$, dagegen $f_r(a) = 0$, dann hat für hinlänglich kleine Werthe von $(\varepsilon - a)$ die Function $g_r(\varepsilon)$ das entgegengesetzte Vorzeichen des Products $f_{r-1}(\varepsilon) \cdot f_{r+1}(\varepsilon)$.

§ 203. Wir betrachten jetzt die gleichzeitigen Aenderungen der Vorzeichen in den beiden Reihen

$$(8) \qquad \begin{matrix} f_0, & f_1, & f_2, & \cdots & f_n \\ g_0, & g_1, & g_2, & \cdots & g_n \end{matrix}$$

beim Uebergange des Argumentes ε von einem niederen Werthe ε_1 zu einem höheren ε_2. Die Bezeichnungen F und W als Folge und Wechsel von Zeichen bei zwei aufeinanderfolgenden Functionen haben dabei die frühere Bedeutung für jede der beiden Reihen. Jetzt aber ziehen wir auch das gleichzeitige Auftreten von F oder W bei entsprechenden Functionen beider Reihen in Betracht und bezeichnen es mit

FF, wenn in beiden Reihen entsprechende F
WW, „ „ „ „ „ W
FW, wenn in der oberen Reihe ein F, in der unteren ein W
WF, „ „ „ „ „ „ W, „ „ „ „ F

bei aufeinanderfolgenden Gliedern erscheinen. Diese vier Möglichkeiten mögen Folge-Folge, Wechsel-Wechsel, Folge-Wechsel und Wechsel-Folge heissen.

Wir untersuchen, was eintritt, wenn ε durch einen Werth ζ geht, für den mehrere der mittleren f_α verschwinden, z. B. $f_\varkappa$, $f_{\varkappa+1}$, $\cdots$ $f_{\varkappa+\lambda-1}$, ohne dass $f(\zeta) = 0$ wird. Da die f_α sich von den $f^{(\alpha)}$ nur durch positive Factoren unterscheiden, so können wir für die f_α direct die Tabelle aus § 196 benutzen. Für die g folgt aus (2), dass $g_{\varkappa-1}$ in dem hinreichend eng gewählten Intervalle $(\zeta - \delta \cdots \zeta + \delta)$ positiv ist; aus § 202, (III), dass $g_\varkappa$ das entgegengesetzte Zeichen von $\varepsilon f_{\varkappa+1}$ hat; und aus § 202, (II), dass $g_{\varkappa+1}$, $g_{\varkappa+2}$, $\cdots$ $g_{\varkappa+\lambda}$ positiv sind. Folglich entsteht die Tabelle, in welcher ε dieselbe Bedeutung wie in § 196 hat:

sgn:	$g_{\varkappa-1}$	$g_\varkappa$	$g_{\varkappa+1}$	$\cdots$	$g_{\varkappa+\lambda-3}$	$g_{\varkappa+\lambda-2}$	$g_{\varkappa+\lambda-1}$	$g_{\varkappa+\lambda}$
$\zeta-\delta$	+	$-\varepsilon(-1)^{\lambda-1}$	+	$\cdots$	+	+	+	+
ζ	+	0	0	$\cdots$	0	0	0	+
$\zeta+\delta$	+	$-\varepsilon$	+	$\cdots$	+	+	+	+

Die Vergleichung beider Tabellen zeigt: es giebt unter den aufgeschriebenen Functionen für

	λ gerade $\varepsilon=+1$	λ gerade $\varepsilon=-1$	λ ungerade $\varepsilon=+1$	λ ungerade $\varepsilon=-1$
$\zeta-\delta$	$1FF$	$0FF$	$0FF$	$1FF$
ζ	$1FF$	$0FF$	$1FF$	$0FF$
$\zeta+\delta$	$(\lambda-1)FF$	λFF	$(\lambda-1)FF$	λFF

und hieraus erkennt man, dass beim Uebergange von $(\zeta-\delta)$ zu $(\zeta+\delta)$ stets eine gerade Anzahl von FF gewonnen wird.

Wir wollen auch die drei entsprechenden Tabellen für die Annahme $\operatorname{sgn} f_{x+\lambda}=-1$ aufstellen.

sgn:	f_{x-1}	f_x	f_{x+1}	$\cdots$	$f_{x+\lambda-3}$	$f_{x+\lambda-2}$	$f_{x+\lambda-1}$	$f_{x+\lambda}$
$\zeta-\delta$	ε	$(-1)^{\lambda-1}$	$(-1)^{\lambda-2}$	$\cdots$	$+$	$-$	$+$	$-$
ζ	ε	0	0	$\cdots$	0	0	0	$-$
$\zeta+\delta$	ε	$-$	$-$	$\cdots$	$-$	$-$	$-$	$-$

sgn:	g_{x-1}	g_x	g_{x+1}	$\cdots$	$g_{x+\lambda-3}$	$g_{x+\lambda-2}$	$g_{x+\lambda-1}$	$g_{x+\lambda}$
$\zeta-\delta$	$+$	$\varepsilon(-1)^{\lambda-1}$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$
ζ	$+$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$+$
$\zeta+\delta$	$+$	$+\varepsilon$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$

	λ gerade $\varepsilon=+1$	λ gerade $\varepsilon=-1$	λ ungerade $\varepsilon=+1$	λ ungerade $\varepsilon=-1$
$\zeta-\delta$	$0FF$	$1FF$	$1FF$	$0FF$
ζ	$0FF$	$1FF$	$0FF$	$1FF$
$\zeta+\delta$	λFF	$(\lambda-1)FF$	λFF	$(\lambda-1)FF$

aus denen sich auch für diesen Fall der gleiche Satz ergiebt.

Wir nehmen weiter an, dass für ζ eine oder mehrere der mittleren Functionen, z. B. g_x, g_{x+1}, $\cdots$ $g_{x+\lambda-1}$ gleich Null werden. Wenn dabei gleichzeitig entsprechende Functionen f verschwinden, stehen wir auf dem Boden des eben besprochenen Falles. Wir können also alle entsprechenden Functionen f als von Null verschieden voraussetzen. Ferner sei, um die Begriffe zu fixiren, $\operatorname{sgn} f_{x+\lambda}=+1$, $\operatorname{sgn} g_{x+\lambda}=+1$ gesetzt.

Aus (2) folgt, dass wenn g_α verschwindet, $f_{\alpha-1}$ und $f_{\alpha+1}$ gleiche Vorzeichen haben. Danach sind die beiden Möglichkeiten zu beachten, dass im Intervalle $(\zeta-\delta, \cdots \zeta+\delta)$

sgn:	f_{x-1}	f_x	f_{x+1}	$\cdots$	$f_{x+\lambda-3}$	$f_{x+\lambda-2}$	$f_{x+\lambda-1}$	$f_{x+\lambda}$
A)	$+$	$+$	$+$	$\cdots$				
B)	$(-1)^{\lambda+1}$	$(-1)^{\lambda}$	$(-1)^{\lambda-1}$	$\cdots$				

wird. Für A) ergiebt sich aus § 202, (I), dass $\operatorname{sgn} g'_{x+\lambda-1} = \operatorname{sgn} f_{x+\lambda-2} f_{x+\lambda-1} g_{x+\lambda} = +1$, und sonach, da $g_{x+\lambda-1}(\xi) = 0$ ist, dass $\operatorname{sgn} g_{x+\lambda-1}(\xi-\delta) = -1$, und $\operatorname{sgn} g_{x+\lambda-1}(\xi+\delta) = +1$ wird. Auf dieselbe Art geht man bei A) und auch bei B) weiter und erhält für A) die Tabelle:

sgn:	g_{x-1}	g_x	g_{x+1}	$\cdots$	$g_{x+\lambda-3}$	$g_{x+\lambda-2}$	$g_{x+\lambda-1}$	$g_{x+\lambda}$
$\xi-\delta$	ε	$(-1)^\lambda$	$(-1)^{\lambda-1}$	$\cdots$	$-$	$+$	$-$	$+$
ξ	ε	0	0	$\cdots$	0	0	0	$+$
$\xi+\delta$	ε	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$

und für B) die Tabelle:

sgn:	g_{x-1}	g_x	g_{x+1}	$\cdots$	$g_{x+\lambda-3}$	$g_{x+\lambda-2}$	$g_{x+\lambda-1}$	$g_{x+\lambda}$
$\xi-\delta$	ε	$+$	$+$	$\cdots$	$+$	$+$	$+$	$+$
ξ	ε	0	0	$\cdots$	0	0	0	$+$
$\xi+\delta$	ε	$(-1)^\lambda$	$(-1)^{\lambda-1}$	$\cdots$	$-$	$+$	$-$	$+$

Vergleichen wir nun wieder beide Tabellen A) für die f und die g und ebenso beide Tabellen B), so ergiebt sich an vorkommenden FF' im ersten Falle:

sgn:	λ gerade $\varepsilon=+1$	λ gerade $\varepsilon=-1$	λ ungerade $\varepsilon=+1$	λ ungerade $\varepsilon=-1$
$\xi-\delta$	$1FF'$	$0FF'$	$0FF'$	$1FF'$
ξ	$1FF'$	$0FF'$	$1FF'$	$0FF'$
$\xi+\delta$	$(\lambda+1)FF'$	$\lambda FF'$	$(\lambda+1)FF'$	$\lambda FF'$

und daher eine gerade Anzahl gewonnener FF' beim Uebergange von $(\xi-\delta)$ zu $(\xi+\delta)$. Den Fall B) brauchen wir gar nicht zu untersuchen, da in der Tabelle für die f nur W vorkommen.

Für $\operatorname{sgn} f_{x+\lambda}(\xi) = -1$ tritt bei den g und im Schlussresultat keinerlei Aenderung ein. —

Wenn endlich $f_0(\xi) = 0$, $f_1(\xi) = 0$, $\cdots$ $f_{\lambda-1}(\xi) = 0$, $f_\lambda(\xi) = \varepsilon$ ist, dann wird

sgn:	f_0	f_1	f_2	$\cdots$	$f_{\lambda-3}$	$f_{\lambda-2}$	$f_{\lambda-1}$	f_λ
$\xi-\delta$	$(-1)^\lambda\varepsilon$	$(-1)^{\lambda-1}\varepsilon$	$(-1)^{\lambda-2}\varepsilon$	$\cdots$	$-\varepsilon$	$+\varepsilon$	$-\varepsilon$	ε
ξ	0	0	0	$\cdots$	0	0	0	ε
$\xi+\delta$	ε	ε	ε	$\cdots$	ε	ε	ε	ε

Hierbei folgt aus (2), dass g_0, und aus § 202, (II), dass $g_1(\zeta \pm \delta), \cdots g_\lambda(\zeta \pm \delta)$ positiv werden, und daraus, dass beim Ueberschreiten einer λ-fachen Wurzel ζ zugleich $\lambda\, FF$ gewonnen werden. Damit ist bewiesen: Die Anzahl $Z(z_1, z_2)$ der zwischen z_1 und dem grösseren z_2 liegenden Wurzeln von $f(z) = 0$ ist gleich der Anzahl der in (8) bei Substitution von z_2 gegenüber z_1 gewonnenen Folge-Folgen oder um eine gerade Anzahl geringer*).

Der Beweis hätte sich, genau wie der beim Budan-Fourier'schen Theoreme gegebene sehr durch die Annahme vereinfachen lassen, dass nicht zwei aufeinanderfolgende Glieder der f- oder der g-Reihe gleichzeitig verschwinden. Das würde auch stets dann ausreichen, wenn $f(z) = 0$ keine mehrfachen Wurzeln besitzt. Denn es lässt sich ohne Schwierigkeit nachweisen, dass durch beliebig kleine Aenderungen der Coefficienten von $f(z) = 0$ ein solches gleichzeitiges Verschwinden beseitigt werden kann, ohne dass dadurch die Natur der Wurzeln (hinsichtlich ihrer Realität) verändert würde; ausgenommen ist aber dabei der Fall mehrfacher Wurzeln, weil hier der Uebergang von reellen zu complexen Wurzeln offen steht.

§ 204. Wenn etwa an den Grenzen z_1 oder z_2 Functionen aus den Reihen (8) verschwinden, dann treten dieselben Schwierigkeiten auf, wie beim Budan'schen Criterium. Falls aber nicht $f(z_1)$, $f(z_2)$ selbst Null werden, lassen sie sich auch jetzt beseitigen. Man betrachtet zuerst das Intervall $(z_1 + \delta \cdots z_2 - \delta)$ und geht von hier aus zu $\delta = 0$. Die aufgestellten Tabellen, die gerade deshalb auch die sgn $f_\alpha(\zeta)$ enthalten, zeigen dann die Richtigkeit der folgenden Regel: Wenn bei sgn $f_{\varkappa+\lambda}(\zeta) = \eta$ alle Lücken der f_α mit dem Zeichen $(-\eta)$ gefüllt werden und alle Lücken der g_α mit dem Zeichen $+1$, dann wird beim Uebergange von $(\zeta \pm \delta)$ zu ζ die Anzahl der FF nur um eine gerade Zahl geändert. Man kann daher diese Ergänzung der verschwindenden Glieder in der f- und der g-Reihe machen und dann die Sylvester'sche Regel auch bei den Grenzen anwenden.

Es ist zu vermuthen, dass der abgeleitete Sylvester'sche Satz mindestens so genaue Grenzen geben wird, wie der Budan'sche. Denn bei diesem wird nur der Gewinn an Folgen in der Reihe der f gezählt, bei jenem aber der an Folge-Folgen in der Reihe der f und der g; dieser wird im Allgemeinen nicht ohne einen vorhergegangenen oder gleichzeitigen Gewinn einer Folge der f-Reihe eintreten.

---

*) The Oxford, Cambridge and Dublin 129—141.

§ 205. Wir gehen jetzt auf die Bedingungen

$$\varepsilon_{\nu+1}k_\nu k_{\nu+1} - 2\varepsilon_\nu k_\nu + \varepsilon_{\nu-1} = 0, \tag{5}$$

$$\varkappa\varepsilon_\nu k_\nu - (\varkappa-1)\varepsilon_{\nu-1} > 0, \tag{7}$$

denen die ε und die k unterworfen werden müssen, näher ein.

(7) braucht nur für $\varkappa = 1, 2, \cdots (n-\nu+1)$ erfüllt zu sein, da $\varkappa$ nicht grösser werden kann als der Grad von $f_{\nu-1}$. Gilt nun (7) für den höchsten Werth $\varkappa = n-\nu+1$, so folgt aus

$$\begin{aligned}&(n-\nu+1)\varepsilon_\nu k_\nu - (n-\nu)\varepsilon_{\nu-1}\\ &= \frac{n-\nu+1}{\varkappa}\left[(\varkappa\varepsilon_\nu k_\nu - (\varkappa-1)\varepsilon_{\nu-1}) - \left(1 - \frac{\varkappa}{n-\nu+1}\right)\varepsilon_{\nu-1}\right] > 0,\end{aligned} \tag{9}$$

dass dann auch alle anderen Bedingungen (7) erfüllt sind. Man darf demnach (7) durch

$$(n-\nu+1)\varepsilon_\nu k_\nu - (n-\nu)\varepsilon_{\nu-1} > 0 \tag{7^a}$$

ersetzen. Gesetzt ferner, (7^a) gelte für einen gewissen Werth von ν, dann können wir mit Hülfe von (5) folgern

$$\begin{aligned}&\varepsilon_\nu k_\nu(2n-2\nu-n+\nu+1) - (n-\nu)\varepsilon_{\nu-1} > 0,\\ &(2\varepsilon_\nu k_\nu - \varepsilon_{\nu-1})(n-\nu) - (n-\nu-1)\varepsilon_\nu k_\nu > 0,\\ &(n-\nu)\varepsilon_{\nu+1}k_{\nu+1} - (n-\nu-1)\varepsilon_\nu > 0;\end{aligned} \tag{10}$$

also gilt (7^a) dann auch für ein um eine Einheit höheres ν.

Folglich brauchen die ε und die k nur den Bedingungen

$$\varepsilon_{\nu+1}k_\nu k_{\nu+1} - 2\varepsilon_\nu k_\nu + \varepsilon_{\nu-1} = 0, \tag{5}$$

$$n\varepsilon_1 k_1 - (n-1)\varepsilon_0 > 0 \tag{7^b}$$

zu genügen. Man kann also beispielsweise die positiven Constanten ε ganz beliebig annehmen, ferner k_1 gemäss (7^b) wählen, und (5) liefert dann die Reihe der übrigen k, die freilich sämmtlich positiv sein müssen.

Die h lassen sich bei willkürlichem h_0 vermittels der Formel

$$h_\nu = \frac{h_0}{\varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\varepsilon_2\cdots\varepsilon_{\nu-1}}$$

aus den ε bestimmen, wie (1) zeigt.

Wir wollen einige Systeme für die ε, die k und die h angeben:

I) $\varepsilon_0 = \varepsilon_1 = \cdots = 1$; $k_1 = k_2 = \cdots = 1$; $h_0 = h_1 = \cdots = 1$.

II) $\varepsilon_0 = \alpha$, $\varepsilon_1 = \alpha + 1$, $\varepsilon_2 = \alpha + 2$, $\cdots$; $k_1 = k_2 = \cdots = 1$ $\quad(\alpha > 0)$

$$h_0 = 1,\ h_1 = \frac{1}{\alpha},\ h_2 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)},\ h_3 = \frac{1}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)},\ \cdots.$$

III) $\varepsilon_0 = \frac{1}{n}$, $\varepsilon_1 = \frac{1}{n+1}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{n+2}$, $\cdots$;

$$k_1 = 1,\ k_2 = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)},\ k_3 = \frac{(n-2)(n+3)}{(n-1)(n+2)},\ \cdots;$$

$$h_0 = 1,\ h_1 = n,\ h_2 = n(n+1),\ h_3 = n(n+1)(n+2),\ \cdots.$$

Falls wir alle k gleich 1 setzen, geht (5) in die Functionalgleichung

$$\varepsilon_{\nu+1} - 2\varepsilon_\nu + \varepsilon_{\nu-1} = 0$$

über, deren allgemeine Lösung sich aus den Anfangswerthen

$$\varepsilon_0 = A, \quad \varepsilon_1 = A + B$$

in der Form

IV) $$\varepsilon_\nu = A + B\nu$$

ergiebt. Nimmt man ferner A und B positiv, dann ist auch (7^b) befriedigt. Für $h_0 = 1$ entsteht

$$h_\nu = \frac{1}{A(A+B)(A+2B)\cdots(A+(\nu-1)B)}.$$

§ 206. Die Bedingungen (7) waren nöthig, damit bei $f_{\nu-1}(a) = 0$ für hinreichend kleine Werthe von $(z-a)$ die Function $g_\nu(z)$ positiv werde (§ 202, II). Wenn wir jetzt

(7^c) $$(n-\nu+1)\varepsilon_\nu k_\nu - (n-\nu)\varepsilon_{\nu-1} = 0$$

setzen, dann ist (7) zwar für $k = 1, 2, \cdots (n-\nu)$ erfüllt (vgl. (9)), aber nicht mehr für den höchsten möglichen Werth $\varkappa = n-\nu+1$. Wir wollen untersuchen, was dabei geschieht. Nach § 202 wird dieser Umstand überhaupt nur dann auftreten, wenn ein $(z-a)$ als $(n-\nu+1)$-facher Wurzelfactor in $f_{\nu-1}$ eingeht. Nun ist aber $f_{\nu-1}$ vom Grade $(n-\nu+1)$; also muss dabei

$$f_{\nu-1}(z) = \alpha \cdot (z-a)^{n-\nu+1}$$

werden, wobei α einen constanten Factor bedeutet. Daraus folgt

$$f_\nu = \frac{n-\nu+1}{\varepsilon_{\nu-1}}\alpha(z-a)^{n-\nu}, \quad f_{\nu+1} = \frac{(n-\nu+1)(n-\nu)}{\varepsilon_{\nu-1}\varepsilon_\nu}\alpha(z-a)^{n-\nu-1},$$

$$g_\nu = \frac{n-\nu+1}{\varepsilon_{\nu-1}^2\varepsilon_\nu}[(n-\nu+1)\varepsilon_\nu k_\nu - (n-\nu)\varepsilon_{\nu-1}]\alpha^2(z-a)^{2n-2\nu} \equiv 0,$$

d. h. es wird nach (7^c) die Function g_ν identisch Null. Findet weiter die entsprechende Gleichung auch für $(\nu+1)$ statt, nämlich

$$(n-\nu)\varepsilon_{\nu+1}k_{\nu+1} - (n-\nu-1)\varepsilon_\nu = 0,$$

dann verschwindet auch $g_{\nu+1}$ identisch, u. s. f.

Unsere Schlüsse gelten in diesem Falle also nicht unmittelbar. Es genügt aber, wie die Construction unserer Tabellen deutlich zeigt, an Stelle der etwa bei $g_{\varkappa+1}, \cdots$ auftretenden Nullen das Pluszeichen in die Reihen einzuführen; dann entstehen genau die obigen Schemata, und unter dieser Vorsichtsmassregel können wir demnach auch den besprochenen Grenzfall mit in die Sylvester'sche Regel einschliessen. Der bei (10) gemachte Schluss gilt auch hier, so dass aus

$$n\varepsilon_1 k_1 - (n-1)\varepsilon_0 = 0$$

das gesammte Gleichungssystem (7^c) folgt.

Der besprochene Grenzfall tritt z. B. ein, wenn wir

V) $\varepsilon_0 = 1, \quad \varepsilon_1 = \frac{n-1}{n}, \quad \varepsilon_2 = \frac{n-2}{n}, \quad \cdots; \quad k_1 = k_2 = \cdots = 1$

setzen; dabei ergiebt sich

$$h_0 = 1, \; h_1 = 1, \; h_2 = \frac{n}{n-1}, \; h_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)}, \; h_4 = \frac{n^3}{(n-1)(n-2)(n-3)}, \cdots.$$

§ 207. Genau wie wir aus dem Budan-Fourier'schen Theoreme durch Specialisirung der Grenzen auf die Werthe $-\infty$, 0, $+\infty$ das Descartes'sche Theorem abgeleitet haben, genau so können wir hier aus dem Sylvester'schen ein von Newton ausgesprochenes Theorem entnehmen. Newton hat es ohne Beweis gegeben*); seine Begründung ist lange Zeit hindurch von den Mathematikern vergeblich versucht worden, bis eben Sylvester es durch Erweiterung zu seinem Satze umformte und so bewies.

Wir wollen, um den Satz abzuleiten, $z_1 = -\infty$, $z_2 = 0$ setzen und haben also

$$(11) \qquad Z(-\infty, 0) = \sum FF(0) - \sum FF(-\infty) - 2h,$$

worin die linke Seite die Anzahl der negativen Wurzeln von $f = 0$ bezeichnet, und die Ausdrücke rechts analog den früher erklärten (§ 195) zu verstehen sind.

Für unsere Function $f(z)$ findet man

$$\lim_{z=-\infty} \frac{f(z)}{z^n} = a_0, \quad \lim_{z=-\infty} \frac{f'(z)}{z^{n-1}} = n a_0, \quad \lim_{z=-\infty} \frac{f''(z)}{z^{n-2}} = n(n-1)a_0, \; \cdots;$$

die rechten Seiten dieser Gleichungen haben sämmtlich das Zeichen von a_0; die Potenzen von z in den Nennern sind abwechselnd positiv und negativ. Demnach wird die Reihe $f_0, f_1, f_2, \cdots$ für grosse negative Werthe lediglich Wechsel darbieten, d. h. es ist in (11)

$$\sum FF(-\infty) = 0$$

zu setzen. Ferner erhält man durch Differentiation und Anwendung von (1)

$$f^{(\nu)}(0) = \nu! a_{n-\nu}; \quad f_\nu(0) = h_\nu \nu! a_{n-\nu};$$

$$g_\nu(0) = h_\nu^2 k_\nu \nu! \nu! \left[a_{n-\nu}^2 - \frac{(\nu+1)h_{\nu-1}h_{\nu+1}}{\nu \cdot h_\nu^2 k_\nu} a_{n-\nu-1} a_{n-\nu+1} \right]$$

und hier kann man den positiven Factor vor der Klammer unterdrücken. Bezeichnen wir der Kürze halber

$$(12) \qquad l_{n-\nu} = \frac{(\nu+1)h_{\nu-1}h_{\nu+1}}{\nu h_\nu^2 k_\nu} = \frac{(\nu+1)\varepsilon_{\nu-1}}{\nu \cdot \varepsilon_\nu} \cdot \frac{1}{k_\nu},$$

*) Arithmetica universalis II. Cap. II: „De forma aequationis".

so ist also $\sum FF(0)$ gleich der Zahl der Folge-Folgen in den beiden Reihen

$$(13)\quad \begin{matrix} a_0, & a_1, & a_2, & \cdots, & a_{n-1}, & a_n, \\ a_0^2, & a_1^2 - l_1 a_0 a_2, & a_2^2 - l_2 a_1 a_3, & \cdots, & a_{n-1}^2 - l_{n-1} a_{n-2} a_n, & a_n^2. \end{matrix}$$

Wir wollen diese Zahl mit φ bezeichnen. Dann ist

$$(14)\qquad Z(-\infty, 0) = \varphi - 2h.$$

Um auch für $Z(0, \infty)$ einen ähnlichen Satz zu erhalten, transformiren wir die Gleichung $f = 0$, indem wir $-z$ an Stelle von z eintragen. Dabei geht nur in der ersten Zeile von (13) eine Veränderung vor, indem alle a mit ungeradem Index das negative Zeichen erhalten, und hierbei wird jede frühere Folge in dieser Zeile durch einen Wechsel ersetzt und umgekehrt. Man erhält also jetzt soviele Folge-Folgen, als vorher Wechsel-Folgen vorhanden waren. Bezeichnet man diese Zahl mit ω, so ist

$$(14^a)\qquad Z(0, +\infty) = \omega - 2h_1.$$

Die beiden in (14) und (14ª) gegebenen Criterien bezeichnet Sylvester als vervollständigte Newton'sche Regel. Aus ihr geht die Newton'sche Regel in ihrer gewöhnlichen Form durch Addition hervor. Da nämlich jede Folge in der zweiten Zeile von (13) entweder zu φ oder zu ω eine Einheit liefert, so ist $(\varphi + \omega)$ gleich der Zahl der einfachen F in der Reihe

$$(15)\quad a_0^2, a_1^2 - l_1 a_0 a_2, a_2^2 - l_2 a_1 a_3, \cdots, a_{n-1}^2 - l_{n-1} a_{n-2} a_n, a_n^2,$$

und wir sehen: Die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ ist gleich der Anzahl der Folgen in (15) oder um eine gerade Anzahl geringer. Ist also ins Besondere auch nur eins der Glieder in (15) negativ, dann besitzt $f(z) = 0$ complexe Wurzeln. Hat $f(z) = 0$ nur reelle Wurzeln, dann sind alle Glieder der Reihe (15) positiv.

Ueber die Bildung der l ist bereits alles Nöthige gesagt. Aus den oben besprochenen Beispielen ergeben sich folgende Systeme:

I) $l_1 = \frac{n}{n-1}, \; l_2 = \frac{n-1}{n-2}, \; \cdots \; l_{n-3} = \frac{4}{3}, \; l_{n-2} = \frac{3}{2}, \; l_{n-1} = \frac{2}{1};$

II) $l_1 = \frac{n(\alpha+n-2)}{(n-1)(\alpha+n-1)}, \; l_2 = \frac{(n-1)(\alpha+n-3)}{(n-2)(\alpha+n-2)}, \; \cdots \; l_{n-2} = \frac{3(\alpha+1)}{2(\alpha+2)},$

$$l_{n-1} = \frac{2\alpha}{1(\alpha+1)};$$

III) $l_1 = \frac{3n}{2(n-1)}, \; l_2 = \frac{4(n-1)}{3(n-2)}, \; \cdots \; l_{n-2} = \frac{n \cdot 3}{(n-1) \cdot 2}, \; l_{n-1} = \frac{(n+1)2}{n \cdot 1};$

IV) $l_1 = \frac{n(A+(n-2)B)}{(n-1)(A+(n-1)B)}$, $l_2 = \frac{(n-1)(A+(n-3)B)}{(n-2)(A+(n-2)B)}$, $\cdots$

$$l_{n-2} = \frac{3(A+B)}{2(A+2B)}, \quad l_{n-1} = \frac{2A}{A+B};$$

V) $l_1 = \frac{2 \cdot n}{1(n-1)}$, $l_2 = \frac{3(n-1)}{2(n-2)}$, $\cdots$ $l_{n-2} = \frac{(n-1) \cdot 3}{(n-2) \cdot 2}$, $l_{n-1} = \frac{n \cdot 2}{(n-1)1}$.

Das letzte System stimmt mit dem von Newton angegebenen überein, so dass die Reihe (15) hierbei in die von ihm aufgestellte

$$(15^a)\ a_0^2,\ a_1^2 - \frac{2n}{1(n-1)} a_0 a_2,\ a_2^2 - \frac{3(n-1)}{2(n-2)} a_1 a_3,\ a_3^2 - \frac{4(n-2)}{3(n-3)} a_2 a_4, \cdots$$

übergeht. Aus II) erhält man für $\alpha = 1$ den Werth 1 für alle l_r und somit die besonders einfache Reihe

$$(15^b) \qquad a_0^2,\ a_1^2 - a_0 a_2,\ a_2^2 - a_1 a_3,\ a_3^2 - a_2 a_4, \cdots.$$

Dieselbe Reihe ergiebt sich aus V) für den Fall, dass mit Heraustreten von Binomialcoefficienten das Gleichungspolynom

$$f(z) = a_0 z^n + \binom{n}{1} a_1 z^{n-1} + \binom{n}{2} a_2 z^{n-2} + \binom{n}{3} a_3 z^{n-3} + \cdots$$

geschrieben wird.

§ 208. Aus (15^b) ist ersichtlich, dass, wenn $q = 1$ und

$$(16) \qquad a_1^2 - q a_0 a_2 < 0$$

ist, die Gleichung $f = 0$ complexe Wurzeln besitzt. Wir nehmen an, der gleiche Satz gälte für irgend einen festen Werth von q; bilden wir dann bei beliebigem reellen ϱ das Product

$$f(z)(z-\varrho) = a_0 z^{n+1} + (a_1 - a_0\varrho) z^n + (a_2 - a_1\varrho) z^{n-1} + \cdots,$$

so muss $(z-\varrho)f = 0$ und also auch $f = 0$ complexe Wurzeln haben, falls

$$(a_1 - a_0\varrho)^2 - q a_0 (a_2 - a_1\varrho) = \left(a_0\varrho - \frac{2-q}{2} a_1\right)^2 + \frac{4q-q^2}{4}\left(a_1^2 - \frac{4}{4-q} a_0 a_2\right)$$

negativ wird. Dies kann man aber durch $\varrho = \frac{1}{2}(2-q)\frac{a_1}{a_0}$ stets erreichen, sobald bei $q < 4$ die letzte Klammer negativ, d. h.

$$(17) \qquad a_1^2 - \frac{4}{4-q} a_0 a_2 < 0$$

ist. Gilt demnach (16) für ein $q < 4$, so gilt auch (17) als Criterium für das Vorkommen von complexen Wurzeln. Nun hatten wir $q = 1$ und finden daraus der Reihe nach $q = \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}, \cdots \frac{2\mu-2}{\mu}, \cdots$; man kann also q dem Grenzwerthe 2 beliebig nahe bringen und erkennt: Ist

(18) $$a_1^2 - 2a_0a_2 < 0,$$

dann besitzt $f(z) = 0$ complexe Wurzeln*).

Es ist naheliegend, zu fragen, ob der Werth $l_1 = 2$ das überhaupt erreichbare Maximum darstellt, und welches die Maxima der übrigen l_ν sind. Man hat

$$l_\nu = \frac{n-\nu+1}{n-\nu}\,\frac{\varepsilon_{n-\nu-1}}{\varepsilon_{n-\nu}k_{n-\nu}}; \qquad (\nu+1)\varepsilon_{n-\nu}k_{n-\nu} \geqq \nu\,\varepsilon_{n-\nu-1},$$

und wir haben gesehen, wie vermöge des Bildungsgesetzes (5) alle Bedingungen der letzten Art unter einander übereinstimmen. Um l_ν so gross als möglich zu machen, muss der Nenner so klein als möglich, d. h. $= \frac{\nu}{\nu+1}\varepsilon_{n-\nu-1}$ werden, und so ergiebt sich

$$l_1 = \frac{2}{1}\,\frac{n}{n-1}, \quad l_2 = \frac{3}{2}\,\frac{n-1}{n-2}, \quad \cdots\; l_\nu = \frac{n-\nu+1}{n-\nu}\,\frac{\nu+1}{\nu} = l_{n-\nu}, \cdots.$$

Ist irgend eine der Grössen

$$a_\nu^2 - \frac{(n-\nu+1)(\nu+1)}{(n-\nu)\nu}\,a_{\nu-1}a_{\nu+1}, \qquad (\nu = 1, 2, \cdots n-1)$$

negativ, dann besitzt die Gleichung $f = 0$ complexe Wurzeln. Wir wollen noch erwähnen, dass für $f(z) = (z-\varrho)^n$ alle diese Differenzen den Werth Null annehmen, und die Vermuthung aussprechen, dass dieser Umstand Newton zur Aufstellung seines Satzes veranlasste, der wie ja die meisten in der „Arithmetica universalis" ohne Beweis vorgetragen ist.

§ 209. Wir wollen am Schlusse dieser Vorlesung ein von Herrn Biehler gegebenes Theorem beweisen**). Setzt man

$$(x - a_1 - b_1 i)(x - a_2 - b_2 i)\cdots(x - a_n - b_n i) = U_n + iV_n,$$
$$(\operatorname{sgn} b_1 = \operatorname{sgn} b_2 = \cdots = \operatorname{sgn} b_n),$$

dann sind alle Wurzeln der Gleichung $U_n = 0$ reell, ungleich und durch die Wurzeln der Gleichung $V_n = 0$ getrennt, welche ebenfalls reell und ungleich sind.

Wir nehmen an, der Satz sei für U_n und V_n bewiesen, und zeigen daraus seine Richtigkeit für U_{n+1} und V_{n+1}. Der Einfachheit halber nehmen wir an, es seien alle b positiv. Man hat

(19) $$U_{n+1} = (x - a_{n+1})U_n + b_{n+1}V_n = x^{n+1} + \cdots,$$

(20) $$V_{n+1} = (x - a_{n+1})V_n - b_{n+1}U_n = -(b_1 + b_2 + \cdots + b_{n+1})x^n + \cdots.$$

Der Voraussetzung nach sind die Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ von $U_n = 0$

*) O. Bonnet: Nouv. Ann. (1); 4; S. 236. — Vgl. auch Colombier (ibid.) (2); 7; S. 501.

**) J. für M. 87, S. 330: „Sur une classe d'équations algébriques etc."

reell und unter einander verschieden; wir wollen annehmen, dass sie nach steigender Grösse geordnet sind. Da die $(n-1)$ Wurzeln von $V_n = 0$ zwischen den Wurzeln von $U_n = 0$ liegen, so ist

$$\operatorname{sgn} V_n(\alpha_1) = -\operatorname{sgn} V_n(\alpha_2) = +\operatorname{sgn} V_n(\alpha_3) = \cdots = (-1)^{n-1} \operatorname{sgn} V_n(\alpha_n),$$
$$\operatorname{sgn} V_n(\alpha_1) = \operatorname{sgn} V_n(-\infty) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n,$$
$$\operatorname{sgn} V_n(\alpha_1) = (-1)^n, \quad \operatorname{sgn} V_n(\alpha_2) = (-1)^{n-1}, \cdots,$$

und also folgt aus der Gleichung (19) für $x = \alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$

$$\operatorname{sgn} U_{n+1}(\alpha_1) = (-1)^n, \qquad \operatorname{sgn} U_{n+1}(\alpha_2) = (-1)^{n-1},$$
$$\operatorname{sgn} U_{n+1}(\alpha_3) = (-1)^{n-2}, \cdots \operatorname{sgn} U_{n+1}(\alpha_n) = (-1)^1.$$

Hieraus ersieht man, dass $U_{n+1} = 0$ zwischen α_1 und α_2, zwischen α_2 und α_3, $\cdots$ zwischen α_{n-1} und α_n je eine ungerade Anzahl von Wurzeln besitzt. Da weiter nach (19)

$$\operatorname{sgn} U_{n+1}(-\infty) = (-1)^{n+1}, \quad \operatorname{sgn} U_{n+1}(+\infty) = +1$$

wird, so liegt auch mindestens je eine Wurzel jenseits α_1 und α_n. Also hat $U_{n+1} = 0$ nur reelle und von einander verschiedene Wurzeln, die durch diejenigen von $U_n = 0$ getrennt werden.

Die Formeln (19), (20) zeigen, dass

$$U_{n+1} V_n - U_n V_{n+1} = (U_n^2 + V_n^2) b_{n+1} \tag{21}$$

ist. Bezeichnen wir mit $\beta_1, \beta_2, \cdots \beta_{n+1}$ die Wurzeln von $U_{n+1} = 0$, zwischen denen dem eben Bewiesenen nach die $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ liegen, dann liefert die Einsetzung der β in (21) den Beweis, dass

$$\operatorname{sgn} U_n(\beta_1) V_{n+1}(\beta_1) = \operatorname{sgn} U_n(\beta_2) V_{n+1}(\beta_2) = \cdots$$

und also wegen

$$\operatorname{sgn} U_n(\beta_1) = -\operatorname{sgn} U_n(\beta_2) = \cdots,$$

dass auch

$$\operatorname{sgn} V_{n+1}(\beta_1) = -\operatorname{sgn} V_{n+1}(\beta_2) = \cdots$$

wird, d. h. dass die n Wurzeln von $V_{n+1} = 0$ reell, von einander verschieden und in den Intervallen $(\beta_1, \cdots \beta_2)$, $(\beta_2, \cdots \beta_3)$, $\cdots$ gelegen sind.

Da die Sätze für

$$U_2 = x^2 - (a_1 + a_2) x + (a_1 a_2 - b_1 b_2),$$
$$V_2 = -(b_1 + b_2) x + (a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

richtig sind, so ist der Beweis allgemein geliefert.

Benutzt man die Gleichung (20) genau so, wie soeben (19), dann kann man zeigen, dass die Wurzeln von $V_{n+1} = 0$ durch diejenigen von $V_n = 0$ getrennt werden.

Neunzehnte Vorlesung.

Das Sturm'sche Theorem.

§ 210. Die bisher abgeleiteten, für die praktische Verwendung brauchbaren und wichtigen Sätze über die Trennung der reellen Wurzeln einer Gleichung leiden an dem theoretisch entscheidenden Mangel, dass sie nicht die Anzahl der reellen oder der positiven oder der negativen Wurzeln selbst, sondern nur obere Grenzen für die gesuchten Zahlen angeben. Von diesem Mangel ist der von J. K. F. Sturm*) gefundene Satz frei, der direct die Zahl $Z(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ableiten lehrt und dadurch die aufgestellte Frage theoretisch endgültig erledigt.

Wir wollen den Weg zu diesem Theoreme so wählen, dass wir es aus einem allgemeineren Satze herleiten.

Ist $f(\varepsilon) = 0$ die betrachtete Gleichung, so heisst die Reihe der Functionen

$$f, f_1, f_2, f_3, \cdots f_r \tag{1}$$

eine verallgemeinerte, zu f gehörige Sturm'sche Reihe, wenn sie den folgenden drei Bedingungen genügt:

I. Das letzte Glied f_r ist eine Constante, oder f_r ändert doch wenigstens im betrachteten Intervalle $(\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_2)$ sein Zeichen nicht.

II. Für ein und dasselbe Argument $\varepsilon = \xi$ verschwinden nicht zwei aufeinanderfolgende Glieder der Reihe.

III. Verschwindet für ein bestimmtes Argument ein Glied $f_\varkappa$ der Reihe, dann haben die beiden rechts und links benachbarten Glieder $f_{\varkappa-1}$ und $f_{\varkappa+1}$ für dieses Argument entgegengesetzte Vorzeichen.

Wir untersuchen die Zeichenänderungen, die in (1) vor sich gehen, wenn ε von ε_1 zu einem grösseren Argumente ε_2 übergeführt wird. Da f_r sein Zeichen nicht wechselt, so kann in der Zahl der W und der F nur dadurch eine Aenderung eintreten, dass ein mittleres, oder dass das erste f durch Null geht. — Weil für $f_\lambda(\xi) = 0$ sowohl $f_{\lambda-1}$ als $f_{\lambda+1}$ von Null verschieden sind, so kann man einen Bereich $(\xi - \delta \cdots \xi + \delta)$ abgrenzen, der so klein ist, dass in ihm $f_{\lambda-1}$ und $f_{\lambda+1}$ von Null verschieden bleiben. In diesem haben nach III. beide Functionen verschiedene Vorzeichen; wie das Vorzeichen von f_λ also auch sein möge, es werden die drei Functionen $f_{\lambda-1}$, f_λ, $f_{\lambda+1}$ sowohl

*) Férussac, Bulletin des sciences mathématiques; 1829. XI, p. 419. — Mémoires sur la résolution des équations numériques. Comptes rendus VI, 1835.

für $(\xi - \delta)$ wie für $(\xi + \delta)$ einen Wechsel und eine Folge aufweisen, und eine Aenderung in der Anzahl tritt daher nicht ein. — Wenn ferner $f(\xi) = 0$ verschwindet und durch Null geht, dann fragt es sich, ob dabei $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ vom Negativen ins Positive übertritt, oder umgekehrt. Im ersten Falle wird ein W verloren, im zweiten Falle ein W gewonnen.

Besitzt $f(z) = 0$ zwischen z_1 und z_2 als Grenzen k_1 Wurzeln, bei deren Passiren $f(z) : f_1(z)$ vom Negativen ins Positive, und k_2 Wurzeln, bei deren Passiren $f(z) : f_1(z)$ vom Positiven ins Negative übertritt, wenn z von z_1 bis $z_2 (> z_1)$ wächst, dann ist

$$k_1 - k_2 = \sum W(z_1) - \sum W(z_2), \tag{2}$$

und die rechte Seite von (2) giebt durch ihren absoluten Werth eine untere Grenze für die Anzahl der Wurzeln zwischen z_1 und z_2.

§ 211. Wir wollen ein dieses Resultat benutzendes Beispiel besprechen*). — Wenn wir zum Zwecke der Theilung eines gegebenen Winkels

$$\operatorname{tang} \alpha = a, \quad \operatorname{tang} \frac{\alpha}{m} = z$$

setzen, dann besteht die Beziehung zwischen a und z

$$a = \frac{(1+iz)^m - (1-iz)^m}{i[(1+iz)^m + (1-iz)^m]};$$

$$(1+iz)^m (1-ia) - (1-iz)^m (1+ia) = 0.$$

Die linke Seite der letzten Gleichung enthält den Factor i. Wir bezeichnen, indem wir ihn heraussetzen,

$$i U_\mu = (1+iz)^\mu (1-ia) - (1-iz)^\mu (1+ia),$$

dann ergiebt sich ohne Schwierigkeit

$$U_\mu - 2U_{\mu-1} + (1+z^2) U_{\mu-2} = 0. \tag{3}$$

Wir betrachten die Gleichung $U_m = 0$. Die Reihe der U

$$U_m, \; U_{m-1}, \; U_{m-2}, \; \cdots \; U_2, \; U_1, \; U_0$$

ist eine verallgemeinerte Sturm'sche Reihe für U_m. Denn zuerst ist $U_0 = -2a$ und folglich constant. Ferner kann wegen (3) nicht zugleich U_μ und $U_{\mu-1}$ verschwinden, weil sonst $U_{\mu-2} = 0, \cdots U_0 = 0$ sein müsste. Endlich haben für $U_{\mu-1} = 0$, wie wieder (3) zeigt, U_μ und $U_{\mu-2}$ entgegengesetzte Signa, und somit gilt (2).

Für $z = 0$ wird ein jedes $U_\mu = -2a$.

---

*) Biehler: Sur une application de la méthode de Sturm. Nouv. Ann. (2) Bd. 19, S. 76.

Für sehr grosse positive oder negative Werthe von z erhält man

$$\operatorname{sgn} i \cdot U_\mu = \operatorname{sgn} z^\mu (i^\mu - a i^{\mu+1} - (-i)^\mu + a(-i)^{\mu+1}),$$

sodass für

$$\mu \equiv 0 \pmod 4, \quad \operatorname{sgn} U_\mu = -\operatorname{sgn} 2a z^\mu,$$
$$\mu \equiv 1 \pmod 4, \quad \operatorname{sgn} U_\mu = +\operatorname{sgn} 2 z^\mu,$$
$$\mu \equiv 2 \pmod 4, \quad \operatorname{sgn} U_\mu = +\operatorname{sgn} 2a z^\mu,$$
$$\mu \equiv 3 \pmod 4, \quad \operatorname{sgn} U_\mu = -\operatorname{sgn} 2 z^\mu$$

wird. Man findet also für $a > 0$ die Zeichentabelle:

sgn	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	$\cdots$
$z = -\infty$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$\cdots$
$z = 0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$\cdots$
$z = +\infty$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$\cdots$

und erkennt aus ihr

$m = 2n$	$m = 2n+1$
$W(-\infty) - W(0) = n,$	$W(-\infty) - W(0) = n,$
$W(0) - W(\infty) = -n,$	$W(0) - W(\infty) = -(n+1).$

Für $a < 0$ ergiebt sich ebenso:

sgn	U_0	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	$\cdots$
$z = -\infty$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$\cdots$
$z = 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$\cdots$
$z = +\infty$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$\cdots$

$m = 2n$	$m = 2n+1$
$W(-\infty) - W(0) = n,$	$W(-\infty) - W(0) = n+1,$
$W(0) - W(\infty) = -n,$	$W(0) - W(\infty) = -n.$

$U_m = 0$ besitzt nur reelle Wurzeln. Ist $m = 2n$, so giebt es ebenso viele positive wie negative Wurzeln. Ist $m = (2n+1)$ und a positiv, so giebt es n negative und $(n+1)$ positive Wurzeln; ist $m = (2n+1)$ und a negativ, so giebt es $(n+1)$ negative und n positive Wurzeln.

§ 212. Die Bedingungen, durch welche (1) zu einer verallgemeinerten Sturm'schen Reihe wurde, wollen wir jetzt durch eine neue, vierte Bedingung vermehren.

IV. Geht z wachsend durch einen Wurzelwerth von $f(z) = 0$, dann gehe das Product $f(z) \cdot f_1(z)$ stets, oder wenigstens in dem Intervalle $(z_1 \cdots z_2)$ stets vom Negativen ins Positive oder stets vom Positiven ins Negative.

Die Reihe (1) heisst unter den Bedingungen I) bis IV) eine Sturm'sche Reihe. Wegen IV) geht (2) entweder in

$$(2^a) \qquad k_1 = \sum W(z_1) - \sum W(z_2)$$

über, wenn $f_0 f_1$ beständig vom Negativen durch Null ins Positive, oder in

$$(2^b) \qquad k_2 = \sum F(z_1) - \sum F(z_2),$$

wenn $f_0 f_1$ beständig vom Positiven durch Null ins Negative übertritt.

Wir wollen auch hierfür ein Beispiel behandeln, und zwar knüpfen wir an die Gleichung (14) der sechzehnten Vorlesung für $m = n = p$ an; wir betrachten also die Gleichung

$$U_n = z^n + \binom{n}{1}^2 z^{n-1} + \binom{n}{2}^2 z^{n-2} + \binom{n}{3}^2 z^{n-3} + \cdots + 1 = 0.$$

Es lässt sich nachweisen, dass für die Function U_n die Functionen

$$(1^a) \qquad U_n,\ U_{n-1},\ U_{n-2},\ \cdots\ U_2,\ U_1,\ U_0$$

eine Sturm'sche Reihe bilden. Die Eigenschaft I) folgt aus $U_0 = 1$. Die Eigenschaften II) und III) werden durch

$$n U_n - (2n-1)(z+1) U_{n-1} + (n-1)(z-1)^2 U_{n-2} = 0$$

bewiesen; diese Beziehung selbst ist leicht zu verificiren. Die Eigenschaft IV) endlich folgt aus der sofort als richtig zu erkennenden Gleichung

$$\frac{2z}{n} U_n' = U_n + (z-1) U_{n-1}.$$

Denn $U_n = 0$ hat offenbar keine positiven Wurzeln; für jede Wurzel ξ wird daher sgn U_{n-1} = sgn U_n'. Ist nun U_n' positiv, so wächst U_n und geht demnach vom Negativen durch Null zum Positiven; ist aber U_n' negativ, so geht U_n vom Positiven durch Null zum Negativen; in beiden Fällen also geht $U_n \cdot U_{n-1}$ vom Negativen zum Positiven. Deshalb ist (1^a) eine Sturm'sche Reihe für U_n, und es gilt die Formel (2^a). In dieser setzen wir $z_1 = -\infty$, und dann liefert die Sturm'sche Reihe nur Zeichenwechsel. Ferner setzen wir $z_2 = +0$, und dann ergiebt sie nur Zeichenfolgen. Es sind also n Wechsel verloren gegangen, und deshalb besitzt $U_n = 0$ lauter reelle, negative Wurzeln.

§ 213. Was wir schon früher (§ 187, Schlussbemerkung) hervorgehoben haben, hat sich auch im Beispiele des letzten Paragraphen bewährt, dass nämlich $f_1 = f'$ der Anforderung IV) entspricht und zwar derart, dass $f \cdot f'$ stets vom Negativen zum Positiven übertritt. Wir zeigen nun: Hat $f = 0$ keine vielfachen Wurzeln, dann

bilden die bei der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers von f und f' erhaltenen Functionen des Schemas

$$(4)\qquad \begin{aligned} f &= f'g_1 - f_2, \\ f' &= f_2 g_2 - f_3, \\ &\cdots\cdots \\ f_{r-1} &= f_r g_r \end{aligned}$$

eine Sturm'sche Reihe, derart dass der Verlust an Zeichenwechseln beim Uebergange von

$$f(z_1),\ f'(z_1),\ f_2(z_1),\ \cdots f_r(z_1)$$

zu

$$f(z_2),\ f'(z_2),\ f_2(z_2),\ \cdots f_r(z_2)$$

die genaue Anzahl der zwischen z_1 und $z_2\,(>z_1)$ enthaltenen Wurzeln von $f=0$ liefert. Denn erstens ist f_r eine Constante, weil f und f' keinen gemeinsamen Theiler haben, wenn $f=0$ keine vielfachen Wurzeln besitzt. Ferner können f_λ und $f_{\lambda+1}$ nicht gleichzeitig verschwinden, weil sonst infolge des Schemas auch $f_{\lambda+2},\ \cdots f_r$ Null wären. Drittens liefert $f_\lambda(\zeta)=0$ die Beziehung $f_{\lambda-1}(\zeta) = -f_{\lambda+1}(\zeta)$, so dass die benachbarten Glieder links und rechts entgegengesetzte Vorzeichen haben. Viertens geht $f\cdot f'$ stets vom Negativen durch Null zum Positiven, wenn das Argument eine Wurzel von $f=0$ passirt.

Zu diesem Theoreme sind noch mehrere Bemerkungen zu machen.

I) Jede der Functionen f_α kann mit einem constanten, positiven Factor multiplicirt oder durch einen solchen dividirt werden; denn die Wirkung des Theorems hängt einzig von den Vorzeichen der Functionen ab. Man kann die hierdurch erlangte Freiheit dazu benutzen, die vorkommenden Dividenden mit passenden Constanten zu multipliciren, um in den Quotienten und in den Resten Brüche zu vermeiden. Ebenso kann man constante, positive Factoren sämmtlicher Coefficienten eines f_α einfach unterdrücken.

II) Der Beweis macht keinen Gebrauch davon, dass f_r eine Constante ist; es reicht aus, wenn f_r zwischen den Grenzen z_1 und z_2 das Vorzeichen nicht ändert. Bietet daher im Intervalle $(z_1,\ \cdots z_2)$ schon ein früheres f_λ keinen Zeichenwechsel, so darf man mit ihm die Sturm'sche Reihe abbrechen.

III) Es kann vorkommen, dass für einen der Grenzwerthe z_1, z_2 eine oder mehrere der Functionen zu Null werden. Sind dies mittlere Glieder, dann nimmt man zunächst $z_1 \mp \delta$ statt z_1 und $z_2 \mp \delta$ statt z_2, wobei δ hinreichend klein zu wählen ist. Wir sahen, dass für $f_\alpha(z_1)=0$ sowohl $f_{\alpha-1}(z_1-\delta)$, $f_\alpha(z_1-\delta)$, $f_{\alpha+1}(z_1-\delta)$ wie

$f_{\alpha-1}(z_1+\delta)$, $f_\alpha(z_1+\delta)$, $f_{\alpha+1}(z_1+\delta)$ einen Wechsel bieten, da die äusseren Glieder ihn bereits liefern. Dasselbe findet bei $f_{\alpha-1}(z_1)$, $f_{\alpha+1}(z_1)$ statt; man braucht sonach auf das Verschwinden von $f_\alpha(z_1)$ gar keine Rücksicht beim Zählen der W zu nehmen. Gleiches gilt von der oberen Grenze z_2.

Ist das verschwindende Glied das erste, $f(z)$ selbst, dann bieten

$f(z_1-\delta)$, $f'(z_1-\delta)$ sowie $f(z_2-\delta)$, $f'(z_2-\delta)$ einen Wechsel,
$f(z_1+\delta)$, $f'(z_1+\delta)$ „ $f(z_2+\delta)$, $f'(z_2+\delta)$ eine Folge,

wie wir bewiesen haben. Es kommt also darauf an, ob wir die Grenzwerthe z_1, z_2 als Wurzeln des Intervalls mitrechnen wollen oder nicht; im ersten Falle ist bei z_1 das verschwindende $\operatorname{sgn} f(z_1)$ durch $-\operatorname{sgn} f'(z_1)$, und bei z_2 das verschwindende $\operatorname{sgn} f(z_2)$ durch $\operatorname{sgn} f'(z_2)$ zu ersetzen; im zweiten Falle muss $+\operatorname{sgn} f'(z_1)$ statt $\operatorname{sgn} f(z_1)=0$ genommen werden, und $-\operatorname{sgn} f'(z_2)$ statt $\operatorname{sgn} f(z_2)=0$.

IV) Man kann das Sturm'sche Theorem in gewisser Weise auch auf Gleichungen mit mehrfachen Wurzeln ausdehnen. Der Verlust an Wechseln giebt auch dabei die Anzahl der zwischen den Grenzen vorhandenen Wurzeln; nur wird jede vielfache Wurzel als einfache gerechnet werden. Bei dem Schema (4) wird nämlich f_r der grösste gemeinsame Theiler von f und f' und damit auch von f_2, f_3, $\cdots$ f_{r-1}. Bezeichnen wir $f:f_r=\varphi$, $f':f_r=\varphi_1$, $f_\alpha:f_r=\varphi_\alpha$, so hat $\varphi=0$ dieselben Wurzeln wie $f=0$, nur jede in der Multiplicität 1, und

$$\varphi,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \varphi_3,\ \cdots\ \varphi_r=1$$

geben eine zu φ gehörige Sturm'sche Reihe, wie sofort zu sehen ist. Die Zeichenabzählung giebt also hier das genaue Resultat. Die W und die F ändern sich aber ihrer Zahl nach nicht, wenn jede Function der Reihe mit demselben Factor f_r multiplicirt ist. Damit ist die eben ausgesprochene Bemerkung bewiesen.

§ 214. Wir wollen den Sturm'schen Satz auf einige Beispiele anwenden. Es sei

$$f=z^4+z^3-3z^2-z-4,$$

dann wird die Reihe der Functionen (4) durch

$$16f=(4z+1)f'-3f_2; \qquad f'=4z^3+3z^2-6z-1;$$
$$81f'=(36z+19)f_2-160f_3; \qquad f_2=9z^2+2z+21;$$
$$64f_2=(72z-11)f_3-1377f_4; \qquad f_3=8z+3; \quad f_4=-1$$

gegeben, und man erhält die Tabelle

sgn:	f	f'	f_2	f_3	f_4	
$z=-\infty$	+	−	+	−	−	$\sum W=3$
$z=0$	−	−	+	+	−	$\sum W=2$
$z=+\infty$	+	+	+	+	−	$\sum W=1$

aus der zu ersehen ist, dass $f=0$ eine positive, eine negative und zwei imaginäre Wurzeln besitzt. Setzt man der Reihe nach $z=-3$, -2, -1, 0, $+1$, $+2$, so folgt die Tabelle

sgn:	f	f'	f_2	f_3	f_4	
$z=-3$	+	−	+	−	−	$\sum W=3$
$z=-2$	−	−	+	−	−	$\sum W=2$
$z=-1$	−	+	+	−	−	$\sum W=2$
$z=0$	−	−	+	+	−	$\sum W=2$
$z=+1$	−	0	+	+	−	$\sum W=2$
$z=+2$	+	+	+	+	−	$\sum W=1$

welche uns zeigt, dass die negative Wurzel zwischen -3 und -2, die positive zwischen $+1$ und $+2$ liegt. Da

$$f_2=\left(3z+\tfrac{1}{3}\right)^2+\tfrac{188}{9}$$

ist, so hätte man bei f_2 die Rechnung abbrechen können (§ 213, II). Aus der Descartes'schen Regel würde folgen, dass eine positive und höchstens drei negative Wurzeln vorhanden sind. Die Newton'sche Regel giebt die Existenz von höchstens zwei reellen Wurzeln an.

§ 215. Wir wollen nun mit Hülfe des Sturm'schen Satzes allgemein die Realitätsfragen der Wurzeln bei den Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades behandeln. Für

$$f=z^2+2az+b$$

erhält man die Functionen und die Zeichentabelle:

$$\tfrac{1}{2}f'=z+a,\quad f_2=a^2-b$$

sgn:	f	f'	f_2	
$z=-\infty$	+	−	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	$\sum W=1+\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)+1}{2}$
$z=0$	$\operatorname{sgn} b$	$\operatorname{sgn} a$	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	
$z=+\infty$	+	+	$\operatorname{sgn}(a^2-b)$	$\sum W=-\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)-1}{2}$

Die Anzahl der reellen Wurzeln ist mithin

$$\left(1+\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)+1}{2}\right)+\frac{\operatorname{sgn}(a^2-b)-1}{2}=1+\operatorname{sgn}(a^2-b)$$

d. h. gleich zwei, wenn $(a^2-b)>0$, und gleich Null, wenn $(a^2-b)<0$ ist. Man erkennt ferner, dass im ersten Falle bei

$a>0 \quad b>0$ zwei negative Wurzeln
$a<0 \quad b>0$ zwei positive Wurzeln
$a<0 \quad b<0$ } eine positive und eine negative Wurzel
$a>0 \quad b<0$ }

auftreten.

§ 216. Weiter sei

$$f=z^3+3a_1z^2+3a_2z+a_3.$$

Dann ist die Functionenreihe (4)

$$\tfrac{1}{3}f'=z^2+2a_1z+a_2,$$
$$f_2=2(a_1^2-a_2)z+(a_1a_2-a_3),$$
$$f_3=-4a_1^3a_3+3a_1^2a_2^2+6a_1a_2a_3-4a_2^3-a_3^2=D,$$

und man erhält die Tabelle

sgn:	f	f'	f_2	f_3
$z=-\infty$	$-$	$+$	$\operatorname{sgn}(a_1^2-a_2)$	$\operatorname{sgn} D$
$z=0$	$\operatorname{sgn} a_3$	$\operatorname{sgn} a_2$	$\operatorname{sgn}(a_1a_2-a_3)$	$\operatorname{sgn} D$
$z=+\infty$	$+$	$+$	$\operatorname{sgn}(a_1^2-a_2)$	$\operatorname{sgn} D$

Dies giebt für

$a_1^2-a_2>0;\ D>0$			$a_1^2-a_2>0;\ D<0$	
$z=-\infty$	$-+-+$	$\sum W=3$	$-+--$	$\sum W=2$
$z=+\infty$	$++++$	$\sum W=0$	$+++-$	$\sum W=1$
$a_1^2-a_2<0;\ D>0$			$a_1^2-a_2<0;\ D<0$	
$z=-\infty$	$-+++$	$\sum W=1$	$-++-$	$\sum W=2$
$z=+\infty$	$++-+$	$\sum W=2$	$++--$	$\sum W=1$

Für $D<0$ erhält man sonach stets nur eine reelle Wurzel. Für $D>0$ und $a_1^2-a_2>0$ sind drei reelle Wurzeln vorhanden. Nach unserer Theorie ist das Eintreten des Falles $(a_1^2-a_2)<0$, $D>0$ unmöglich, da ja sonst beim Uebergange vom kleineren Werthe

$z = -\infty$ zum grösseren Werthe $z = +\infty$ ein W gewonnen werden würde. Das kann man auch leicht auf directem Wege einsehen. Es ist nämlich

$$D = 4(a_1^2 - a_2)^3 - (2a_1^3 - 3a_1a_2 + a_3)^2, \tag{5}$$

und daraus folgt, dass für $(a_1^2 - a_2) < 0$ der Werth von D nicht positiv sein kann.

Auch über die Vorzeichen der Wurzeln geben uns

$$\operatorname{sgn} a_3, \quad \operatorname{sgn} a_2, \quad \operatorname{sgn}(a_1a_2 - a_3)$$

vermöge der obigen Tabellen Auskunft. Ist zuerst $D < 0$, dann zeigt die erste Spalte der ersten Tabelle, dass die eine vorhandene Wurzel positiv, Null oder negativ wird, jenachdem $\operatorname{sgn} a_3$ negativ, Null oder positiv ist. Für positive D, also bei drei reellen Wurzeln sind die aus dem Descartes'schen Satze abgeleiteten Criterien (§ 197) einfacher als die hier auftretenden; dort zeigt sich, dass $f(z) = 0$ so viele positiven Wurzeln hat, als

$$1, \operatorname{sgn} a_1, \operatorname{sgn} a_2, \operatorname{sgn} a_3 \qquad (D > 0)$$

Wechsel aufweist; hier tritt an die Stelle dieser Reihe

$$1, \operatorname{sgn}(a_1a_2 - a_3), \operatorname{sgn} a_2, \operatorname{sgn} a_3 \qquad (D > 0).$$

Für $\operatorname{sgn} a_2 = -1$ ist die Uebereinstimmung klar, weil dabei die drei ersten Elemente stets ein W und ein F liefern; für $\operatorname{sgn} a_2 = +1$ ergiebt sie sich aus der Annahme

$$D = -4a_2(a_1^2 - a_2)^2 - (a_1a_2 - a_3)^2 + 4a_1(a_1a_2 - a_3)(a_1^2 - a_2) > 0; \tag{6}$$

denn die beiden ersten Glieder rechts sind negativ, und das dritte Glied hat (vgl. (5)) das Vorzeichen von $a_1(a_1a_2 - a_3)$; somit folgt bei $D > 0$, dass $\operatorname{sgn} a_1 = \operatorname{sgn}(a_1a_2 - a_3)$ wird. —

Gleiche Wurzeln kann $f = 0$ nur besitzen, wenn f und f' einen gemeinsamen Theiler haben und also D verschwindet. Dann fällt in den obigen Tabellen die letzte Spalte fort, und aus (5) erkennt man, dass $(a_1^2 - a_2)$ nicht negativ sein kann. Ist $(a_1^2 - a_2) = 0$, dann folgt aus (5), dass $a_1^3 = a_3$ wird, und dann haben wir drei gleiche Wurzeln. Ist $(a_1^2 - a_2) > 0$, so giebt es eine einfache und eine Doppelwurzel. In diesem Falle ist wegen (6) wieder $\operatorname{sgn}(a_1a_2 - a_3) = \operatorname{sgn} a_1$ und die Reihe

$$\operatorname{sgn} a_3, \operatorname{sgn} a_2, \operatorname{sgn} a_1$$

giebt über die Vertheilung der Wurzeln Aufschluss.

§ 217. Endlich behandeln wir auch noch die Gleichung vierten Grades in der durch Fortschaffung des Gliedes mit z^3 vereinfachten Form

$$f = z^4 + 6a_2z^2 + 4a_3z + 3a_4.$$

Es wird hierbei

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{4} f' &= z^3 + 3a_2 z + a_3,\\
f_2 &= -a_2 z^2 - a_3 z - a_4,\\
f_3 &= -(3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2) z - (a_2^2 a_3 + a_3 a_4),\\
f_4 &= 9a_2^4 a_4 - 2a_2^3 a_3^2 - 6a_2^2 a_4^2 + 6a_2 a_3^2 a_4 - a_3^4 + a_4^3\\
&= (a_4 + a_2^2)^3 - (3a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3)^2 = I^3 - J^2,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichung zur Abkürzung

$$I = a_4 + a_2^2,\quad J = 3a_2 a_4 - a_3^2 - a_2^3$$

gesetzt ist. Die Tabelle nimmt die Form an

sgn:	f	f'	f_2	f_3	f_4
$-\infty$	$+$	$-$	$-\operatorname{sgn} a_2$	$+\operatorname{sgn}(3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2)$	$\operatorname{sgn}(I^3 - J^2)$
$+\infty$	$+$	$+$	$-\operatorname{sgn} a_2$	$-\operatorname{sgn}(3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2)$	$\operatorname{sgn}(I^3 - J^2)$

Man erkennt sofort, dass, wenn $I^3 - J^2$ negativ ist, zwei reelle und zwei complexe Wurzeln vorkommen, wie auch immer die übrigen Zeichen vertheilt sind. Nur ist hier zu beachten, dass der Fall

$$(7)\qquad a_2 > 0,\ 3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2 < 0,\ I^3 - J^2 < 0$$

nicht eintreten kann, da er eine Zunahme der W bei steigendem Argumente bedingen würde. Das lässt sich leicht, auch unabhängig von der behandelten Theorie einsehen. Denn zunächst folgt sofort aus den ersten beiden Ungleichungen in (7), dass $a_4 > 0$ ist, und daraus, wegen

$$f_4 = a_4(3a_2^2 - a_4)^2 + 16a_3^2 a_2^3 + 5a_3^4 + 6a_3^2(a_2 a_4 - 3a_2^3 - a_3^2),$$

dass bei $f_4 < 0$ die Klammer des letzten Gliedes negativ sein muss. Das widerspricht aber den Festsetzungen in (7).

Ist $(I^3 - J^2)$ positiv, dann giebt es nur in dem Falle

$$(8)\qquad \operatorname{sgn} a_2 = -1,\ \operatorname{sgn}(3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2) = -1$$

vier reelle, sonst aber vier complexe Wurzeln. Schon bei den Gleichungen dritten Grades machten wir darauf aufmerksam, dass die Sturm'sche Methode zwar stets die charakteristischen Bedingungen giebt, diese aber durchaus nicht immer in der einfachsten Form liefert. So ist es auch hier: man kann die obigen Bedingungen durch die einfacheren

$$(8^a)\qquad \operatorname{sgn} a_2 = -1,\ \operatorname{sgn}(3a_2^2 - a_4) = +1 \qquad (I^3 - J^2 > 0)$$

ersetzen. Dass (8^a) aus (8) folgt, ist gemäss

$$3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2 < 0 \quad \text{d. h.} \quad a_2(3a_2^2 - a_4) < -a_3^2$$

ohne Weiteres einzusehen. Dass aber auch umgekehrt (8) aus (8^a) geschlossen werden kann, lässt sich folgendermassen zeigen.

Wir setzen der Abkürzung halber die Bezeichnung

$$v = a_2(a_4 - 3a_2^2) - a_3^2$$

in den Ausdruck für f_4 ein; dabei entsteht

$$a_2^3 f_4 = v^3 + 3(a_3^2 + a_2^3)v^2 + 3a_3^2(a_3^2 + 4a_2^3)v + a_3^2(a_3^2 + 4a_2^3)^2,$$

und wir haben nachzuweisen, dass bei negativem a_2, negativer linken Seite und positivem $(3a_2^2 - a_4)$ der Werth von v positiv sein muss. Die Sturm'sche Zeichenreihe der Gleichung dritten Grades

$$\varphi \equiv v^3 + 3(a_3^2 + a_2^3)v^2 + 3a_3^2(a_3^2 + 4a_2^3)v + a_3^2(a_3^2 + 4a_2^3)^2 = 0$$

ergiebt, für unsere Zwecke in Tabellenform geschrieben,

sgn:	φ	φ_1	φ_2	φ_3
$-\infty$	$-$	$+$	$+$	$-\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$
0	$+$	$\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$	$\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$	$-\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$
$+\infty$	$+$	$+$	$+$	$-\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$

Aus ihr geht hervor, dass bei beliebigem positiven oder negativen Werthe von $\operatorname{sgn}(a_3^2 + 4a_2^3)$ die Gleichung $\varphi = 0$ stets eine und nur eine negative Wurzel hat. Diese ist kleiner als $-a_3^2$, denn für $v = -a_3^2$ erhält man schon, wie auch für $v = 0$, etwas Positives, nämlich

$$\varphi(a_3^2) = -a_3^4 a_2^3 + 16a_3^2 a_2^6 \qquad (a_2 < 0).$$

Es kann also für negative v die Function $\varphi = a_2^3 f_4$ zwar auch negativ werden, aber dabei ist

$$v < -a_3^2, \qquad -a_2(3a_2^2 - a_4) - a_3^2 < -a_3^2,$$
$$a_2(3a_2^2 - a_4) > 0, \qquad 3a_3^2 - a_4 < 0$$

und diese letzte Ungleichung widerspricht der zweiten Voraussetzung in (8ᵃ). Soll dies vermieden werden, dann muss man bei negativem φ

$$v = a_2(a_4 - 3a_2^2) - a_3^2 > 0$$
$$3a_2^3 - a_2 a_4 + a_3^2 < 0$$

wählen, was mit (7) übereinstimmt.

§ 218. Von diesen Beispielen gehen wir wieder zu allgemeinen Betrachtungen über.

In der sechsten Vorlesung hatten wir bei der Theorie des grössten gemeinsamen Theilers das Schema aufgestellt

$$(4)\quad \begin{aligned} f &= f_1 g_1 - f_2, & [f] &= n, \quad \cdots \quad [f_\lambda] = n - n_\lambda, \cdots \\ f_1 &= f_2 g_2 - f_3, & [g_1] &= n_1, \quad \cdots \quad [g_\lambda] = n_\lambda - n_{\lambda-1}, \cdots \\ &\cdots\cdots & & (0 \leqq n_1 < n_2 < \cdots < n_r) \\ f_{r-2} &= f_{r-1} g_{r-1} - f_r, \\ f_{r-1} &= f_r g_r. \end{aligned}$$

Daraus fanden wir (§ 62, § 64)

$$(9) \qquad f_\lambda = f_1\psi_{\lambda-1} - f\varphi_{\lambda-1}, \qquad [\psi_\lambda] = n_\lambda,\ [\varphi_\lambda] = n_\lambda - n_1,$$

$$(10) \qquad \psi_{\lambda+1} = \psi_\lambda g_{\lambda+1} - \psi_{\lambda-1}, \qquad \varphi_{\lambda+1} = \varphi_\lambda g_{\lambda+1} - \varphi_{\lambda-1}.$$

Hier, bei der Aufstellung der Sturm'schen Reihen, können wir f von vielfachen Factoren befreit und ohne gemeinsamen Theiler mit $f' = f_1$ denken. Dann wird $n_r = n$ und f_r eine Constante.

Durch $\psi_{\lambda-1}$ ist $\varphi_{\lambda-1}$ und f_λ auf rationalem Wege eindeutig bestimmt; denn $\varphi_{\lambda-1}$ ist der Quotient und f_λ der Rest bei der Division von $f_1\psi_{\lambda-1}$ durch f. Nach § 74 haben f_λ und $\psi_{\lambda-1}$ keinen gemeinsamen Theiler; folglich haben auch f und $\psi_{\lambda-1}$ keinen solchen.

Wenn nun, in seine n linearen Factoren aufgelöst,

$$(11) \qquad f(z) = (z-a)(z-b)\cdots(z-q)(z-t)$$

ist, und man setzt in den aus (9) folgenden Bruch

$$(12) \qquad \frac{f_\lambda(z)}{\psi_{\lambda-1}(z)} = f_1(z) - f(z)\frac{\varphi_{\lambda-1}(z)}{\psi_{\lambda-1}(z)}$$

für z sämmtliche n Werthe $a, b, \cdots q, t$ ein, die der Annahme nach von einander und von den Wurzeln der Gleichung $\psi_{\lambda-1} = 0$ verschieden sind, dann entsteht die Gleichungsreihe

$$(13) \qquad \frac{f_\lambda(a)}{\psi_{\lambda-1}(a)} = f_1(a),\ \frac{f_\lambda(b)}{\psi_{\lambda-1}(b)} = f_1(b),\ \cdots\ \frac{f_\lambda(t)}{\psi_{\lambda-1}(t)} = f_1(t).$$

Bestimmen wir daher durch die Cauchy'sche Interpolationsformel (§ 42) einen Bruch

$$\frac{\chi(z)}{\psi_{\lambda-1}(z)}; \qquad [\psi_{\lambda-1}] = n_{\lambda-1},\ [\chi(z)] = n - 1 - n_{\lambda-1},$$

der den n Bedingungen

$$\frac{\chi(a)}{\psi_{\lambda-1}(a)} = f_1(a),\ \frac{\chi(b)}{\psi_{\lambda-1}(b)} = f_1(b),\ \cdots\ \frac{\chi(t)}{\psi_{\lambda-1}(t)} = f_1(t)$$

genügt, so erkennen wir aus (13), dass es einen solchen Bruch wirklich giebt, und da der Nenner durch die Cauchy'sche Formel eindeutig bestimmt ist, und $\psi_{\lambda-1}$ mit f_λ keinen gemeinsamen Theiler besitzt, dass sich der Grad des Zählers $\chi(z)$ auf

$$n - n_\lambda = (n - 1 - n_{\lambda-1}) - ((n_\lambda - n_{\lambda-1}) - 1)$$

d. h. um $(n_\lambda - n_{\lambda-1}) - 1$ Einheiten der Forderung gegenüber reducirt. Wir wenden nun die Formel wirklich an. Es stehe in der Reihe

$$(14) \qquad a, b, \cdots e, g, h, i, j, \cdots k, l, \cdots p, q, t$$

die Wurzel h an der $(n_{\lambda-1}+1)^{\text{ten}}$ Stelle; dann wird, von einem con-

stanten Factor abgesehen, $\chi(z) = f_\lambda(z)$ gleich der symmetrischen Function

$$(15)\quad Sf_1(a)f_1(b)\cdots f_1(h)\,\frac{(z-i)\cdots(z-g)\,(z-t)}{[(a-i)\cdots(a-t)]\cdots[(h-i)\cdots(h-t)]};$$

und in gleicher Weise ist, von demselben constanten Factor abgesehen, $\psi_{\lambda-1}$ gleich der Function

$$(15^a)\quad Sf_1(a)f_1(b)\cdots f_1(g)\,\frac{(a-z)\,(b-z)\cdots(g-z)}{[(a-h)\cdots(a-t)]\cdots[(g-h)\cdots(g-t)]}.$$

§ 219. Macht man, wie es oben geschehen ist, die Voraussetzung $f_1 = f'$, dann vereinfachen sich die Ausdrücke (15), (15^a) noch wesentlich. Man hat nämlich

$$\begin{aligned}
f'(a) &= [(a-b)\cdots(a-h)]\cdot[(a-i)\cdots(a-t)],\\
f'(b) &= [(b-a)\cdots(b-h)]\cdot[(b-i)\cdots(b-t)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f'(h) &= [(h-a)\cdots(h-g)]\cdot[(h-i)\cdots(h-t)],
\end{aligned}$$

und daher folgt, was in (15) und (15^a) einzutragen ist,

$$\begin{aligned}
f'(a)f'(b)\cdots f'(h) &= (-1)^\tau[(a-b)^2(a-c)^2\cdots(g-h)^2]\cdot\\
&\quad\cdot[(a-i)\cdots(a-t)]\cdots[(h-i)\cdots(h-t)],\\
f'(a)f'(b)\cdots f'(g) &= (-1)^\sigma[(a-b)^2(a-c)^2\cdots(e-g)^2]\cdot\\
&\quad\cdot[(a-h)\cdots(a-t)]\cdots[(g-h)\cdots(g-t)],
\end{aligned}$$

$$\tau = \tfrac{1}{2}n_{\lambda-1}(n_{\lambda-1}+1),\quad \sigma = \tfrac{1}{2}n_{\lambda-1}(n_{\lambda-1}-1).$$

Berücksichtigt man das Vorzeichen des Zählers in (15^a), dann entstehen, wenn man den noch unbekannten constanten Factor mit $\frac{1}{\omega_\lambda}$ bezeichnet, die vereinfachten Darstellungen

$$(16)\quad \begin{aligned}
f_\lambda(z) &= \frac{1}{\omega_\lambda}S[(a-b)^2\cdots(g-h)^2](z-i)\cdots(z-t),\\
\psi_{\lambda-1}(z) &= \frac{1}{\omega_\lambda}S[(a-b)^2\cdots(e-g)^2](z-a)\cdots(z-h).
\end{aligned}$$

Es wurde schon vorher erwähnt, dass f_λ sich auf den Grad $(n-n_\lambda)$ reducirt, so dass auf der rechten Seite der ersten Gleichung in (16) die ersten $(n_\lambda - n_{\lambda-1}) - 1$ Coefficienten bei der Entwickelung nach fallenden Potenzen von z verschwinden.

Zu der Berechnung von ω_λ benutzen wir den Satz aus § 66, demzufolge der höchste Coefficient in allen $f_\lambda \cdot \psi_\lambda$ gleich 1 zu setzen ist. Wenn in der Reihe (14) die Wurzel l an der n_λ^{ten} Stelle steht, dann ist der Coefficient von z^{n-n_λ} für

$$(a-b)^2\cdots(g-h)^2(z-i)\cdots(z-t)$$

gleich

$$(a-b)^2\cdots(g-h)^2 S'(i\cdot j\cdots k\cdot l)\cdot(-1)^{n_\lambda-n_{\lambda-1}-1},$$

wobei S' sich auf alle Permutationen der Wurzeln $i, j, \cdots q, t$ bezieht; und daher ist in f_λ der höchste Coefficient, nämlich auch der Coefficient von z^{n-n_λ} gleich

$$\frac{1}{\omega_\lambda}(-1)^{n_\lambda-n_{\lambda-1}-1} S[(a-b)^2\cdots(g-h)^2\cdot(i\cdot j\cdots k\cdot l)],$$

$$(i, j, \cdots k, l \text{ sind } (n_\lambda - n_{\lambda-1}-1) \text{ Wurzeln}).$$

Bezeichnen wir also

$$(17)\quad \begin{aligned} p_{\lambda-1} &= S[(a-b)^2\cdots(e-g)^2];\quad (a, \cdots g \text{ sind } n_{\lambda-1} \text{ Wurzeln}),\\ q_\lambda &= (-1)^{n_\lambda-n_{\lambda-1}-1} S[(a-b)^2\cdots(g-h)^2\cdot(i\cdot j\cdots k\cdot l)];\\ &(a, \cdots h \text{ sind } (n_{\lambda-1}+1) \text{ Wurzeln};\ a, \cdots l \text{ sind } n_\lambda \text{ Wurzeln}), \end{aligned}$$

dann werden die Entwickelungen von f_λ, $\psi_{\lambda-1}$ und ψ_λ beginnen:

$$f_\lambda(z) = \frac{1}{\omega_\lambda}(q_\lambda z^{n-n_\lambda}+\cdots);$$

$$\psi_{\lambda-1} = \frac{1}{\omega_\lambda}(p_{\lambda-1}z^{n_\lambda-1}+\cdots),\quad \psi_\lambda = \frac{1}{\omega_{\lambda+1}}(p_\lambda z^{n_\lambda}+\cdots),$$

und der höchste Coefficient von $f_\lambda(z)\psi_\lambda(z)$ ergiebt nach § 66 die Gleichungen

$$1 = \frac{p_\lambda q_\lambda}{\omega_\lambda \omega_{\lambda+1}};\quad \omega_\lambda\omega_{\lambda+1} = p_\lambda q_\lambda.$$

Der Ausdruck (16) liefert für $f_1(z) = f'(z)$ den Werth $\omega_1 = 1$. Demnach wird schliesslich die Reihe der Factoren ω_λ

$$(18)\quad \begin{aligned} &\omega_1 = 1,\quad \omega_2 = p_1q_1,\quad \omega_3 = \frac{p_2q_2}{p_1q_1},\quad \omega_4 = \frac{(p_1q_1)(p_3q_3)}{(p_2q_2)},\\ &\omega_5 = \frac{(p_2q_2)(p_4q_4)}{(p_1q_1)(p_3q_3)},\quad \omega_6 = \frac{(p_1q_1)(p_3q_3)(p_5q_5)}{(p_2q_2)(p_4q_4)},\ \cdots. \end{aligned}$$

Man erkennt leicht, dass $p_1 = n$, $q_1 = n$, und also

$$\omega_2 = n^2$$

wird.

§ 220. In dem sogenannten regulären Falle, in welchem jede Differenz

$$n_\lambda - n_{\lambda-1} = 1,$$

d. h. jedes g_λ vom ersten Grade wird, verschwinden in (17) bei q_λ die Factoren

$$(-1)^{n_\lambda-n_{\lambda-1}-1} \quad \text{und} \quad (i\cdot j\cdots k\cdot l)$$

und man erhält $p_\lambda = q_\lambda$. Dadurch ergeben sich die Formeln

$$f = (z-a)(z-b)\cdots(z-t),$$
$$f' = S(z-b)(z-c)\cdots(z-t),$$

(19)
$$f_2 = \frac{1}{\omega_2} S(a-b)^2(z-c)\cdots(z-t),$$
$$f_3 = \frac{1}{\omega_3} S(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(z-d)\cdots(z-t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n = \frac{1}{\omega_n}(a-b)^2(a-c)^2\cdots(a-t)^2(b-c)^2\cdots(q-t)^2,$$

(20)
$$\omega_2 = p_1^2,\quad \omega_3 = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2,\quad \omega_4 = \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right)^2,\quad \omega_5 = \left(\frac{p_2 p_4}{p_1 p_3}\right)^2,\quad \cdots$$

(21)
$$p_1 = n,\quad p_2 = S(a-b)^2,\quad p_3 = S(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2,\quad \cdots;$$

sie stammen von Sylvester, der sie im Jahre 1839 im „Philosophical Magazine“ veröffentlichte; Sturm gab den ersten Beweis im Jahre 1842 im 7ten Bande des „Journal de Mathématiques pures et appliquées“ *).

§ 221. Die Functionen p sind symmetrische, ganze Functionen der Wurzeln von $f(z) = 0$ und folglich durch die Coefficienten von f als rationale, ganze Functionen darstellbar. Wir wollen die Ausdrücke der p durch die Potenzsummen $s_0 = n$, $s_1 = S(z_1)$, $s_2 = S(z_1^2)$, $\cdots$ ableiten.

Zunächst geht nach bekannten Formeln sofort

$$p_\lambda = S[(a-b)^2\cdots(g-h)^2]$$

in die Function der Wurzeln

$$p_\lambda = S\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & b & \cdots & h \\ a^2 & b^2 & \cdots & h^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a^{\lambda-1} & b^{\lambda-1} & \cdots & h^{\lambda-1} \end{vmatrix}^2$$ (die Zahl der Wurzeln $a, b, \cdots h$ ist λ)

über. Derselbe Ausdruck entsteht bei der Composition der Determinanten des defectiven Systems

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a & b & \cdots & q & t \\ a^2 & b^2 & \cdots & q^2 & t^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{\lambda-1} & b^{\lambda-1} & \cdots & q^{\lambda-1} & t^{\lambda-1} \end{array} \Bigg| \begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{\lambda-1} \\ 1 & b & b^2 & \cdots & b^{\lambda-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & q & q^2 & \cdots & q^{\lambda-1} \\ 1 & t & t^2 & \cdots & t^{\lambda-1} \end{array},$$

und somit ist p_λ in der Form einer Determinante

*) Vgl. auch: Sylvester, On a theory of the sy
Philosophical Transactions of the Royal Society of L

$$(22) \qquad p_\lambda = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\lambda-1} \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\lambda \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_{\lambda-1} & s_\lambda & \cdots & s_{2\lambda-2} \end{vmatrix}$$

darstellbar. Es bleibt noch übrig, diese Determinanten (22) mit den Elementen s in solche mit den Elementen c, welche die Coefficienten der Gleichung

$$z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

bilden, umzuwandeln. Die Methode hierzu haben wir bereits in § 121 so ausführlich dargelegt, dass es genügt, das Resultat anzugeben. Es entsteht dabei (vgl. § 141 und § 161)

$$(22^a) \qquad p_\lambda = (-1)^{\frac{\lambda(\lambda-1)}{2}} \begin{vmatrix} 1 & c_1 & c_2 & \cdots \\ 0 & 1 & c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ n & (n-1)c_1 & (n-2)c_2 & \cdots \\ 0 & n & (n-1)c_1 & \cdots \\ 0 & 0 & n & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\}(\lambda-1 \text{ Zeilen}) \\ \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\end{matrix}}\right\}(\lambda \text{ Zeilen}). \end{matrix}$$

§ 222. Sind die Coefficienten der Gleichung $f = 0$ reell, dann werden die p rationale Grössen, und gemäss (20) die ω stets positiv. Bei der Anwendung des Sturm'schen Satzes auf die Reihe (19) kann man daher alle Coefficienten ω unterdrücken.

Handelt es sich um die Frage, wieviel reelle Wurzeln eine Gleichung besitzt, dann sind die Grenzen z_1 und z_2 gleich $-\infty$ und $+\infty$ zu nehmen, so dass für die Feststellung der Vorzeichen nur die höchsten Coefficienten der Functionen f in Frage kommen. Diese bilden, wie aus (19) nach Unterdrückung der ω sich ergiebt, die Reihe

$$1, p_1, p_2, p_3, \cdots p_n,$$

und somit hängt die Entscheidung von den Vorzeichen der Reihen

(I) $\quad (-1)^n, p_1(-1)^{n-1}, p_2(-1)^{n-2}, p_3(-1)^{n-3}, \cdots p_n;$

(II) $\quad 1, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad \cdots p_n$

ab. Jedem Wechsel in (II) entspricht eine Folge in (I), jeder Folge in (II) ein Wechsel in (I). Bezeichnen wir mit $\sum W$ und $\sum F$ die Anzahlen der Wechsel und der Folgen in (II), so dass

$$\sum F + \sum W = n$$

ist, dann giebt $\sum F$ die Anzahl der Wechsel in (I) an, und

$$\sum F - \sum W = \varrho$$

den Verlust der Wechsel beim Uebergange von $z = -\infty$ zu $z = +\infty$, d. h. die Gesammtzahl der reellen Wurzeln. Durch Subtraction der letzten von der vorletzten Gleichung ergiebt sich

$$2\sum W = n - \varrho$$

als Anzahl der complexen Wurzeln, d. h.: Die Anzahl der Paare conjugirt complexer Wurzeln von $f(z) = 0$ ist im regulären Falle gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in

$$1, p_1, p_2, \cdots p_\lambda, \cdots p_n,$$

wobei

$$p_\lambda = S[(z_1 - z_2)^2 \cdots (z_{\lambda-1} - z_\lambda)^2] = |s_{\mu+\nu}| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots \lambda - 1)$$

bedeutet*). $f(z) = 0$ hat dann und nur dann lauter reelle Wurzeln, wenn die Reihe der p lediglich positive Glieder besitzt. Mehr als $\frac{1}{2}n$ Zeichenwechsel können in der Reihe der p nicht auftreten. Die Formel (22ª) giebt die Darstellung der p_λ als explicite Functionen der Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$.

§ 223. Wir wollen den Sturm'schen Satz noch durch andere Betrachtungen herleiten, welche geeignet sind, über seine Natur tiefergehende Aufklärungen zu geben**).

Wenn der Bruch $f_1(z) : f(z)$ bei stetig wachsendem z mit Zeichenänderung durch ∞ geht, so kann dieser Wechsel vom Negativen zum Positiven oder im umgekehrten Sinne stattfinden. Wir geben durch die ganze, positive Zahl l an, wie oft das Erste auf der Strecke $(z_1, \cdots z_2)$ stattfindet, und durch die ganze, positive Zahl l', wie oft auf der gleichen Strecke das Zweite eintritt; die Differenz

$$E = l - l'$$

nennen wir den zu $f_1 : f$ gehörigen Excess für $(z_1, \cdots z_2)$. Der Einfachheit halber wollen wir dabei voraussetzen, dass f und f_1 nicht an denselben Punkten des Intervalls verschwinden.

Es ist klar, dass der Excess von $cf_1(z) : f(z)$ sich von dem Excesse des Bruches $f_1(z) : f(z)$ nur durch den Factor $\operatorname{sgn} c$ unterscheidet, so dass insbesondere der Excess von $(-f_1(z)) : f(z)$ gleich dem negativen Werthe desjenigen von $f_1(z) : f(z)$ wird.

---

*) Vgl. Sylvester, l. c.; Borchardt, Werke S. 17—30; Cayley, J. d. M. p. e. a. 1846; Bd. 11; S. 297.

**) Moigno, Note sur la détermination etc. Journ. d. M. p. e. a. 5. S. 75ff.

Wir wollen die Beziehungen zwischen den Excessen

$$E \text{ von } \frac{f_1(z)}{f(z)}, \text{ und } E' \text{ von } \frac{f(z)}{f_1(z)} \qquad (z_1, \cdots z_2)$$

untersuchen. Wechselt $f_1 : f$ innerhalb $(z_1 \cdots z_2)$ sein Zeichen, so verschwindet dabei entweder f_1 oder f, d. h. entweder E oder E' markirt eine positive oder negative Einheit. $E + E'$ giebt daher an, wieviel Male häufiger $f_1 : f$ auf der Strecke $(z_1 \cdots z_2)$ bei einer Zeichenänderung vom Negativen ins Positive, als vom Positiven ins Negative übertritt.

Haben die beiden Grenzwerthe des betrachteten Bruches, nämlich $\frac{f_1(z_1)}{f(z_1)}$, $\frac{f_1(z_2)}{f(z_2)}$ dasselbe Zeichen, so ist dieser eben erwähnte Ueberschuss gleich Null; ist der erste der Brüche negativ und der zweite positiv, so wird der Ueberschuss $= +1$; ist dagegen der erste positiv und der zweite negativ, so wird der Ueberschuss $= -1$. Man hat daher die Formel

(23)
$$E + E' = \varepsilon$$
$$\Big(\varepsilon = 0, \quad \text{wenn} \quad \operatorname{sgn} \frac{f_1(z_1)}{f(z_1)} \cdot \frac{f_1(z_2)}{f(z_2)} = 1;$$
$$\varepsilon = +1, \text{ wenn } \operatorname{sgn} \frac{f_1(z_1)}{f(z_1)} = -1, \quad \operatorname{sgn} \frac{f_1(z_2)}{f(z_2)} = +1;$$
$$\varepsilon = -1, \text{ wenn } \operatorname{sgn} \frac{f_1(z_1)}{f(z_1)} = +1, \quad \operatorname{sgn} \frac{f_1(z_2)}{f(z_2)} = -1\Big).$$

§ 224. Nun nehmen wir an, dass f_1 von geringerem Grade sei, als f und bilden wie gewöhnlich, nach dem Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers,

(24)
$$f = f_1 g_1 - f_2, \quad f_1 = f_2 g_2 - f_3, \quad \cdots \quad f_{r-1} = f_r g_r;$$

ferner bezeichnen wir die Excesse der einzelnen Brüche

$$\frac{f_1(z)}{f(z)}, \quad \frac{f_2(z)}{f_1(z)}, \quad \frac{f_3(z)}{f_2(z)}, \quad \cdots \quad \frac{f_r(z)}{f_{r-1}(z)} \qquad (\text{für } (z_1 \cdots z_2))$$

der Reihe nach mit

$$E, \quad E_1, \quad E_2, \quad \cdots \quad E_{r-1},$$

die zur Reihe der reciproken Brüche gehörigen Excesse mit

$$E', \quad E_1', \quad E_2', \quad \cdots \quad E_{r-1}',$$

und die gemäss (23) definirten, zu dem Zähler und Nenner der Brüche gehörigen ε mit

$$\varepsilon, \quad \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \cdots \quad \varepsilon_{r-1}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{f_\lambda}{f_{\lambda+1}} = g_{\lambda+1} - \frac{f_{\lambda+2}}{f_{\lambda+1}}$$

ersieht man, dass E'_λ, d. h. der Excess von $\frac{f_\lambda}{f_{\lambda+1}}$, gleich dem negativen Excesse von $\frac{f_{\lambda+2}}{f_{\lambda+1}}$ also $= -E_{\lambda+1}$ ist.

Daraus ergiebt sich dann

$$E_\lambda = -E'_\lambda + \varepsilon_\lambda = \varepsilon_\lambda + E_{\lambda+1},$$

und wenn man diese Gleichungen für $\lambda = 0, 1, \cdots r-2$ summirt,

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{r-2} + E_{r-1}.$$

Weiter folgt aus $E_{r-1} + E'_{r-1} = \varepsilon_{r-1}$, da E'_{r-1} sich auf die ganze Function $\frac{f_{r-1}}{f_r}$ bezieht und deshalb den Werth 0 hat, dass $E'_{r-1} = \varepsilon_{r-1}$ wird; und so erlangt man die Formel

$$E = \varepsilon + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_{r-2} + \varepsilon_{r-1}.$$

Wenn nun bei den beiden Ausdrücken

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(z_1), \quad \operatorname{sgn} f_\lambda(z_1)$$

und

$$\operatorname{sgn} f_{\lambda-1}(z_2), \quad \operatorname{sgn} f_\lambda(z_2)$$

gleichzeitig eine Folge oder gleichzeitig ein Wechsel eintritt, so ist nach der Formel (23) $\varepsilon_{\lambda-1} = 0$; wird in der zweiten Zeile gegen die erste ein Wechsel gewonnen oder verloren, so ist $\varepsilon_{\lambda-1} = -1$ oder $= +1$. Daher ist E gleich dem Ueberschusse der Zeichenwechsel in der Reihe

$$\operatorname{sgn} f(z_1), \quad \operatorname{sgn} f_1(z_1), \quad \cdots \quad \operatorname{sgn} f_r(z_1)$$

gegen die in der Reihe

$$\operatorname{sgn} f(z_2), \quad \operatorname{sgn} f_1(z_2), \quad \cdots \quad \operatorname{sgn} f_r(z_2),$$

d. h. es ist der Excess

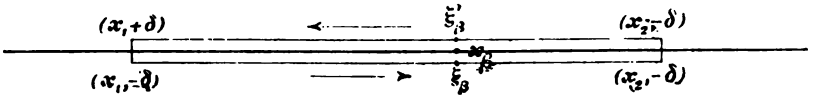
$$E = \sum W(z_1) - \sum W(z_2).$$

Benutzt man jetzt den früher bewiesenen Satz, dass $f' : f$ beim Passiren einer Wurzel der Gleichung $f = 0$ von beliebiger Multiplicität stets vom Negativen ins Positive übertritt und setzt man voraus, dass f und f' keinen gemeinsamen Theiler haben, so fällt bei der Annahme $f_1 = f'$ die Zahl l' in $E = (l - l')$ ganz fort, und l wird die Anzahl der zwischen z_1 und z_2 liegenden Wurzeln von $f = 0$, d. h. wir gelangen wieder zu der, den Sturm'schen Satz darstellenden Formel

$$(26^a) \qquad Z(z_1, z_2) = \sum W(z_1) - \sum W(z_2).$$

§ 225. Der hier benutzte Begriff des Excesses wurde bereits im § 31 eingeführt und verwerthet. Wir fanden (§ 32) den Cauchy'schen Satz: Durchläuft z eine einfache geschlossene Curve C, auf welcher kein Wurzelpunkt von $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ liegt, derart, dass das Innere stets zur Linken bleibt, und geht dabei der Quotient $\frac{v}{u}$ bei einem vollständigen Umlaufe m' mal vom Positiven durch ∞ zum Negativen und m mal vom Negativen durch ∞ zum Positiven über, dann giebt die Differenz $(m' - m)$ die doppelte Anzahl der innerhalb C gelegenen Wurzeln, jede in ihrer gehörigen Multiplicität gezählt. (Die Richtigkeit der leichten Umformung dieses Satzes gegen den in § 32 ausgesprochenen ist sofort einzusehen.)

Man wird nun infolge der übereinstimmenden Benutzung des Excesses in beiden Fällen zu der Vermuthung getrieben, der Sturm'sche Satz lasse sich durch Vermittelung von (26ª) als Corollar des Cauchy'schen Theorems auffassen. Dies ist, wie wir jetzt zeigen wollen, auch wirklich der Fall. Die Gleichung $f(z) = 0$ soll hierbei keine vielfachen Wurzeln besitzen.



Wir wählen die Curve C als Rechteck mit den Ecken $(x_1, -\delta)$, $(x_2, -\delta)$, $(x_2, +\delta)$, $(x_1, +\delta)$, wobei δ positiv und beliebig klein, jedenfalls so klein angenommen wird, dass innerhalb des Rechtecks nur reelle Wurzeln von $f = 0$ liegen. Ferner soll weder x_1 noch x_2 ein Wurzelpunkt von $f = 0$ sein. Wollen wir auf dieses C den Cauchy'schen Satz anwenden, so ist

$$f(x+iy) = u + iv = \left(f(x) - \tfrac{1}{2}y^2 f''(x) + \cdots\right) + iy\left(f'(x) - \tfrac{1}{6}y^2 f'''(x) + \cdots\right)$$

zu setzen. Tragen wir hier $y = \delta$ ein und ziehen nur Werthe von δ in Betracht, die hinlänglich klein sind, dann kann man bei der Feststellung der Differenz $(m' - m)$ statt des Bruches

$$\frac{v(x, \delta)}{u(x, \delta)} \quad \text{den Bruch} \quad \frac{\delta f'(x)}{f(x)} \tag{27}$$

einsetzen. Denn zuerst stimmen überall da, wo weder f noch f' verschwindet, die Zeichen beider Brüche überein. Verschwindet ferner $f'(x)$ in x_β, dann können wir eine hinlänglich kleine Strecke $(x_\alpha \cdots x_\beta \cdots x_\gamma)$ festlegen, innerhalb deren $f(x)$ nicht Null wird, und

in deren Endpunkten beide Brüche (27) jedesmal in den Zeichen übereinstimmen. Ein Beitrag zu $(m' - m)$ wird weder vom einen noch vom andern Bruche geliefert, und deshalb ist eine solche Strecke einflusslos. Wenn endlich $f(x)$ in x_β verschwindet, dann können wir eine hinlänglich kleine Strecke $(x_\alpha \cdots x_\beta \cdots x_\gamma)$ festlegen, innerhalb deren $f'(x)$ nicht Null wird, und in deren Endpunkten beide Brüche (27) jedesmal in den Zeichen übereinstimmen. Der zweite Bruch ändert dabei, den Werth ∞ passirend, sein Vorzeichen einmal und liefert deshalb eine positive oder eine negative Einheit als Beitrag zu dem Werthe $(m' - m)$. Der erste Bruch könnte auf der gleichen Strecke, den Werth ∞ passirend, zwar mehrfach sein Vorzeichen ändern und somit mehrere Einheiten als Beitrag zu $(m' - m)$ liefern; da aber die Zeichen der Brüche (27) an den Intervallgrenzen jedesmal übereinstimmen, so stimmt die Summe dieser Einheiten mit der vom zweiten der Brüche gelieferten überein, und beide geben deshalb auch hier denselben Beitrag zu dem Gesammtwerthe von $(m' - m)$.

Nach dem Cauchy'schen Theoreme sind jetzt also die Werthe von $\frac{\delta f'(x)}{f(x)}$ auf den vier geradlinigen Strecken

$$[(x_1, -\delta) \cdots (x_2, -\delta)], \quad [(x_2, -\delta) \cdots (x_2, +\delta)],$$
$$[(x_2, +\delta) \cdots (x_1, +\delta)], \quad [(x_1, +\delta) \cdots (x_1, -\delta)]$$

zu verfolgen. Für beide rechts stehenden Strecken erhalten wir bei constantem x und veränderlichem δ den Beitrag Null zu $(m' - m)$, da $f(x)$ in einer beliebig kleinen aber endlichen Umgebung von $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ nicht verschwindet. Wir wollen nun einen Punkt x_β betrachten, für den $f(x_\beta) = 0$ wird, etwa derart, dass $f(x)$ bei wachsenden x vom Negativen zum Positiven übergeht. Dann wird, da δ positiv ist,

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{\delta f'(x)}{f(x)} \text{ bei wachsendem } x \\ +\frac{\delta f'(x)}{f(x)} \text{ bei abnehmendem } x \end{array}\right\} \text{vom Positiven durch } \infty \text{ zum Negativen}$$

gehen. Folglich liefern bei der vorgeschriebenen Umlaufsrichtung um C die Punkte ξ_β und ξ'_β (vgl. die Figur) denselben Beitrag zum Werthe von $(m' - m)$. Also jedesmal, wenn bei wachsendem x zwischen x_1 und x_2

$\frac{f'(x)}{f(x)}$ vom $\begin{matrix}\text{Negativen}\\ \text{Positiven}\end{matrix}$ zum $\begin{matrix}\text{Positiven}\\ \text{Negativen}\end{matrix}$ geht, bekommt $\frac{m' - m}{2}$ eine $\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}$

Einheit als Zuwachs. Deshalb ist $\frac{1}{2}(m' - m)$ gleich dem Excesse von $\frac{f'(x)}{f(x)}$ für die Strecke $(x_1 \cdots x_2)$, und es wird

$$\frac{1}{2}(m' - m) = E = W(x_1) - W(x_2).$$

Dies giebt den Sturm'schen Satz als Corollar des Cauchy'schen.

§ 226. Wir wollen andererseits den Begriff des Excesses dazu benutzen, den Ausspruch des Cauchy'schen Satzes umzuformen.

Gesetzt, es sei möglich $u(x, y)$ und $v(x, y)$ als rationale, gebrochene Functionen einer einzigen neuen Veränderlichen t etwa in der Form

$$u(x, y) = \frac{\varphi(t)}{\chi(t)}, \qquad v(x, y) = \frac{\varphi_1(t)}{\chi(t)}$$

darzustellen, derart, dass bei einem vollen Umlaufe von z um C von irgend einem bestimmten Ausgangspunkte ab die Variable t von t_1 bis t_2 läuft. Dann wird jedesmal, wenn $v : u$ vom Positiven (Negativen) durch Unendlich zum Negativen (Positiven) übertritt, für $\varphi_1 : \varphi$ dasselbe geschehen. Demnach ist $(m' - m)$ gleich dem negativen Excesse von $\varphi_1(t) : \varphi(t)$ auf der Strecke $(t_1 \cdots t_2)$. Das Entsprechende gilt, wenn C in eine endliche Anzahl von Theilen so zerlegt werden kann, dass für einen jeden die gemachten Voraussetzungen über die Darstellung von u und v gelten.

Ist nun in dem Bruche $\frac{\varphi_1(t)}{\varphi(t)}$ der Grad von φ_1 nicht grösser als der von φ, dann können wir, wie oben gezeigt wurde, die Reihe des Euklid'schen Schemas

$$\varphi(t), \quad \varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \varphi_3(t), \cdots$$

zur Herstellung des Excesses direct benutzen.

Ist dagegen $[\varphi_1] > [\varphi]$, dann wenden wir die Formel (23) an, dividiren φ_1 durch φ u. s. w. und haben wegen

$$E + E' = \varepsilon, \quad E = -E' + \varepsilon$$

zum positiven Excesse von $\frac{\varphi}{\varphi_1}$ noch den Werth von ε zu addiren.

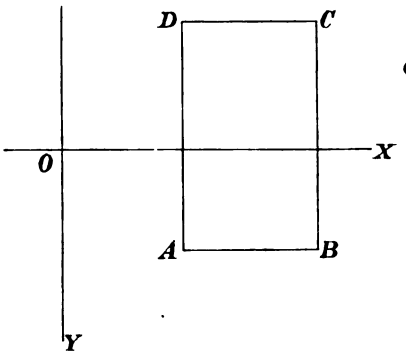
Wir wollen diese Regel auf zwei Beispiele anwenden.

Ist C ein Kreis vom Radius R mit dem Centrum (x_0, y_0), dann können wir

$$x = x_0 + R\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad y = y_0 + R\frac{2t}{1 + t^2}$$

setzen und, um die ganze Peripherie in positivem Sinne zu durchlaufen, t von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen lassen. —

Ist C ein Rechteck mit den Ecken



$$A = (x_1, y_1),\quad B = (x_2, y_1),$$
$$C = (x_2, y_2),\quad D = (x_1, y_2),$$

dann kann man für die Seite

AB setzen $x = x_1 + (x_2 - x_1)t$,
$y = y_1$;

BC „ $x = x_2$,
$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$;

CD „ $x = x_2 + (x_1 - x_2)t$,
$y = y_2$;

DA „ $x = x_1$,
$y = y_2 + (y_1 - y_2)t$

und jedesmal t von 0 bis 1 gehen lassen. —

§ 227. Zum Schlusse wollen wir noch das folgende Darboux'sche Theorem*) beweisen, welches bei den Realitätsuntersuchungen der Wurzeln nach dem Sturm'schen Satze mitunter Erleichterungen gewährt.

Wenn eine der Functionen

$$f, f_1, f_2, \cdots f_x, \cdots f_r \tag{1}$$

der Sturm'schen Reihe von f, etwa f_x, eine Gleichung

$$f_x(z) = 0$$

mit p complexen Wurzeln liefert, dann hat $f(z) = 0$ mindestens p complexe Wurzeln.

Wir wollen die zu (1) gehörige Differenz der Zeichenwechsel

$$\sum Z(-\infty) - \sum Z(+\infty) = \Delta$$

setzen; Δ ist dann die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$.

Die Reihe

$$f_x, f_{x-1}, \cdots f_r \tag{1a}$$

ist eine verallgemeinerte Sturm'sche Reihe, da sie den Bedingungen I), II), III) aus § 210 genügt. Setzt man daher für sie

$$\sum Z(-\infty) - \sum Z(+\infty) = \Delta',$$

dann ist Δ' höchstens gleich der Anzahl μ der reellen Wurzeln von $f_x(z) = 0$. Offenbar ist, weil in den ersten $(x + 1)$ Functionen nicht mehr als x Wechsel verloren gehen können,

$$\Delta \leqq \Delta' + x,$$

und also erhält man

*) Nouv. Ann. (2) Bd. 7. S. 137.

$$\Delta' \leqq \mu,$$
$$\Delta \leqq \varkappa + \mu,$$
$$n - \Delta \geqq n - \varkappa - \mu.$$

Nun ist $(n - \Delta)$ gleich der Anzahl $2J$ der complexen Wurzeln von $f(s) = 0$; andererseits ist $(n - \varkappa)$ höchstens gleich dem Grade von $f_\varkappa$, und also $(n - \varkappa) - \mu$ höchstens gleich der Anzahl p der complexen Wurzeln von $f_\varkappa(s) = 0$; somit folgt die behauptete Beziehung durch die Ungleichung

$$2J \geqq p.$$

Zwanzigste Vorlesung.

Das Hermite'sche Theorem.

§ 228. Von Herrn Ch. Hermite stammt eine andere Behandlung derselben Frage, welche sich auf die Eigenschaften der quadratischen Formen gründet*).

Wir nehmen als Unbestimmte einer quadratischen Form die n Grössen $u_0, u_1, \cdots u_{n-1}$ an und setzen

$$(1) \quad \varphi(u, t) = \sum_{\lambda=1}^{n} \chi(z_\lambda, t)\,[\varpi_0(z_\lambda)u_0 + \varpi_1(z_\lambda)u_1 + \cdots + \varpi_{n-1}(z_\lambda)u_{n-1}]^2.$$

Ist es nicht nöthig, die u hervorzuheben, so schreiben wir $\varphi(t)$ statt $\varphi(u, t)$. Hier soll ϖ_α eine mit reellen Coefficienten versehene ganze Function

$$\varpi_\alpha(s) = c_{\alpha 0} + c_{\alpha 1}s + c_{\alpha 2}s^2 + \cdots + c_{\alpha, n-1}s^{n-1}$$

bedeuten, und $\varpi_0, \varpi_1, \cdots \varpi_{n-1}$ sollen von einander linear unabhängig sein, so dass also $|\,c_{\lambda\mu}\,|$ von Null verschieden ist; χ soll eine mit reellen Coefficienten versehene rationale Function von s und t sein; t bedeutet einen willkürlichen Parameter; $z_1, z_2, \cdots z_n$ sind die n Wurzeln der Gleichung

$$(2) \qquad f(z) = 0,$$

die wir von einander verschieden voraussetzen. Wir schreiben (1) auch in der Form, bei der die Bedeutung der Z_λ klar ist,

$$(3) \qquad \varphi = \sum_{1}^{n} \chi(z_\lambda, t)\, Z_\lambda^2 = \sum_{\alpha,\beta=0}^{n-1} u_\alpha u_\beta \sum_{\lambda=1}^{n} \chi(z_\lambda, t)\, \varpi_\alpha(z_\lambda)\, \varpi_\beta(z_\lambda).$$

---

*) C. R. 1853, 14. Febr.; Bd. 36; S. 294.

Um den Rang dieser quadratischen Form festzustellen (§ 166) untersuchen wir die Reihe der Determinanten

$$\Delta_k = \left| \sum_{\lambda=1}^{n} \chi(z_\lambda, t)\, \varpi_\alpha(z_\lambda)\, \varpi_\beta(z_\lambda) \right| \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, \cdots k-1)$$

für $k = n,\ n-1, \cdots$, um zu erfahren, welches die erste nicht verschwindende Determinante dieser Reihe sein wird, da ja dies für den Rang entscheidend ist. Aus der Composition der Systeme

$$\begin{array}{l|l} \chi(z_1, t)\,\varpi_0(z_1), \quad \cdots \chi(z_n, t)\,\varpi_0(z_n) & \varpi_0(z_1), \cdots \varpi_{k-1}(z_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \varpi_0(z_2), \cdots \varpi_{k-1}(z_2) \\ \chi(z_1, t)\,\varpi_{k-1}(z_1), \cdots \chi(z_n, t)\,\varpi_{k-1}(z_n) & \cdots\cdots\cdots \\ & \varpi_0(z_n), \cdots \varpi_{k-1}(z_n) \end{array}$$

folgt nach bekannten, schon früher von uns benutzten Sätzen

$$\begin{aligned} \Delta_k(t) &= S \left| \begin{array}{l|l} \chi(z_1, t)\,\varpi_0(z_1), \quad \cdots \chi(z_k, t)\,\varpi_0(z_k) & \varpi_0(z_1), \cdots \varpi_{k-1}(z_1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \chi(z_1, t)\,\varpi_{k-1}(z_1), \cdots \chi(z_k, t)\,\varpi_{k-1}(z_k) & \varpi_0(z_k), \cdots \varpi_{k-1}(z_k) \end{array} \right| \\ &= S(\chi(z_1, t) \cdots \chi(z_k, t)) \left| \begin{array}{l} \varpi_0(z_1), \cdots \varpi_{k-1}(z_1) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varpi_0(z_k), \cdots \varpi_{k-1}(z_k) \end{array} \right|^2, \end{aligned} \tag{4}$$

wobei das Zeichen S wie gewöhnlich so zu deuten ist, dass diejenige symmetrische Function gebildet werden soll, von welcher ein Summand durch die auf S folgende Function gegeben ist. Hier zeigt also S eine Summe an, erstreckt über alle Combinationen von k Wurzeln, die aus $z_1, z_2, \cdots z_n$ gebildet werden können, während die Indices der ϖ fest bleiben. Für $k = n$ ist (vgl. Baltzer, Determ. § 10; 3, II) eine Umformung von (4) möglich:

$$\Delta_n(t) = (\chi(z_1, t) \cdots \chi(z_n, t)) \prod (z_\alpha - z_\beta)^2 \,|\, c_{\lambda\mu} \,|^2$$
$$\left(\begin{matrix} \alpha, \beta = 1, 2, \cdots n \\ \alpha > \beta \\ \lambda, \mu = 0, 1, \cdots n-1 \end{matrix} \right).$$

Der zweite Factor auf der rechten Seite ist bis auf sein Vorzeichen gleich der Discriminante von (2). Da wir die Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ als von einander verschieden angenommen haben; da $\chi(z, t)$ nicht identisch verschwindet, und da auch $| c_{\lambda\mu} |$ von Null verschieden ist, so verschwindet $\Delta_n(t)$ nicht identisch. Es ist demnach (1) vom Range n, und φ kann deshalb nicht als Summe von weniger als

n Quadraten dargestellt werden. Die in § 172 abgeleiteten Resultate ergeben für den sogenannten regulären Fall die Formel

$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{\Delta_1} X_1^2 + \frac{1}{\Delta_1 \Delta_2} X_2^2 + \cdots + \frac{1}{\Delta_{n-1} \Delta_n} X_n^2.$$

§ 229. An zweiter Stelle untersuchen wir die Signatur von φ. Jeder der Summanden in (1), der zu einer reellen Wurzel z_α von (2) gehört, ist selbst reell, und sein Zeichen ist sgn $\chi(z_\alpha, t)$. Wenn dagegen etwa z_1 complex, und z_2 die conjugirt complexe Wurzel ist, dann können wir

$$\chi(z_1, t) = A + Bi, \quad Z_1 = P + Qi,$$
$$\chi(z_2, t) = A - Bi, \quad Z_2 = P - Qi$$

setzen, und dadurch geht das Aggregat der beiden ersten Quadrate $\chi(z_1, t) Z_1^2 + \chi(z_2, t) Z_2^2$ in die Form

$$(A + Bi)(P + Qi)^2 + (A - Bi)(P - Qi)^2$$
$$= 2A(P^2 - Q^2) - 4BPQ$$

über. Ist $A = 0$, dann wird dies zu

$$= 2B(P - Q)^2 - 2B(P + Q)^2;$$

ist $A \neq 0$, dann erhalten wir

$$= 2A\left(P - \frac{P}{A} Q\right)^2 - 2AQ^2\left(1 + \frac{B^2}{A^2}\right);$$

also erscheint in jedem Falle ein Aggregat von zwei Quadraten mit entgegengesetzten Vorzeichen. Die durchgeführte Aenderung entspringt einer reellen Transformation der Variablen; denn wenn man

$$\varpi_\alpha(z_1) = h_\alpha + ik_\alpha, \quad \varpi_\alpha(z_2) = h_\alpha - ik_\alpha$$

setzt, erhält man für die statt z_1 und z_2 eintretenden Variablen P und Q

$$P + iQ = \sum h_\alpha u_\alpha + i \sum k_\alpha u_\alpha, \quad P - iQ = \sum h_\alpha u_\alpha - i \sum k_\alpha u_\alpha,$$
$$P = \sum h_\alpha u_\alpha, \quad Q = \sum k_\alpha u_\alpha.$$

Da die Signatur einer quadratischen Form gegenüber allen reellen Transformationen invariant ist, und da, wie wir eben sahen, Paare complexer Wurzeln nichts zur Signatur, die wir mit $S(t)$ bezeichnen wollen, beitragen, so folgt: Die Signatur $S(t)$ von (1) ist gleich

$$\sum_\varrho \text{sgn } \chi(z_\varrho, t),$$

wobei die Summe nur über alle reellen Wurzeln von (2) zu erstrecken ist. Es folgt sofort weiter: Verwandelt man (1) durch irgend welche reelle Transformation in ein Aggregat

von Quadraten, so ist die Anzahl der vorkommenden positiven Glieder gleich der Summe aus der Anzahl der Paare complexer Wurzeln und der Anzahl derjenigen reellen Wurzeln von (2), für welche

$$\operatorname{sgn} \chi(\varepsilon_\alpha, t) = +1$$

ist. Diese Zahl wollen wir durch $P(t)$ bezeichnen. Setzt man nun für t zwei Werthe t_1 und t_2 $(> t_1)$ ein, so giebt die Differenz

$$P(t_1) - P(t_2)$$

den Ueberschuss der Anzahl der Wurzeln, für die $\operatorname{sgn} \chi(\varepsilon_\alpha, t_1) = 1$ ist, über die Anzahl derjenigen, für die $\operatorname{sgn} \chi(\varepsilon_\alpha', t_2) = 1$ ist.

In dem regulären Falle ist die Anzahl der positiven Glieder gleich derjenigen von

$$\Delta_1(t), \quad \Delta_1(t)\Delta_2(t), \quad \cdots \quad \Delta_{n-1}(t)\Delta_n(t)$$

d. h. gleich der Anzahl der Zeichenfolgen von

$$1, \quad \Delta_1(t), \quad \Delta_2(t), \quad \Delta_3(t), \quad \cdots \quad \Delta_n(t). \tag{6}$$

Bezeichnen wir die zu dieser Reihe gehörigen Anzahlen an Folgen und Wechseln wie früher mit

$$\sum F(t) \quad \text{und} \quad \sum W(t),$$

dann wird

$$P(t_1) - P(t_2) = \sum F(t_1) - \sum F(t_2) = \sum W(t_2) - \sum W(t_1). \tag{7}$$

Für die folgenden Untersuchungen wollen wir, um den Ausdruck der Sätze zu vereinfachen, die eben bereits gebrauchten Bezeichnungen durchgehends beibehalten.

Ist $\varphi(t)$ in ein Aggregat von Quadraten verwandelt, so bezeichnet also $P(t)$ die Anzahl der darin vorkommenden positiven, und $N(t)$ die Anzahl der darin vorkommenden negativen Glieder, $S(t)$ die Signatur der Form; es wird daher

$$S(t) = P(t) - N(t), \quad n = P(t) + N(t).$$

Wir wollen ferner die Bezeichnungen $P(t)$, $N(t)$, $S(t)$ auch auf Reihen von positiven und negativen Gliedern anwenden, welche von t abhängig sind.

§ 230. In der Gestalt (1) ist die Hermite'sche quadratische Form durch die Wurzeln von (2) bestimmt. Bei der Anwendung handelt es sich somit zunächst darum, sie durch die Coefficienten auszudrücken. Dazu kann uns der Cauchy'sche Satz dienen, welchen wir am Schlusse der neunten Vorlesung, § 106, abgeleitet haben. Nach

ihm ist $\varphi(t)$ gleich dem Coefficienten von ξ^{-1} in der Entwickelung des Bruches

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\chi(\xi, t)\Big[\sum_{\lambda=0}^{n-1}\varpi_\lambda(\xi)u_\lambda\Big]^2$$

nach fallenden Potenzen von ξ. Zur Herstellung der nöthigen Form reicht eine einzige Division aus; hat man die Form erlangt, dann ist noch ihre Verwandlung in ein Aggregat von Quadraten vorzunehmen.

§ 231. Unter besonderen Annahmen über die Functionen ϖ kann die Bestimmung der Grössen Δ_k noch weiter gefördert werden.

Benutzt man für die ϖ die specielle Form

$$\varpi_\alpha(z) = c_{\alpha 0} + c_{\alpha 1}z + \cdots + c_{\alpha,\alpha-1}z^{\alpha-1} + z^\alpha,$$

dann wird die Determinante $|c_{\lambda\mu}|$ $(\lambda, \mu = 0, 1, \cdots k-1)$ gleich 1, und es geht (vgl. Baltzer l. c.) die Formel (4) in

$$(8)\quad \Delta_k(t) = S\Big[(\chi(z_1, t)\cdots\chi(z_k, t))\prod(z_\alpha - z_\beta)^2\Big] \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta = 1, 2, \cdots k\\ \alpha > \beta\end{pmatrix}$$

über. Dass hier die oben geforderte lineare Unabhängigkeit der Functionen ϖ gewahrt ist, leuchtet von selbst ein. —

Nimmt man ferner

$$\varpi_\lambda(z) = \varpi^\lambda(z),$$

wo $\varpi(z)$ eine ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, dann geht Δ_k in

$$(9)\quad \Delta_k(t) = S\Big[(\chi(z_1, t)\cdots\chi(z_k, t))\prod(\varpi(z_\alpha) - \varpi(z_\beta))^2\Big] \quad \begin{pmatrix}\alpha, \beta = 1, 2, \cdots k\\ \alpha > \beta\end{pmatrix}$$

über. Damit auch hier der Rang von φ gleich n sei, muss man voraussetzen, dass alle Werthe

$$\varpi(z_1),\quad \varpi(z_2),\quad \cdots\quad \varpi(z_n)$$

untereinander verschieden bleiben. —

Unter den beiden betrachteten Specialfällen steht die Annahme

$$\varpi_\lambda(z) = z^\lambda.$$

Hier erhält man für Δ_k wieder den Werth (8).

§ 232. Wir wollen nun auch für $\chi(z, t)$ besondere Annahmen machen. Zuerst sei χ von t unabhängig $= \chi(z)$. Dann ist, wenn man in den Bezeichnungen aus § 229 das jetzt unnöthige Argument t weglässt,

$$P = \frac{1}{2}(n + S)$$

gleich der Anzahl der complexen Wurzelpaare von $f(z) = 0$ vermehrt

um die Anzahl derjenigen reellen Wurzeln der Gleichung, welche χ positiv machen; andrerseits wird

$$N = \tfrac{1}{2}(n - S)$$

gleich der Anzahl der complexen Wurzelpaare von $f(z) = 0$ vermehrt um die Anzahl derjenigen reellen Wurzeln der Gleichung, welche χ negativ machen.

Ist $\chi = 1$, so kommt keine Wurzel der letzten Art vor, und N giebt in diesem Falle die Anzahl der complexen Wurzelpaare, P dieselbe Anzahl vermehrt um die Anzahl der reellen Wurzeln, und also $S = P - N$ die Anzahl der reellen Wurzeln. Wir wollen hiervon eine Anwendung auf die Form

$$(10) \qquad \varphi_1 = \sum_{\lambda=1}^{n} (u_0 + z_\lambda u_1 + z_\lambda^2 u_2 + \cdots + z_\lambda^{n-1} u_{n-1})^2$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha+\beta} u_\alpha u_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

machen. Dabei erhält man das einfache Resultat

$$\Delta_\lambda = |\, s_{\mu+\nu} \,| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots \lambda - 1),$$

und somit geht die Reihe (6) in dieselbe über, die wir in der vorigen Vorlesung § 222 gefunden haben. Hier stellt sich aber sogleich noch eine Erweiterung ein, sobald wir, wie bei (9), für ϖ_λ die Potenz $\varpi^\lambda(z)$ einsetzen und ferner entsprechend der Bezeichnung s_λ

$$S(\varpi^\lambda(z_\alpha)) = S_\lambda$$

setzen. Denn dann können wir in die Reihe (6) eintragen

$$\Delta_\lambda = |\, S_{\mu+\nu} \,| \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots \lambda - 1). \; —$$

Ist $\chi = z$, dann ist P gleich der Anzahl der complexen Wurzelpaare vermehrt um die Anzahl der positiven Wurzeln, N gleich der Anzahl der complexen Wurzelpaare vermehrt um die Anzahl der negativen Wurzeln, und also S gleich der Differenz aus der Anzahl der reellen positiven und der reellen negativen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$. Das hierzu gehörige

$$(11) \qquad \varphi_2 = \sum_{\lambda=1}^{n} z_\lambda (u_0 + z_\lambda u_1 + z_\lambda^2 u_2 + \cdots + z_\lambda^{n-1} u_{n-1})^2$$
$$= \sum_{\alpha,\beta} s_{\alpha+\beta+1} u_\alpha u_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n)$$

liefert für die Reihe (6) die Werthe

$$\Delta_\lambda = |\, s_{\mu+\nu} \,| \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \cdots \lambda).$$

Setzt man allgemein für χ eine Potenz z^α, so erkennt man leicht als Erweiterung der beiden vorhergehenden Theoreme das nachstehende:

Die Signatur S der Reihe

$$1, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \cdots \quad \Delta_n,$$

wobei

$$\Delta_\lambda = |\, s_{\mu+\nu} \,| \qquad (\mu, \nu = \alpha, \alpha+1, \cdots \alpha+\lambda-1)$$

ist, giebt die Summe oder die Differenz aus der Anzahl der reellen positiven und der reellen negativen Wurzeln von $f(z) = 0$ an, je nachdem α eine gerade oder eine ungerade positive Zahl bedeutet.

§ 233. Wir bleiben noch bei der Voraussetzung, dass χ von t unabhängig sei und setzen jetzt

$$\chi(z) = f'(z) \cdot f_1(z);$$

dann liefern alle diejenigen reellen Wurzeln z_α einen positiven Beitrag zur Signatur, für welche $f'(z_\alpha) f_1(z_\alpha)$ positiv ist, und alle diejenigen einen negativen Beitrag zu S, für welche dasselbe Product negativ ist. Im ersten Falle wächst, wenn jener Wurzelwerth bei zunehmendem z passirt wird, die Function $f(z)$ aus dem Negativen ins Positive, falls $f_1(z_\alpha)$ positiv ist, und also geht $f_1(z) f(z)$ dabei auch vom Negativen ins Positive; und dasselbe findet offenbar statt, wenn $f_1(z_\alpha)$ negativ ist. Im zweiten Falle geht $f_1(z) f(z)$ aus dem Positiven ins Negative bei zunehmenden z über. Die Signatur der Form zeigt daher jetzt an, wie viel häufiger bei wachsendem z das Product $f_1(z) f(z)$ aus dem Negativen ins Positive übergeht, als umgekehrt aus dem Positiven ins Negative.

Diesem Resultate können wir eine hübsche geometrische Deutung geben. Wir betrachten eine Bildebene mit den rechtwinkligen Coordinaten x und y und zeichnen auf ihr die beiden parabolischen Curven

$$y - f(z) = 0, \quad y - f_1(z) = 0.$$

Jede Senkrechte $x = x_0$ auf der x-Axe schneidet jede der Curven einmal und nur einmal, und das Zeichen

$$\operatorname{sgn}(y - f(x_0)) \quad \text{bezw.} \quad \operatorname{sgn}(y - f_1(x_0))$$

wird oberhalb des Schnittpunktes positiv, unterhalb desselben negativ. Daher wird für alle endlichen x bei hinreichend grossen $|\, y \,|$

$$\operatorname{sgn}(y - f(x))\,(y - f_1(x)) \tag{12}$$

positiv, indem beide Factoren positiv oder beide negativ werden; und dasselbe Symbol (12) wird nur für diejenigen Punkte einer Senkrechten auf der x-Axe negativ werden, welche zwischen den beiden Curven liegen. Dies findet also für alle Punkte derjenigen endlichen Ebenentheile statt, die gänzlich von den beiden Curven eingeschlossen sind, und also „innere Theile" bilden; und wir können zu dem

Inneren auch etwaige sich ins Unendliche erstreckende Ebenentheile rechnen, für welche (12) negativ ist. Die übrigen Punkte der Ebene rechnen wir zum Aeusseren. Für $y = 0$ erhalten wir aus (12) die Einsicht, dass diejenigen Punkte der x-Axe im Inneren liegen, für welche $\operatorname{sgn} f(x) \cdot f_1(x)$ negativ ist, und diejenigen im Aeusseren, für welche das Zeichen positiv ist. Hiernach können wir auf der x-Axe Austrittspunkte aus dem Gebiete und Eintrittspunkte in dasselbe definiren. Der im Anfange des Paragraphen abgeleitete Satz heisst dann folgendermassen:

Die Signatur der Form

$$\varphi = \sum_{\lambda=1}^{n} f'(z_\lambda) f_1(z_\lambda) [u_0 \varpi_0(z_\lambda) + \cdots + u_{n-1} \varpi_{n-1}(z_\lambda)]^2$$

ist gleich dem Ueberschuss der Austrittspunkte der x-Axe über die Eintrittspunkte derselben hinsichtlich des von den Curven

$$y - f(x) = 0, \quad y - f_1(x) = 0$$

umschlossenen Gebietes.

Nehmen wir insbesondere $f_1(z) = f'(z)$, so giebt es überhaupt nur Austrittspunkte (§ 187), und die Signatur der Form giebt wieder die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$*).

§ 234. Wir wollen ferner $\chi(z, t) = t - \chi(z)$ setzen. Dann giebt $P(t)$ die Summe aus der Anzahl der complexen Wurzelpaare und derjenigen reellen Wurzeln z_α, für welche $\chi(z_\alpha) < t$ ist; und $S(t)$ den Ueberschuss der Anzahl reeller Wurzeln, für die $\chi(z_\alpha) < t$ ist, über diejenige der reellen Wurzeln, für die $\chi(z_\alpha) > t$ ist.

Nimmt man insbesondere $\chi(z, t) = t - z$, so liefert, wenn t_1 und t_2 $(> t_1)$ zwei feste Werthe von t sind,

$$N(t_1) - N(t_2)$$

die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$, welche zwischen t_1 und t_2 liegen. Führt man also $\varpi_\alpha(z) = z^\alpha$ ein, dann wird

$$\Delta_k(t) = S\left[(t - z_1) \cdots (t - z_k) \prod (z_\alpha - z_\beta)^2\right] \qquad \left(\begin{matrix}\alpha, \beta = 1, 2, \cdots k \\ \alpha > \beta\end{matrix}\right),$$

und wenn man nun bedenkt, dass jedem negativen Zeichen des Aggregats der Quadrate, in welches φ umgewandelt werden kann, ein Zeichenwechsel der Reihe

$$1, \quad \Delta_1(t), \quad \Delta_2(t), \quad \cdots \quad \Delta_n(t) \tag{6}$$

*) Vgl. Kronecker: Ueber die verschiedenen Sturm'schen Reihen und ihre gegenseitigen Beziehungen. Berl. Ber. Febr. 1873. § 1. S. 117.

entspricht, so folgt, dass die Differenz der Zeichenwechsel in (6) für t_1 und t_2, also

$$\sum W(t_1) - \sum W(t_2),$$

die Anzahl der reellen, zwischen t_1 und t_2 liegenden Wurzeln von $f(z) = 0$ angiebt.

Dieser Satz, oder vielmehr der für $\chi = \frac{1}{t-z}$ sich ergebende, wird gewöhnlich als der Hermite'sche Satz bezeichnet.

Das zu unserer Annahme gehörige φ wird, wenn man (10) und (11) berücksichtigt, durch die Summen der Wurzelpotenzen dargestellt

$$\varphi(t) = \sum (ts_{\alpha+\beta} - s_{\alpha+\beta+1}) u_\alpha u_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \cdots n),$$

und die Δ nehmen die Gestalt

$$\Delta_\lambda = | ts_{\mu+\nu} - s_{\mu+\nu+1} | \qquad (\mu, \nu = 0, 1, \cdots \lambda)$$

an. Man sieht sofort, dass dieses Δ_λ in die Form

$$\Delta_\lambda = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_{\lambda-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_\lambda & t \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ s_\lambda & s_{\lambda+1} & \cdots & s_{2\lambda-1} & t^\lambda \end{vmatrix}$$

umgewandelt werden kann.

§ 235. Wir wollen noch eine quadratische Form betrachten, die in gleicher Weise zur Bestimmung der reellen Wurzeln dienen kann, wie die bisher besprochenen Hermite'schen.

Wir bilden nach der in Vorlesung 12, § 142 angegebenen von Bézout stammenden Methode aus $f(z)$ und $f'(z)$ den dortigen Formeln (13) entsprechend die n Polynome

$$\begin{aligned} &d_{11}z^{n-1} + d_{12}z^{n-2} + d_{13}z^{n-3} + \cdots + d_{1n}, \\ &d_{21}z^{n-1} + d_{22}z^{n-2} + d_{23}z^{n-3} + \cdots + d_{2n}, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &d_{n1}z^{n-1} + d_{n2}z^{n-2} + d_{n3}z^{n-3} + \cdots + d_{nn}, \end{aligned} \tag{13}$$

deren Determinante als Bézoutiante bezeichnet wurde, und die sich von der Discriminante von $f(z)$ nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann; und dann weiter den dortigen Formeln (13ª) entsprechend die linearen Combinationen der Ausdrücke (13)

$$\begin{aligned} &d'_{11}z^{n-1} + d'_{12}z^{n-2} + d'_{13}z^{n-3} + \cdots + d'_{1n}, \\ &\qquad\quad d'_{22}z^{n-2} + d'_{23}z^{n-3} + \cdots + d'_{2n}, \\ &\qquad\qquad\quad d'_{33}z^{n-3} + \cdots + d'_{3n}, \\ &\qquad\qquad\qquad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{aligned} \tag{13ª}$$

so sind, wie wir dort gesehen haben, die Functionen (13ª) identisch mit den Resten der fortgesetzten Division von f durch f' u. s. w.

Es liefern also die Functionen (13^a) eine Sturm'sche Reihe für f. Setzt man $z_1 = -\infty$, $z_2 = +\infty$, will man also die Anzahl der überhaupt vorhandenen reellen Wurzeln von $f = 0$ bestimmen, so geht diese Sturm'sche Reihe (vgl. § 143) in

$$d'_{11} = d_{11}, \quad d'_{22} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix}, \quad d'_{33} = \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{vmatrix}, \cdots$$

über, d. h. in die Reihe der Hauptsubdeterminanten der Bézoutiante $|d_{\lambda\mu}|$. Verbindet man damit das Resultat aus § 177, so folgt: Die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ ist gleich der Signatur der quadratischen Form

$$\sum_{\lambda,\mu} d_{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n);$$

dieselbe Anzahl ist gleich der Differenz aus der Anzahl der positiven und der negativen Wurzeln der Gleichung

$$|t\varepsilon_{\lambda\mu} - d_{\lambda\mu}| = 0 \qquad (\lambda, \mu = 1, 2, \cdots n)$$

($\varepsilon_{\lambda\mu} = 0$, wenn $\lambda \neq \mu$ ist; $\varepsilon_{\lambda\mu} = 1$, wenn $\lambda = \mu$ ist).

§ 236. Wir haben uns im Verlaufe dieser Untersuchungen mitunter auf den Fall beschränkt, die Zahl sämmtlicher reellen Wurzeln festzustellen, statt allgemeiner die Zahl derjenigen aufzusuchen, welche zwischen gegebenen Grenzen liegen. In Wirklichkeit ist dies aber keine Beschränkung, wie zuerst Jacobi (Observatiunculae etc. Werke Bd. III, S. 279) gezeigt hat.

Handelt es sich nämlich darum, die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ zu bestimmen, die zwischen den Grenzen z_1 und z_2 liegen, so führen wir, wenn $z_2 > z_1$ ist, eine neue Variable y durch

$$y = \frac{z - z_1}{z_2 - z}, \quad \text{also} \quad z = \frac{z_1 + z_2 y}{1 + y}$$

ein, dann entspricht der Strecke $(z_1 \cdots z_2)$ für z die Strecke $(0 \cdots +\infty)$ für y, und die ganze Function

$$(1 + y)^n f\left(\frac{z_1 + z_2 y}{1 + y}\right) = a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots = g(y)$$

liefert gleich Null gesetzt eine Gleichung mit eben so vielen positiven Wurzeln, als $f(z) = 0$ reelle Wurzeln zwischen z_1 und z_2 besitzt. Es hat daher die Gleichung vom Grade $2n$

$$g(\zeta^2) = 0$$

eben so viele Paare reeller Wurzeln $\zeta = \pm a$, d. h. doppelt so viele reelle Wurzeln, als $f(z) = 0$ zwischen z_1 und z_2 besitzt.

Einundzwanzigste Vorlesung.

Trennung der Wurzeln. Rationale Wurzeln.

§ 237. Das Sturm'sche sowohl wie das Hermite'sche Theorem liefern Mittel, um eine Trennung der reellen Gleichungswurzeln von einander zu bewirken, d. h. um Intervalle anzugeben, innerhalb deren nur je eine reelle Wurzel der vorgelegten Gleichung $f(z) = 0$ sich befindet, die wir von vorn herein als von gleichen Wurzeln befreit ansehen dürfen.

Wir wollen dabei

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n \tag{1}$$

voraussetzen und die c als ganze Zahlen annehmen. Wären die Coefficienten rational aber gebrochen, so könnte die gemachte Annahme durch die Substitution $z = \frac{\zeta}{a}$ bei geeigneter Wahl der Constanten a verwirklicht werden. Vom Auftreten irrationaler Coefficienten sehen wir hier ab.

Zu unserem Zwecke reicht es aus, zunächst eine obere Grenze ϱ für den absoluten Betrag der reellen Gleichungswurzeln zu bestimmen; jeder der beiden erwähnten Sätze giebt an, wie viele Wurzeln innerhalb des Intervalles $(-\varrho, \cdots +\varrho)$ liegen. Dann untersucht man ebenso die beiden Intervalle $(-\varrho, \cdots 0)$ und $(0, \cdots +\varrho)$, weiter die vier Intervalle

$$\left(-\varrho, \cdots -\frac{\varrho}{2}\right), \left(-\frac{\varrho}{2}, \cdots 0\right), \left(0, \cdots +\frac{\varrho}{2}\right), \left(\frac{\varrho}{2}, \cdots \varrho\right)$$

und so fort, immer darauf hin, wie viele reelle Wurzeln sie enthalten. Hat sich einmal für ein Intervall herausgestellt, dass keine Wurzel oder nur eine einzige darin vorkommt, so ist natürlich jede weitere Theilung desselben überflüssig. Auf diese Weise kommt man sicher zur Lösung des gestellten Problems, da man ja dann zum Ziele gelangt sein muss, sobald die Grösse der Intervalle kleiner geworden ist, als die kleinste Differenz zweier reeller Gleichungswurzeln, und da diese nach unserer Voraussetzung von Null verschieden ist.

§ 238. Cauchy hat gezeigt, wie man auf einfache Art eine untere Grenze für diese Differenz bestimmen kann.

Am nächsten liegt die Idee, die Gleichung aufzustellen, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen der Wurzeln von $f(z) = 0$ sind, und eine untere Grenze λ für die positiven Wurzeln jener Gleichung zu bestimmen, indem dann $\sqrt{\lambda}$ eine brauchbare Bestimmung für die

Grösse des Intervalles liefert (§ 120). Diese Methode hat Waring angegeben, und Lagrange hat sie übernommen*). Man erkennt aber ohne Weiteres, dass ihre Ausführung mit ausserordentlichen Mühseligkeiten verbunden sein würde, da die Gleichung der Quadrate der Wurzeldifferenzen bis zum Grade $\frac{n(n-1)}{2}$ aufsteigt. Diesen Uebelstand hat Cauchy zu vermeiden gelehrt. Wir wollen hier zunächst seine Methode auseinandersetzen.

Das letzte Glied der Gleichung für die Quadrate der Wurzeldifferenzen ist

$$\pm D = \pm (z_1 - z_2)^2 (z_1 - z_3)^2 \cdots (z_{n-1} - z_n)^2.$$

Bedeutet nun ϱ eine obere Grenze für die Moduln aller Gleichungswurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$, und sind z_1, z_2 zwei reelle Wurzeln, dann wird die Differenz je zweier Wurzeln nicht grösser als 2ϱ, und deshalb ist, wenn wir unter D den absoluten Werth des Productes der Quadrate der Wurzeldifferenzen der Gleichung (1) verstehen,

$$D < (z_1 - z_2)^2 (2\varrho)^{n(n-1)-2}$$

$$(2) \qquad \cdot \; |z_1 - z_2| > \frac{D^{\frac{1}{2}}}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

So hat man also in dem Werthe der rechten Seite eine Grenze λ für die Grösse der Intervalle, in denen höchstens eine Wurzel von $f(z) = 0$ vorkommt. Die Rechnung benutzt ausser ϱ nur noch D, d. h. den Werth der Discriminante, und auch dieser kann noch, freilich unter weiterer Verminderung des Werthes von λ, beseitigt werden. D ist nämlich als symmetrische, ganze Function der z eine ganze Function der Coefficienten von

$$(1) \qquad f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$

und daher eine ganze Zahl; ferner ist er, da die Wurzeln z_λ von einander verschieden sind, von Null verschieden und also mindestens der Einheit gleich.

Nimmt man daher in (2) für D den kleinstmöglichen Werth 1, so ist sicher der absolute Betrag der Differenz je zweier reellen Wurzeln

$$(2^a) \qquad |z_1 - z_2| > \frac{1}{(2\varrho)^{\frac{n(n-1)}{2}-1}}.$$

*) Vgl. Lagrange Werke, Bd. 8, Résolution des équations, Note 4; S. 146, wo die umständlichen Versuche auseinandergesetzt werden, die der Verf. unternommen hat, um die Rechnung durchführbar zu machen.

§ 239. In einer bei weitem fundamentaleren Art und vor Allem ohne Voraussetzung der Wurzelexistenz und ohne Stetigkeitsbetrachtungen hat Kronecker*) die Frage nach der Trennung der Wurzeln behandelt. Natürlich muss, weil ja von dem Begriffe der Wurzeln kein Gebrauch gemacht wird, das Problem überhaupt ganz anders formulirt werden. Wir wollen die Kronecker'schen Untersuchungen in etwas veränderter Form folgen lassen.

Die Voraussetzung, dass $f(x)$ nur rationale Coefficienten besitze, kann fallen. Reell sollen die Coefficienten auch weiterhin sein. Die Grösse ϱ sei eine nach § 17 bestimmte positive Zahl derart, dass für alle reellen $x > \varrho$ die Function $f(x)$ ihr Zeichen nicht ändert und dafür ebenfalls von Null verschieden bleibt; und dass ferner für alle reellen $x < -\varrho$ das Gleiche stattfindet. Im Folgenden nehmen wir stets die Variable x als reell und zwischen den beiden Grenzen $-\varrho$ und $+\varrho$ gelegen an.

Nun bilden wir, wenn unter σ ein positiver, echter Bruch verstanden wird,

$$f(x \pm \sigma) - f(x) = \pm \sigma \left\{ \binom{n}{1} x^{n-1} + \left[\pm \binom{n}{2} \sigma + \binom{n-1}{1} c_1 \right] x^{n-2} + \left[\binom{n}{3} \sigma^2 \pm \binom{n-1}{2} c_1 \sigma + \binom{n-2}{1} c_2 \right] x^{n-3} + \cdots \right\}$$

und ersetzen in der geschweiften Klammer rechts alle c durch ihre absoluten Werthe, σ durch 1 und x durch ϱ; dann wird der Werth der Klammer vermehrt. Die positive, ganze Zahl, die bei diesen Operationen aus der Klammer hervorgeht, heisse H. Daraus folgt somit

$$|f(x \pm \sigma) - f(x)| < \sigma H. \tag{3}$$

Hat $f(x_0)$ ein bestimmtes Vorzeichen, d. h. ist $f(x_0)$ von Null verschieden, und wählen wir $\sigma_0 H < |f(x_0)|$, also $\sigma_0 < |f(x_0)| : H$, dann wird

$$|f(x_0 \pm \sigma_0) - f(x_0)| < |f(x_0)|,$$

und $f(x_0 \pm \sigma_0)$ hat dasselbe Vorzeichen wie $f(x_0)$. Weil das gleiche Resultat für jedes $\sigma < \sigma_0$ folgt, so hat man den Satz: I) Um jeden Punkt x_0, in welchem $f(x)$ nicht verschwindet, kann man eine Strecke $\left(x_0 - \frac{|f(x_0)|}{H}, \cdots x_0 + \frac{f(x_0)|}{H}\right)$ festlegen, innerhalb deren die Function $f(x)$ ihr Vorzeichen nicht ändert.

Ferner ist, wenn $f(x_1)$ und $f(x_1 + \sigma_1)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, nach (3)

$$|f(x_1)| < \sigma_1 H, \quad |f(x_1 + \sigma_1)| < \sigma_1 H. \tag{4}$$

*) J. für M. Bd. 101, S. 347–353.

Ist x' ein beliebiger im Intervalle $(x_1, \cdots x_1 + \sigma_1)$ angenommener Werth, für den $f(x')$ von Null verschieden ist, so hat $f(x')$ entweder gegen $f(x_1)$ oder gegen $f(x_1 + \sigma_1)$ verschiedenes Vorzeichen. Da ferner jede der beiden Theilstrecken $x' - x_1$ und $x_1 + \sigma_1 - x'$ kleiner als σ_1 ist, so gilt auch hier, was eben für (4) bewiesen wurde,

$$(4^a) \qquad |f(x')| < \sigma_1 H,$$

d. h. II) wenn $f(x_1)$ und $f(x_1 + \sigma_1)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, so gilt für jeden Werth x' zwischen x_1 und $(x_1 + \sigma_1)$ die Beziehung (4^a). In dem Falle $f(x') = 0$, der soeben ausgenommen war, findet ja selbstverständlich der gleiche Umstand statt.

Wenn also in einem Intervalle von beliebiger Grösse t am Anfangs- und am Endpunkte die Vorzeichen der Function verschiedene sind, und man theilt das Intervall in r gleiche Theile, so wird es unter diesen mindestens einen geben, in dem gleichfalls die Vorzeichen an den Endpunkten verschiedene sind. (Da höchstens n Werthe bestehen, für die $f(x) = 0$ wird, so lässt sich durch Aenderung von r stets der Fall vermeiden, dass an einem Trennungspunkte zweier Intervalle $f(x) = 0$ wird.) Nimmt man bei (4^a) x' in diesem Intervalle an, und setzt also $\sigma_1 = \frac{t}{r}$, dann folgt: III) In jedem Intervalle von der Grösse t, an dessen Endpunkten $f(x)$ verschiedene Vorzeichen annimmt, giebt es mindestens ein Intervall von der Grösse $\frac{t}{r}$, innerhalb dessen für jeden Werth von x, die Grenzen eingeschlossen,

$$|f(x)| < \frac{tH}{r} \qquad (r > t)$$

wird, wie gross die ganze Zahl r auch gewählt sei, d. h. es giebt ein Intervall von endlicher Grösse, innerhalb dessen $|f(x)|$ beliebig klein bleibt.

Weiter haben wir

$$\frac{f(x+\sigma) - f(x)}{\sigma} = f'(x) + \sigma\left\{\binom{n}{2}x^{n-2} + \left[\binom{n}{3}\sigma + \binom{n-1}{2}c_1\right]x^{n-3} + \cdots\right\}.$$

Machen wir in der geschweiften Klammer dieselben Operationen wie oben an der entsprechenden Stelle, dann finden wir einen oberen Werth K für ihren absoluten Betrag und können demnach

$$(5) \qquad \frac{f(x+\sigma) - f(x)}{\sigma} = f'(x) + \sigma \cdot \varepsilon K \qquad (-1 < \varepsilon < 1)$$

schreiben. Dieselbe Gleichung bleibt bestehen, wenn wir K vergrössern; wir dürfen es daher als mindestens gleich 1 voraussetzen.

Hierdurch ist eine obere Grenze für den Unterschied der beiden Functionen

$$\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma} \text{ und } f'(x)$$

festgestellt.

Wir nehmen jetzt an, dass $f(x)$ und $f'(x)$ keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Dann kann man zwei ganzzahlige Functionen von x etwa $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ finden, für die

$$f(x)\varphi(x) + f'(x)\psi(x) = |D|$$

d. h. eine positive Zahl wird (vgl. § 68). Das ergiebt hier mit Hülfe von (5) die Gleichungen

$$f\cdot\varphi + \left(\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma} - \sigma\varepsilon K\right)\psi = |D|,$$

$$(6) \qquad |f|\cdot|\varphi| + \left|\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma}\right|\cdot|\psi| + \sigma K\cdot|\psi| \geqq |D|.$$

In $|\varphi|$ und in $|\psi|$ setzen wir nun wieder statt der Coefficienten ihre absoluten Beträge und statt x die Grenze ϱ ein. Dann erhalten wir Zahlen L und M, die von den absoluten Werthen von φ bezw. ψ nie übertroffen werden können. Jetzt wählen wir eine Grösse s so, dass

$$(s-1)|D| > L,\ K\cdot M$$

wird und also dann auch, weil ja K mindestens gleich 1 ist,

$$(s-1)|D| > M.$$

Führen wir $(s-1)|D|$ statt $|\varphi|$, $|\psi|$, $K|\psi|$ in (6) ein, dann entsteht

$$|f| + \left|\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma}\right| > \frac{1}{s-1} - \sigma,$$

und für jedes σ, welches $< \frac{1}{s}$ angenommen wird, ergiebt sich

$$(6^a) \qquad |f(x)| + \left|\frac{f(x+\sigma)-f(x)}{\sigma}\right| > \frac{1}{s(s-1)}, \qquad \left(\sigma < \frac{1}{s}\right).$$

Mit Hülfe der bisher in diesem Paragraphen abgeleiteten Resultate können wir nachweisen, dass in jedem Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$, welches ganz dem Bereiche $(-\varrho, \cdots +\varrho)$ angehört, höchstens ein Zeichenwechsel bei $f(x)$ stattfinden kann.

Gesetzt, wir haben ein Intervall $(x_0 \cdots x_4)$ mit $x_4 > x_0$ und $(x_4 - x_0) < \frac{1}{s}$, für welches

$$\operatorname{sgn} f(x_0)\cdot f(x_4) = +1$$

ist, und es gebe einen Zwischenwerth x_2, für den $f(x_2) \neq 0$, und

$$\operatorname{sgn} f(x_0) f(x_2) = \operatorname{sgn} f(x_2) f(x_4) = -1 \qquad (x_0 < x_2 < x_4)$$

wird, so wollen wir aus der Annahme eines solchen x_2 einen Wider-

spruch herleiten. Wir können gemäss I) um x_2 eine Strecke von der Grösse $2\frac{|f(x_2)|}{H}$ abgrenzen

$$(7) \qquad \left(x_1 = x_2 - \frac{|f(x_2)|}{H}, \cdots x_3 = x_2 + \frac{|f(x_2)|}{H}\right),$$

so dass $f(x_1)$ und $f(x_3)$ das Vorzeichen von $f(x_2)$ besitzen, und also auch

$$\operatorname{sgn} f(x_0) f(x_1) = -1, \quad \operatorname{sgn} f(x_3) f(x_4) = -1$$

wird. Da dieselben Zeichencombinationen für jedes x' innerhalb $(x_1 \cdots x_3)$ gelten, und da $f(x_0)$ und $f(x_4)$ das entgegengesetzte Zeichen von $f(x_2)$ besitzen, so folgt von selbst, dass $(x_1, \cdots x_3)$ ganz innerhalb $(x_0, \cdots x_4)$ liegt, oder dass

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4$$

wird. Jetzt setzen wir der Kürze wegen

$$x_1 - x_0 = t_1, \quad x_4 - x_3 = t_2,$$

und können dann nach III) in $(x_0 \cdots x_1)$ noch ein Intervall von der Grösse $\frac{t_1 H}{r}$ und in $(x_3 \cdots x_4)$ ein solches von der Grösse $\frac{t_2 H}{r}$ abgrenzen, so dass für jedes ξ_1 innerhalb des ersten und jedes ξ_2 innerhalb des zweiten

$$(8) \qquad |f(\xi_1)| < \frac{t_1 H}{r}, \quad |f(\xi_2)| < \frac{t_2 H}{r}$$

bei jedem noch so grossen r wird. Setzen wir diese Werthe ξ_1 und ξ_2 für x und $(x + \sigma)$ in (6^a) ein, so giebt dies zunächst, der Formel (6^a) entsprechend,

$$|f(\xi_1)| + \left|\frac{f(\xi_2) - f(\xi_1)}{\xi_2 - \xi_1}\right| > \frac{1}{s(s-1)},$$

und weil $(\xi_2 - \xi_1) > (x_3 - x_1)$ und $(x_4 - x_0) < \frac{1}{s}$ ist, so folgt daraus weiter unter Berücksichtigung von (7) und (8)

$$\frac{t_1 H}{r} + \frac{1}{x_3 - x_1}\left(\frac{t_1 H}{r} + \frac{t_2 H}{r}\right) > \frac{1}{s(s-1)},$$

$$r < (s-1) H \left(1 + \frac{H}{|f(x_2)|}\right).$$

Bei constanter rechter Seite kann man r beliebig gross werden lassen; das führt auf einen Widerspruch, der dann also zeigt, dass innerhalb einer Strecke, deren Ausdehnung $\leqq \frac{1}{s}$ ist, und für die $f(x)$ am Anfang und am Ende dasselbe Zeichen bewahrt, eine Zeichenänderung überhaupt nicht vorkommen kann. Falls $f(x)$ am Anfang und am Ende einer Strecke $(x_0, \cdots x_3)$, deren Aus-

dehnung $< \frac{1}{s}$ ist, verschiedene Vorzeichen besitzt, dann giebt es keine Zwischenwerthe $x_1 > x_0$ und $x_2 > x_1$, so dass

$$\operatorname{sgn} f(x_0) = -\operatorname{sgn} f(x_1) = +\operatorname{sgn} f(x_2) = -\operatorname{sgn} f(x_3)$$

wäre; denn wegen $\operatorname{sgn} f(x_0) = \operatorname{sgn} f(x_2)$ würde die Existenz eines x_1 nach dem eben angeführten Satze unmöglich sein. Damit ist gezeigt, dass innerhalb einer Strecke, deren Ausdehnung $\leq \frac{1}{s}$ ist, höchstens eine Zeichenänderung von $f(x)$ stattfinden kann.

Hiernach braucht man, wenn wir nach diesen principiellen Erörterungen wieder von Wurzeln reden, das Intervall $(-\varrho, \cdots + \varrho)$ nur in Intervalle von der Grösse $\frac{1}{s}$ zu zerlegen, um durch die Betrachtung der Vorzeichen von $f(x)$ in den Endpunkten die Entscheidung über die Anzahl der reellen Wurzeln von $f(x) = 0$ und über ihre Lage herbeizuführen. Ja, der Satz III) zeigt ferner, dass man um jede Wurzel herum ein Intervall abgrenzen kann, in dem nur ein Vorzeichenwechsel stattfindet, und in dem der absolute Werth von $f(x)$ beständig unter einer beliebig klein gewählten Grenze bleibt.

§ 240. Es kann vorkommen, dass bei den besprochenen Operationen eine Wurzel in den Grenzpunkt zweier Intervalle fällt. Dies tritt aber, wenn für die obere Grenze der Wurzeln, wie dies ja übrigens gar nicht anders möglich ist, eine rationale Grösse genommen und das dadurch erlangte Gebiet in gleiche Theile zerlegt wird, nur dann ein, wenn die Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten

$$(9) \qquad f(z) = c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

rationale Wurzeln besitzt. Es ist deshalb von Interesse, diese, wenn es durch eine expedite Methode thunlich ist, von vorn herein auszusondern; auch schon deshalb, weil dadurch der Grad der Gleichung erniedrigt wird, ohne dass die Coefficienten complicirtere Gestalt annehmen. Theoretisch haben wir diese Aufgabe früher dadurch gelöst, dass wir $f(z)$ in seine irreductiblen Factoren zerlegten. Denn stets dann und nur dann, wenn ein irreductibler Factor vom ersten Grade auftritt, kommt eine rationale Wurzel vor. Im vorliegenden einfacheren Falle kann man jedoch eine Reihe von Vereinfachungen der Rechnung anbringen, die wir besprechen wollen. Vor Allem lässt es sich so einrichten, dass man bei der Zerlegung sein Augenmerk überhaupt nur auf die Herstellung etwa vorhandener linearer Factoren richtet. Newton zeigt in der „Arithmetica universalis", wie dies am einfachsten geschehen kann. Im § 50 verfuhren wir zum Zwecke der Zerlegung in irreductible Factoren so, dass wir eine Reihe ganzzahliger

Argumente $z_1, z_2, z_3, \cdots$ in $f(z)$ eintrugen, jedes $f(z_\lambda)$ in alle seine positiv und negativ genommenen Factoren zerlegten $d'_\lambda, d''_\lambda, d'''_\lambda, \cdots$ und aus diesen d eine Tabelle bildeten. Hier nehmen wir für die Argumente z eine arithmetische Reihe erster Ordnung, am einfachsten die Folge der ganzen Zahlen, $\cdots -2, -1, 0, +1, +2, \cdots$. Hat $f(z)$ einen Factor $a_0 z + a_1$ mit ganzzahligen Coefficienten, so liefert dieser für die gewählte Argumentreihe eine Werthfolge, welche als arithmetische Reihe erster Ordnung auftritt. Wir combiniren daher alle $d_1^{(\alpha)}, d_2^{(\beta)}$ und sehen zu, ob Werthe $d_3^{(\gamma)}, d_4^{(\delta)}, \cdots$ bestehen, die mit den beiden erstgewählten eine arithmetische Reihe erster Ordnung bilden. Ist dies der Fall, dann nehmen wir für a_1 das zum Argumente 0 gehörige d und für a_0 eine beliebige der Differenzen $(d_{m+1}^{(\varkappa)} - d_m^{(\lambda)})$. Die so hervortretenden $a_0 z + a_1$ sind die einzigen, welche überhaupt als lineare Divisoren von $f(z)$ in Frage kommen können.

Man sieht leicht, dass die gegebene Methode sich auf die Theiler höherer Grade ausdehnen lässt; das findet sich auch bereits bei Newton durchgeführt.

§ 241. Gesetzt (9) hätte die Wurzel $z_1 = \frac{p}{q}$, wobei p und q ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler sind, dann muss

$$c_0 p^n + c_1 p^{n-1} q + c_2 p^{n-2} q^2 + \cdots + c_{n-1} p q^{n-1} + c_n q^n = 0$$

werden, und da alle Glieder mit Ausnahme des ersten den Factor q enthalten, p aber zu q relativ prim ist, so muss c_0 durch q theilbar sein. Ebenso zeigt sich, dass c_n ein Vielfaches von p ist. Durch Zerlegung von c_0 und c_n in ihre sämmtlichen Factoren, wobei auch die Vorzeichen $\pm$ zu berücksichtigen sind, erhält man dann alle überhaupt in Frage kommenden rationalen Werthe, mit denen somit die Probe zu machen wäre.

Aus dem Abgeleiteten folgt sofort, dass eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, unter denen $c_0 = 1$ ist, ausser ganzzahligen, keine rationalen Wurzeln haben kann. Auf diesen besonderen Fall $c_0 = 1$ kann man den allgemeinen Fall (9) leicht zurückführen, indem man $z = \frac{\zeta}{c_0}$ setzt und darauf mit c_0^{n-1} multiplicirt. Wir wollen also von vorn herein $c_0 = 1$ voraussetzen. Dann kommen nur ganzzahlige Wurzeln in Frage. Um $z = p$ zu prüfen, müsste man in (1) diese Substitution machen. Bei einigermassen grossem n ist diese Rechnung recht unbequem. Newton hat gezeigt, wie man sie durch eine bequemere ersetzen kann, die zugleich den Vortheil in sich trägt, falls $z = p$ wirklich eine Wurzel ist, sofort den Quotienten $f(z) : (z - p)$ zu liefern.

Ist $f(z)$ durch $(z-p)$ theilbar, und setzt man

$$z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n$$
$$= (z-p)(z^{n-1} + d_1 z^{n-2} + d_2 z^{n-3} + \cdots + d_{n-1}),$$

so liefert die Vergleichung der Coefficienten

$$c_1 = d_1 - p, \quad c_2 = d_2 - d_1 p, \quad c_3 = d_3 - d_2 p, \quad \cdots$$
$$c_{n-1} = d_{n-1} - d_{n-2} p, \quad c_n = -d_{n-1} p$$

und also

$$(10) \quad d_{n-1} = \frac{-c_n}{p}, \quad d_{n-2} = \frac{d_{n-1} - c_{n-1}}{p}, \quad d_{n-3} = \frac{d_{n-2} - c_{n-2}}{p}, \quad \cdots$$
$$d_1 = \frac{d_2 - c_2}{p}; \quad c_1 = d_1 - p.$$

Die in den ersten $(n-1)$ Gleichungen vorkommenden Divisionen müssen also ganzzahlige Quotienten ergeben. Erfüllt dann der Werth von d_1 die letzte Gleichung, so ist p eine Wurzel, und die d sind die Coefficienten von $f(z):(z-p)$. Die Prüfungsmethode ist hiernach einfach zu übersehen.

Von der im Allgemeinen ziemlich grossen Zahl von Divisoren der Coefficienten c_n lassen sich manche ohne besonders umständliche Prüfung beseitigen. Ist nämlich $f(z)$ durch $(z-p)$, so ist $f(\pm 1)$ durch $(p \mp 1)$ theilbar; und da $f(\pm 1)$ durch einfache Addition der positiv oder negativ genommenen Coefficienten erhalten wird, so hat man nur eine bequeme Rechnung auszuführen. Unter den Theilern von $f(0)$ können hiernach sofort diejenigen getilgt werden, welche um 1 vermehrt oder vermindert nicht Theiler von $f(-1)$ oder $f(+1)$ sind.

Eine weitere Vereinfachung ergiebt sich dadurch, dass man alle Werthe beseitigt, welche die nach Vorlesung 16 gefundenen Grenzen für die reellen Wurzeln überschreiten.

Wir wollen das von Serret gewählte Beispiel

$$f = z^5 - 34z^3 + 29z^2 + 212z - 300 = 0$$

behandeln. Schreibt man das Polynom in der Form

$$f(z) = z^3(z^2 - 34) + 29z^2 + (212z - 300),$$

so erkennt man, dass keine positive Wurzel gleich 6 oder grösser als 6 sein kann; und schreibt man

$$f(-z) = -z^2(z^3 - 34z - 29) - (212z + 300),$$

so erkennt man, dass keine negative Wurzel gleich -7 oder kleiner als -7 sein kann. Von den Theilern von 300 bleiben also nur zurück

$$+5, +4, +3, +2, +1, -1, -2, -3, -4, -5, -6.$$

Da $f(+1) = -92$, $f(-1) = 450$ ist, so sind ± 1 keine Wurzeln.

Da $f(+1)$ durch $(4-1)$, $(-2-1)$, $(-4-1)$, $(-5-1)$, $(-6-1)$ und $f(-1)$ durch $(3+1)$ nicht theilbar ist, so fallen auch 4, 3, -2, -4, -5, -6, weg und es bleiben nur

$$+5,\ +2,\ -3$$

zur Prüfung übrig. Die erste Zahl liefert nach (10) behandelt

$$d_4 = -\frac{-300}{5} = 60;\quad d_3 = \frac{60-212}{5};$$

d_3 ist keine ganze Zahl, und daher kann 5 keine Wurzel der Gleichung sein. Die Zahl 2 liefert

$$d_4 = -\frac{-300}{2} = 150,\ d_3 = \frac{150-212}{2} = -31,\ d_2 = \frac{-31-29}{2} = -30,$$

$$d_1 = \frac{-30+34}{2} = 2;\qquad c_1 = 0 = 2-2;$$

folglich ist $(z-2)$ ein Factor von $f(z)$ und der Quotient lautet

$$f_1(z) = z^4 + 2z^3 - 30z^2 - 31z + 150.$$

Hier kann $f_1 = 0$ auch nur wieder an rationalen Wurzeln 2 oder -3 besitzen. Die Annahme 2 liefert

$$d_3' = -\frac{150}{2} = -75,\ d_2' = \frac{-75+31}{2} = -22,\ d_1' = \frac{-22+30}{2} = 4;$$

$$c_1' = 2 = 4-2;$$

folglich ist $(z-2)$ ein Doppelfactor von $f(z)$, und der Quotient lautet

$$f_2(z) = z^3 + 4z^2 - 22z - 75.$$

Aus dem letzten Coefficienten sieht man, dass höchstens noch -3 eine Wurzel sein kann. Die Prüfung ergiebt

$$d_2'' = -\frac{-75}{-3} = -25;\quad d_1'' = \frac{-25+22}{-3} = +1;\quad c_1'' = 4 = 1+3,$$

also ist schliesslich

$$f(z) = (z-2)^2(z+3)(z^2+z-25),$$

und der letzte Factor hat dann offenbar keine rationale Wurzel mehr.

§ 242. Wir wollen noch folgenden, hierher gehörigen Satz ableiten: Wenn c_0, c_n und eine der beiden Grössen $f(1)$, $f(-1)$ bei einer Gleichung von der allgemeinen Form (9) ungerade sind, dann hat $f(z) = 0$ keine rationalen Wurzeln.

Wenn nämlich $\left(z - \frac{p}{q}\right)$ ein Factor von $f(z)$ ist, dann wird $q^n f(z) : (qz - p)$ eine ganzzahlige Function; wir setzen

$$\frac{q^n f(z)}{qz-p} = g(z),$$

und dann wird jeder Quotient

$$\frac{q^n f(\alpha)}{q\alpha - p}$$

für jedes ganzzahlige α eine ganze Zahl werden. Ist nun irgend eine Primzahl gegeben, die q theilt, so kann sie nicht $(q\alpha - p)$ theilen; folglich haben q und $(q\alpha - p)$ keinen gemeinsamen Theiler, und daher muss $f(\alpha)$ bereits durch $(q\alpha - p)$ theilbar sein. Setzen wir jetzt $\alpha = 0,\ 1,\ -1$ so zeigt es sich, dass die drei gebrochenen Formen

$$\frac{c_n}{p},\quad \frac{f(1)}{q-p},\quad \frac{f(-1)}{q+p}$$

ganze Zahlen liefern. Wendet man dieselben Schlüsse auf die Function

$$\varphi(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_0$$

an, die den Theiler $(pz - q)$ hat, und für die $f(1) = \varphi(1)$, $f(-1) = \pm\varphi(-1)$ ist, so zeigt es sich, dass auch

$$\frac{c_0}{q},\quad \frac{f(1)}{q-p},\quad \frac{f(-1)}{q+p}$$

ganz sind. Der Voraussetzung nach sind c_0 und c_n ungerade; also sind p und q ungerade, während $(p+q)$ und $(p-q)$ gerade sind. Wenn folglich eine der Grössen $f(1)$, $f(-1)$ ungerade ist, tritt ein Widerspruch zu Tage.

Aehnliche Schlüsse kann man in Menge machen. Sind z. B. c_0, c_n nicht durch 3 theilbar, dann haben p und q die Formen

$$p = 3m \pm 1,\quad q = 3n \pm 1$$

und eine der beiden Grössen $(p+q)$ oder $(p-q)$ wird durch 3 theilbar. Ist folglich keiner der Werthe $f(1)$, $f(-1)$ durch 3 theilbar, so hat $f(z) = 0$ keine rationale Wurzel*).

Zweiundzwanzigste Vorlesung.

Die Newton'sche und die Bernoulli'sche Näherungsmethode.

§ 243. Durch jede Methode, durch welche die reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung getrennt werden, ist zugleich die Möglichkeit der Berechnung einer isolirten reellen Wurzel mit beliebiger Genauigkeit gegeben. Denn wenn zwischen den Grenzen x_1 und X_1 $(> x_1)$ nur eine einzige Wurzel ξ liegt, und man theilt $(x_1, \cdots X_1)$

*) Vgl. E. Mathieu: Théorèmes sur les racines commensurables; Nouv. Ann. XVI; 1857.

auf willkürliche Weise in Theile ein, so kann man durch die Berechnung des Vorzeichens der Function in den einzelnen Theilpunkten ein kleineres Theilintervall $(x_2, \cdots X_2)$ bestimmen, in welchem ξ gelegen ist. Von diesem aus kann man in gleicher Weise zu einem $(x_3, \cdots X_3)$ übergehen und die Werthe

$$X_1 - x_1, \quad X_2 - x_2, \quad X_3 - x_3, \quad \cdots$$

dabei beliebig verkleinern. Nimmt man dann statt ξ der Reihe nach

$$x_1 + \tfrac{1}{2}(X_1 - x_1) = \tfrac{1}{2}(x_1 + X_1), \quad \tfrac{1}{2}(x_2 + X_2), \quad \tfrac{1}{2}(x_3 + X_3), \quad \cdots,$$

so beträgt der Fehler jedesmal sicher nicht mehr als die Hälfte der Ausdehnung des Intervalles, welches zu Grunde gelegt wird. Man könnte ja von vorn herein die Grösse der Intervalle so klein machen, dass man direct die geforderte Genauigkeit erhielte, dies würde aber viele unnütze Zeichenberechnungen fordern, so dass eine fortgesetzte Theilung, z. B. eine beständige Halbirung vorzuziehen ist.

Trotzdem bleibt diese einfache Methode recht umständlich, da eine Fülle überflüssiger Rechnungen nicht zu umgehen ist, und es gestaltet sich daher bequemer, zu anderen Näherungsmethoden zu greifen. Unter diesen steht die sogenannte Newton'sche*) an erster Stelle. Sie ist in ihrer ursprünglichen Form trotz aller später angebrachten Feinheiten die förderndste. Wir wollen sie auseinandersetzen.

§ 244. Nachdem für die reelle, einfache Wurzel ξ eine obere Grenze X_1 und eine untere x_1 gefunden ist $(x_1 < \xi < X_1)$, derart dass ξ die einzige Wurzel von $f(z) = 0$ zwischen x_1 und X_1 ist, setzen wir

$$\xi = x_1 + h_1 = X_1 + H_1; \qquad (\operatorname{sgn} h_1 = +1;\ \operatorname{sgn} H_1 = -1),$$

wo dann h_1 und H_1 die bei den Annahmen x_1 und X_1 für die Wurzel begangenen Fehler bedeuten. Dann liefert § 193

$$f(\xi) = 0 = f(x_1 + h_1) = f(x_1) + h_1 f'(x_1 + \vartheta h_1) \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 1),$$
$$f(\xi) = 0 = f(X_1 + H_1) = f(X_1) + H_1 f'(X_1 + \Theta H_1) \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1),$$

und demnach wird

$$(1) \qquad h_1 = -\frac{f(x_1)}{f'(x_1 + \vartheta h_1)}; \quad H_1 = -\frac{f(X_1)}{f'(X_1 + \Theta H_1)}.$$

Versteht man nun unter M_1 den grössten Werth, welchen $|f'(x)|$ in $(x_1 \cdots X_1)$ annehmen kann, so ist M_1 von Null verschieden; denn sonst wäre im ganzen Intervalle beständig $f'(x) = 0$, und also $f(x)$ eine Constante. Nun setzen wir

---

*) Brief an Oldenburg v. 13. Juni 1676; ferner dargelegt in der Analysis per aequationes numero terminorum infinitas und im Methodus fluxionum. Uebrigens hatte schon Vieta eine ganz ähnliche Methode angegeben.

$$h_1' = \frac{|f(x_1)|}{M_1}, \quad H_1' = -\frac{|f(X_1)|}{M_1},$$

dann ist h_1' positiv, und $|h_1'| \leq |h_1|$; und ebenso ist H_1' negativ, und $|H_1'| \leq H_1$. Folglich werden h_1' und H_1' Näherungswerthe für h_1 und H_1, und es gilt für sie

$$x_1 < x_1 + h_1' < \xi < X_1 + H_1' < X_1,$$

d. h. wir haben ein engeres Intervall $(x_1 + h_1', \cdots X_1 + H_1')$ erhalten, in welchem wiederum ξ als einzige Wurzel liegt. Wenden wir dieselbe Methode auf dieses neue Intervall an, u. s. f., dann wird die Wurzel ξ in immer engere Grenzen eingeschlossen. So sollen die Reihen entstehen

$$\begin{array}{l|l}
x_2 = x_1 + h_1';\ h_1' = \frac{|f(x_1)|}{M_1} & X_2 = X_1 + H_1';\ H_1' = -\frac{|f(X_1)|}{M_1}, \\
x_3 = x_2 + h_2';\ h_2' = \frac{|f(x_2)|}{M_2} & X_3 = X_2 + H_2';\ H_2' = -\frac{|f(X_2)|}{M_2}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_{\varkappa+1} = x_\varkappa + h_\varkappa';\ h_\varkappa' = \frac{|f(x_\varkappa)|}{M_\varkappa} & X_{\varkappa+1} = X_\varkappa + H_\varkappa';\ H_\varkappa' = -\frac{f(X_\varkappa)}{M_\varkappa}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array} \tag{3}$$

$$X_1 - x_1 > X_2 - x_2 > X_3 - x_3 > \cdots X_\varkappa - x_\varkappa > X_{\varkappa+1} - x_{\varkappa+1} > \cdots.$$

Es erscheint von vorn herein nicht ausgeschlossen, dass die Grenze der Werthe $x_1, x_2, \cdots x_\varkappa, x_{\varkappa+1}, \cdots$ nicht mit der Wurzel ξ zusammenfällt, sondern dass sie ein vor ξ gelegener Werth ξ_0 wird. Dann hätte man

$$\lim_{\varkappa=\infty} x_{\varkappa+1} = \xi_0, \quad \lim_{\varkappa=\infty} h_\varkappa' = \lim_{\varkappa=\infty} \frac{|f(x_\varkappa)|}{M_\varkappa} = 0.$$

Da aber $M_\varkappa$ nicht über die endliche Grösse M_1 hinaus wachsen kann, so müsste hierbei $\lim |f(x_\varkappa)| = 0$ werden, und deshalb würde ξ_0 gegen die Annahme eine Wurzel sein. Gleiches gilt für die Reihe $X_1, X_2, \cdots X_\varkappa, X_{\varkappa+1}, \cdots$; damit ist bewiesen, dass unser Intervall $(x_\varkappa \cdots \xi \cdots X_\varkappa)$ bei wachsendem $\varkappa$ beliebig klein wird.

§ 245. Nehmen wir an, dass gleich das erste Intervall so eng sei, dass $f'(x)$ in ihm an keiner Stelle verschwindet, dann können wir auch über die Werthefolge $f(x_1), f(x_2), \cdots$ eine Anschauung gewinnen. Im allgemeinen Falle ist es möglich, dass x_2 genauer als x_1 aber $|f(x_2)| > |f(x_1)|$ wird; hier dagegen nicht. Denn es wird

$$f(x_2) = f(x_1 + h_1') = f(x_1)\left\{1 + \frac{\operatorname{sgn} f(x_1)}{M_1} f'(x_1 + \vartheta' h_1')\right\}, \tag{4}$$

und wenn also im allgemeinen Falle

$$\operatorname{sgn}[f(x_1) f'(x_1 + \vartheta' h_1)] = +1 \tag{4a}$$

wäre, erhielte man $|f(x_2)| > |f(x_1)|$. Das ist jetzt ausgeschlossen, weil bei positivem $f(x_1)$ auf der ganzen Strecke $(x_1 \cdots \xi)$ die Function abnehmen, also $f'(x)$ negativ werden muss, und deshalb (4^a) nicht erfüllt sein kann; bei negativem $f(x)$ wird dagegen auf der ganzen Strecke die Function wachsen, $f'(x)$ positiv werden, und infolge dessen kann auch in diesem Falle (4^a) nicht gelten.

Die Klammer rechts in (4) ist jetzt ein echter Bruch, für den wir eine obere Grenze angeben können. Es sei m_1 das Minimum von $|f'(x)|$ innerhalb des Intervalles; dies ist nach der Annahme von Null verschieden; m_1 bleibt, sobald $f(z)$ von höherem als dem ersten Grade ist, kleiner als M_1. Dann giebt die Gleichung (4), wenn wir etwa $f(x_1)$ als positiv voraussetzen,

$$f(x_2) \leqq f(x_1)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)$$

und ebenso weiter

$$f(x_3) \leq f(x_2)\left(1 - \frac{m_2}{M_2}\right).$$

Es ist aber $m_2 > m_1$, $M_2 \leqq M_1$, so dass wir um so mehr setzen können

$$f(x_3) \leq f(x_2)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right) \leq f(x_1)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(x_{\varkappa+1}) \leqq f(x_1)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^{\varkappa}.$$

Ebenso hat man, da $f(X_1)$ negativ sein muss, weil $f(x_1)$ positiv war,

$$f(X_{\varkappa+1}) \geqq f(X_1)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^{\varkappa}; \quad |f(X_{\varkappa+1})| < |f(X_1)|\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^{\varkappa}.$$

Da mit wachsendem $\varkappa$ die Potenz sich unbegrenzt der Null nähert, so liefern die letzten Ungleichungen wieder den Beweis der Convergenz der Näherungsreihen an ξ, und sie geben zugleich eine Bestimmung a priori für die Genauigkeit der Näherung.

Fassen wir die Resultate dieses und des vorhergehenden Paragraphen zusammen, so können wir sagen: Die Reihen der Näherungswerthe

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots x_\varkappa,\ x_{\varkappa+1},\ \cdots \qquad (x_{\alpha+1} > x_\alpha)$$
$$X_1,\ X_2,\ X_3,\ \cdots X_\varkappa,\ X_{\varkappa+1},\ \cdots \qquad (X_{\alpha+1} < X_\alpha)$$

convergiren zur Wurzel ξ. Die Differenzen

$$(5) \qquad X_1 - x_1,\ X_2 - x_2,\ \cdots X_\varkappa - x_\varkappa,\ X_{\varkappa+1} - x_{\varkappa+1},\ \cdots,$$

deren Grösse ein Mass für die Genauigkeit der Näherungswerthe giebt, convergiren zur Null. Die Werthe

$$\frac{X_1 + x_1}{2},\ \frac{X_2 + x_2}{2},\ \cdots\ \frac{X_\varkappa + x_\varkappa}{2},\ \frac{X_{\varkappa+1} + x_{\varkappa+1}}{2},\ \cdots$$

sind von ξ um weniger als die Hälfte der entsprechenden Grösse aus (5) entfernt. Verschwindet $f'(x)$ nicht im Intervalle $(x_1 \cdots X_1)$, dann ist, wenn wir $f(x_1)$ als positiv und $f(X_1)$ als negativ voraussetzen,

$$f(x_{\varkappa+1}) \leq f(x_1)\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^{\varkappa}, \quad |f(X_{\varkappa+1})| \geqq |f(X_1)|\left(1 - \frac{m_1}{M_1}\right)^{\varkappa}.$$

Wir müssen jetzt noch ein Mittel zur bequemen Bestimmung einer oberen Grenze für jedes M in (3) angeben. Wir wollen zunächst annehmen, x_1 und X_1 seien beide positiv. Dann fassen wir in dem Ausdrucke von $f'(x)$ alle Glieder mit positiven Coefficienten zu einem Polynome $g(x)$, alle mit negativen Coefficienten zu einem Polynome $h(x)$ zusammen, so dass

$$f'(x) = g(x) - h(x)$$

wird; g und h haben positive Coefficienten. Dann giebt

$$g(X_1) - h(x_1)$$

einen oberen Werth für M_1, und so können wir statt (3) schreiben

$$(7) \qquad \begin{array}{l|l} x_2 = x_1 + \dfrac{|f(x_1)|}{g(X_1) - h(x_1)} & X_2 = X_1 - \dfrac{|f(X_1)|}{g(X_1) - h(x_1)}, \\ x_3 = x_2 + \dfrac{|f(x_2)|}{g(X_2) - h(x_2)} & X_3 = X_2 - \dfrac{|f(X_2)|}{g(X_2) - h(x_2)}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Weil die Nenner der zweiten Zeile nicht grösser sind, als die der ersten u. s. w., so gelten unsere früheren Schlüsse über die Convergenz ungeändert auch hier.

Die Aenderungen, welche vorgenommen werden müssen, wenn beide Werthe x_1 und X_1 oder nur der erste negativ werden, sind jetzt leicht ersichtlich.

§ 246. Wir haben im § 245 die Voraussetzung gemacht, dass innerhalb $(x_1, \cdots X_1)$ die Function $f'(x)$ nicht verschwinde. Durch eine weitere Voraussetzung können wir die Formeln (7) noch mehr vereinfachen. Haben $f(x)$ und $f''(x)$ einen gemeinsamen Theiler, so kann dieser auf dem gewöhnlichen Wege entfernt werden. Dann darf $f''(\xi)$ nicht verschwinden, und wir wollen die Annäherung schon so weit getrieben denken, dass zwischen x_1 und X_1 keine Wurzel von $f''(x) = 0$ liegt, dass also $f''(x)$ innerhalb $(x_1, \cdots X_1)$ sein Zeichen nicht ändert. Infolge dessen wird $f'(x)$ in dem gleichen Intervalle entweder stets wachsen oder stets abnehmen, und das Maximum seines absoluten Betrages wird daher mit einem der Werthe $|f'(x_1)|$ oder $|f'(X_1)|$ und zwar mit dem grösseren von beiden zusammenfallen. Die Wahl dieses Werthes hat vor der am Schlusse des vorigen

Paragraphen angegebenen einer oberen Grenze natürlich den Vorzug. Tritt das Maximum etwa an der unteren Grenze x_1 auf, so können wir setzen

$$(8)\qquad \begin{array}{l|l} x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} & X_2 = X_1 - \frac{f(X_1)}{f'(x_1)}, \\ x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} & X_3 = X_2 - \frac{f(X_2)}{f'(x_2)}, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}$$

Denn da $f'(x)$ bei unverändertem Zeichen ununterbrochen wächst oder abnimmt, so ist auch $|f'(x_2)|$ das Maximum für $(x_2, \cdots X_2)$; und da bei positivem (negativem) $f(x_1)$ die Ableitung $f'(x)$ beständig negativ (positiv) ist, und $f(X_1)$ negativ (positiv) wird, so sind auch die Zeichen auf den rechten Seiten von (8) richtig bestimmt, indem $-\frac{f(x_\lambda)}{f'(x_\lambda)}$ positiv und $-\frac{f(X_\lambda)}{f'(x_\lambda)}$ negativ sein wird.

§ 247. Wie man sieht, stellt sich in (8) die Reihe der Correcturen für die wachsende Reihe der Näherungen $x_1, x_2, x_3, \cdots$, nämlich

$$\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \quad \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}, \quad \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}, \quad \cdots$$

besonders einfach dar. Wir machen darauf aufmerksam, dass dies immer nur an demjenigen Endpunkte der Strecke $(x_1 \cdots X_1)$ eintritt, für welchen

$$\operatorname{sgn}(f(x)f''(x)) = +1$$

gilt. In der That, da f'' sein Zeichen im Intervalle nicht ändert, so wird f' entweder stets zunehmen oder stets abnehmen, dabei aber nicht durch Null gehen, denn das würde der Voraussetzung aus § 245 widersprechen. f' ist also in x_1 absolut am grössten, wenn entweder $f''(x_1) > 0$, $f(x) > 0$ ist, weil dabei f' negativ bleibt und zunimmt, oder wenn $f''(x_1) < 0$, $f(x_1) < 0$ ist, weil dabei f' positiv bleibt und abnimmt. Die beiden anderen Fälle liefern das Maximum von f' in X_1. Gleichzeitig erkennt man durch diese Ueberlegung, dass die aufgestellte Zeichengleichung auch nur an einem der beiden Endpunkte x_1 oder X_1 erfüllt sein kann.

In der Form (8) hat Newton die nach ihm benannte Näherungsmethode aufgestellt.

§ 248. Häufig kann man sich auf die linke Spalte von (8) bei der Ausführung der Rechnung beschränken, wobei man aber freilich den Vortheil aufgiebt, durch die Grösse der Intervalle $(X_1 - x_1)$, $(X_2 - x_2)$, $\cdots$ den Grad der Genauigkeit der erhaltenen Näherungswerthe zu taxiren. Wir wollen zeigen, wie die hierbei nöthigen

Rechnungen am praktischsten durchgeführt, und Wiederholungen bereits gemachter Operationen vermieden werden.

Es reicht aus, dass wir das Vorgehen an einer Gleichung vierten Grades erklären. In der Entwickelung von $f(x+h)$ nach Potenzen von h

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{1\cdot 2} + h^3 \frac{f'''(x)}{1\cdot 2\cdot 3} + h^4 \frac{f^{IV}(x)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$$

setzen wir der Abkürzung wegen

$$f'(x) = f_1(x), \quad \frac{1}{2!} f''(x) = f_2(x), \quad \frac{1}{3!} f'''(x) = f_3(x),$$

$$\frac{1}{4!} f^{IV}(x) = f_4(x)$$

und nehmen an, dass $f(x)$ mit dem Gliede $1\cdot x^4$ beginnt. Dann ist

$$f(x+h) = f(x) + hf_1(x) + h^2 f_2(x) + h^3 f_3(x) + h^4 f_4(x)$$
$$(f_4(x) = 1).$$

Differentiirt man einmal, so entsteht

$$f_1(x+h) = f_1(x) + 2hf_2(x) + 3h^2 f_3(x) + 4h^3 f_4(x);$$

differentiirt man wiederum und dividirt durch 2, dann folgt

$$f_2(x+h) = f_2(x) + 3hf_3(x) + 6h^2 f_4(x);$$

differentiirt man nochmals und dividirt durch 3, so erhält man

$$f_3(x+h) = f_3(x) + 4hf_4(x).$$

Diesen Formeln gemäss bildet man aus den bereits bekannten $f_3(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x)$, $f(x)$ der Reihe nach $f_3(x+h)$, $f_2(x+h)$, $f_1(x+h)$, $f(x+h)$ auf folgende Art: In eine erste Spalte schreibt man f_3, darunter h und addirt; darunter zum zweiten Male h und addirt zur eben erhaltenen Summe; darunter zum dritten Male h und addirt, und ebenso zum vierten Male. Die Schluss-Summe ist $f_3(x+h)$.

Eine zweite Spalte beginnt mit dem Werthe von f_2. Darunter schreibt man das Product aus h und dem ersten Zwischenresultate $(f_3 + h)$ der ersten Spalte und addirt; die Summe ist $f_2 + h(f_3 + h)$. Darunter schreibt man das Product aus h und dem zweiten Zwischenresultate $(f_3 + 2h)$ der ersten Spalte und addirt; die Summe ist $f_2 + 2hf_3 + 3h^2$. Darunter schreibt man das Product aus h und dem dritten Zwischenresultate $(f_3 + 3h)$ der ersten Spalte und addirt; die Summe ist $f_2 + 3hf_3 + 6h^2 = f_2(x+h)$.

Eine dritte Spalte beginnt mit dem Werthe von f_1. Darunter schreibt man das Product aus h und dem ersten Zwischenresultate $f_2 + hf_3 + h^2$ der zweiten Spalte und addirt; die Summe ist $f_1 + hf_2 + h^2 f_3 + h^3$. Darunter u. s. w., u. s. w.

Es entsteht also folgende Tabelle:

f_3	f_2	f_1	f
$+h$	$+h(f_3+h)$	$+h(f_2+hf_3+h^2)$	$+h(f_1+hf_2+h^2f_3+h^3)$
f_3+h	$f_2+hf_3+h^2$	$f_1+hf_2+h^2f_3+h^3$	$f+hf_1+h^2f_2+h^3f_3+h^4$
$+h$	$+h(f_3+2h)$	$+h(f_2+2hf_3+3h^2)$	$=f(x+h)$
f_3+2h	$f_2+2hf_3+3h^2$	$f_1+2hf_2+3h^2f_3+4h^3=f_1(x+h)$	
$+h$	$+h(f_3+3h)$		
f_3+3h	$f_2+3hf_3+6h^2=f_2(x+h)$		
$+h$			

$f_3+4h=f_3(x+h)$.

Die Schlussresultate der einzelnen Spalten geben uns die erste Zeile für eine neue Tabelle, durch welche nach der Division $f(x+h):f_1(x+h)$ und dadurch erlangtem neuen Werthe der Correctur eine zweite Verbesserung angebracht wird.

§ 249. Wir wollen auch an dem Zahlenbeispiele

$$f(x)=x^4+x^3-3x^2-x-4=0$$

die Durchführung der Rechnung zeigen. Es ist

$$f_1(x)=4x^3+3x^2-6x-1,$$
$$f_2(x)=6x^2+3x-3,$$
$$f_3(x)=4x+1.$$

Da $f(1)=-6$, $f(2)=+6$ ist, so liegt eine Wurzel zwischen 1 und 2. Weder $f'(x)=0$, noch $f''(x)=0$ haben zwischen diesen beiden Grenzen eine Wurzel. Wir wählen zum Ausgangspunkte der Methode $x_1=2$, weil $f(2)\cdot f''(2)$ positiv ist. Dann wird

$$f_1(2)=31,\quad f_2(2)=27,\quad f_3(2)=9;$$

$$h=-\frac{6}{31}=-0{,}2\cdots;\quad x_2=2-0{,}2=1{,}8.$$

9	27	31	6
$-0{,}2$	$-1{,}76$	$-5{,}048$	$-5{,}1904$
8,8	25,24	25,952	$+0{,}8096$
$-0{,}2$	$-1{,}72$	$-4{,}704$	
8,6	23,52	21,248	
$-0{,}2$	$-1{,}68$		
8,4	21,84		
$-0{,}2$			
8,2			

$$-\frac{0{,}8096}{21{,}248}=-0{,}04$$

$$x_3=1{,}8-0{,}04=1{,}76$$

8,2	21,84	21,248	0,8096
— 0,04	— 0,3264	0,860544	— 0,81549824
8,16	21,5136	20,387456	— 0,00589824
— 0,04	— 0,3248	— 0,847552	
8,12	21,1888	19,539904	
— 0,04	— 0,3232		$+\frac{0,00589824}{19,539904} = 0,000302$
8,08	20,8656		$x_4 = 1,76 + 0,000302 = 1,760302.$
— 0,04			
8,04			

§ 250. Die Benutzung einer unteren und einer oberen Grenze x_1 und X_1 für die Wurzel ξ bietet ausser dem Vortheile, eine Orientirung über das Mass der Annäherung zu geben, noch den, übermässig weit getriebene Berechnungen von x_1 und X_1 zu vermeiden, da man nur je eine Decimalstelle über die übereinstimmenden Stellen hinaus zu gehen braucht. Arbeitet man hingegen, wie dies in den letzten Paragraphen geschah, nur mit einer Serie von Näherungswerthen, x_1, x_2, x_3, $\cdots$, dann bleibt man im Zweifel, wie weit die Berechnungen der Correcturen h fortgesetzt werden sollen, um weder erreichbare Genauigkeit bei Seite zu lassen, noch überflüssige Rechnungen durchzuführen. Es ist also womöglich hierüber ein Kennzeichen abzuleiten.

Man kann nach § 194

$$f(x_1) + h_1 f'(x_1) + \frac{h_1^2}{1 \cdot 2} f''(x_1 + \vartheta h_1) = 0 \tag{9}$$

schreiben Der Werth von h_1' ist durch die Newton'sche Gleichung

$$f(x_1) + h_1' f'(x_1) = 0 \tag{9a}$$

bestimmt. Wir wollen annehmen, es sei der wirkliche Fehler

$$h_1 = \left(\frac{1}{10}\right)^{\alpha+1} \cdot k_1 \qquad (1 \leqq k_1 < 10),$$

d. h. die Darstellung von h_1 in einem Decimalbruche beginne mit 0,00 ..., wo auf das Komma noch α Nullen folgen.

Aus (9) und (9a) ergiebt sich

$$h_1' - h_1 = h_1^2 \frac{f''(x_1 + \vartheta h_1)}{2 f'(x_1)}; \tag{9b}$$

das ist die Grösse des Fehlers, den wir begehen, wenn wir statt der wirklichen Correctur h_1 den durch (9a) bestimmten Näherungswerth nehmen. Wäre der Werth des Bruches auf der rechten Seite von (9b) gleich 1, dann würde dieser Fehler $= h_1^2$ sein, und seine Darstellung als Decimalbruch würde erst in der $2\alpha^{\text{ten}}$ Stelle nach dem Komma

eine von Null verschiedene Ziffer aufweisen. Es wäre also nicht praktisch, bei der Berechnung von h_1' über diese $2\alpha^{te}$ Stelle hinauszugehen. In (9^b) tritt nun freilich rechts noch als Factor $f''(x_1 + \vartheta h_1) : 2f'(x_1)$ hinzu, für den wir in genügender Annäherung $f''(x_1) : 2f'(x_1)$ setzen können. Dieser verschiebt die Verhältnisse nicht wesentlich. Ist sein Werth $10^\beta \cdot \varkappa$, wo $\varkappa$ zwischen 1 und 10 liegt, so macht sich der Fehler in der $(2\alpha - \beta)^{ten}$ Stelle geltend, und bei ihr kann die Division, welche auf h_1' führt, füglich abgebrochen werden. Ist β positiv, so muss man früher aufhören, ist β negativ, dann kann man über die $(2\alpha)^{te}$ Stelle hinausgehen. Bei unseren Darlegungen ist h_1 als bekannt benutzt; um diese Annahme auszuschalten, reicht es aus, h_1' selbst an die Stelle von h_1 zu setzen. Daraus entnimmt man dann die Regel: Beginnt die Division $f(x_1) : f'(x_1)$ mit α Nullen, so setzt man die Rechnung bis zur $2\alpha^{ten}$ Decimalstelle fort, um h_1' den vortheilhaftesten Werth zu ertheilen.

§ 251. Wir beschäftigen uns weiter mit einer in ihren Grundzügen von Daniel Bernoulli angegebenen, von Lagrange und Euler weiter ausgebildeten, und besonders von Fourier erweiterten Methode*). Diese beruht darauf, dass die Potenzen grösserer Zahlen die gleichhohen Potenzen niederer Zahlen um so mehr übertreffen, je höher die Ordnung der Potenz ist. Wenn nun wie gewöhnlich $f(z)$ als von vielfachen Wurzeln befreit vorausgesetzt wird, dann ordnen wir die Wurzeln nach der absteigenden Grösse ihrer absoluten Beträge, $z_1, z_2, z_3, \cdots z_n$, und es sei zunächst $|z_1| > |z_2|$; jetzt ist sicher z_1 eine reelle Wurzel, da conjugirt complexe Werthe gleiche absolute Beträge besitzen. In der Gleichung

$$(10) \qquad s_k = z_1^k \left(1 + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^k + \left(\frac{z_3}{z_1}\right)^k + \cdots + \left(\frac{z_n}{z_1}\right)^k\right)$$

haben alle auf die 1 in der Klammer folgenden Summanden absolute Beträge, die kleiner als 1 sind und sich mit wachsendem k der Null beliebig nähern. Es ist folglich auch der Quotient $s_k : z_1^k$ eine Grösse, die sich mit wachsendem k der Einheit beliebig nähert.

Hieraus kann man auf verschiedene Arten eine Näherungsmethode gründen, welche zu derjenigen Wurzel von $f(z) = 0$ führt, die den höchsten absoluten Betrag unter den z_i aufweist. Am nächsten liegt

---

*) D. Bernoulli, Comment. Petrop. III. Lagrange, Œuvres t. 8. S. 168. Euler, Introduct. in anal. inf. I, Cap. 17 und Anleitung z. Algebra. T. II § 231. Petersburg 1771. Fourier, Analyse des équations déterminées. S. 68 ff. Vgl. Fr. Cohn, Ueber die in recurrirender Weise gebildeten Grössen u. s. w. Math. Ann. 44. S. 473.

es, die Reihe der $\sqrt[k]{s_k}$ bei wachsendem k als Reihe der Näherungswerthe zu nehmen. Ebenso können wir aber auch die Reihe der Quotienten $s_{k+1} : s_k$ benutzen. Beide Methoden sollen in den folgenden Paragraphen durchgeführt werden. Zunächst jedoch wollen wir einige Ueberlegungen hinsichtlich der Art der Annäherung anstellen.

Wegen der Anordnung der $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \cdots$ hat man

$$\varepsilon_\lambda = \varepsilon_1 \cdot r_\lambda \left[{}^{c}_{s}\, \omega_\lambda\right] \qquad (0 < r_\lambda < 1;\ r_\lambda \geqq r_{\lambda+1}),$$

$$s_k = \varepsilon_1^k + \varepsilon_2^k + \cdots + \varepsilon_n^k = \varepsilon_1^k \left(1 + r_2^k \left[{}^{c}_{s}\, k\omega_2\right] + \cdots + r_n^k \left[{}^{c}_{s}\, k\omega_n\right]\right).$$

Als symmetrische Function der Wurzeln ist s_k reell, und da ε_1^k es auch ist, so folgt

$$(11) \qquad s_k = \varepsilon_1^k \left(1 + \tau_k (n-1) r_2^k\right) \qquad (-1 < \tau_k < 1).$$

Ist k schon einigermassen gross, dann können wir setzen

$$(11^a) \qquad \sqrt[k]{s_k} = \varepsilon_1 \left(1 + \sigma_k \tfrac{n-1}{k} r_2^k\right) \qquad (-1 < \sigma_k < 1)$$

und

$$(11^b) \qquad \frac{s_{k+1}}{s_k} = \varepsilon_1 \left(1 + \varrho_k (n-1) r_2^k\right) \qquad (-1 < \varrho_k < 1).$$

Man erkennt daraus, dass wirklich in beiden Fällen die linken Seiten zur Annäherung an ε_1 benutzt werden können, und dass die Genauigkeit eine um so grössere ist, je kleiner $r_2 = |\varepsilon_2| : |\varepsilon_1|$ wird.

§ 252. Wir gehen jetzt auf (11^a) näher ein und wollen zunächst dabei den einfachsten Fall behandeln, nämlich den, dass

$$|\varepsilon_1| > |\varepsilon_2| > |\varepsilon_3| > \cdots > |\varepsilon_n|$$

ist; dabei sind dann die Wurzeln der vorgelegten Gleichung

$$(12) \qquad f(\varepsilon) \equiv \varepsilon^n - c_1 \varepsilon^{n-1} + c_2 \varepsilon^{n-2} - c_3 \varepsilon^{n-3} + \cdots \mp c_n = 0$$

reell. Sind wir im Besitze der Werthe von $s_1, s_2, \cdots s_{k-1}, s_k$, so hat es natürlich keinen Zweck, ausser s_k auch die s mit niedrigerem Index zur Berechnung von ε_1 zu verwenden; man wird also sogleich $\sqrt[k]{s_k}$ nehmen. Es kommt folglich darauf an, möglichst schnell zu einem s_k mit hinlänglich hohen Index zu gelangen. Dazu benutzen wir am besten die in § 111 abgeleitete Methode, welche uns gestattet, aus (12) eine Gleichung mit den Wurzeln $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \cdots \varepsilon_n^2$ herzustellen. Wir bilden nämlich das Product $f(\varepsilon) \cdot f(-\varepsilon)$; dies enthält nur gerade Potenzen von ε; wir führen in diesen Ausdruck statt ε^2 eine neue Unbestimmte ein, welche wir wieder mit ε bezeichnen, und erhalten so das Polynom der gewünschten Gleichung mit den Wurzeln $\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2, \cdots \varepsilon_n^2$. Wir schreiben diese Gleichung

$$z^n - c_1^{(2)} z^{n-1} + c_2^{(2)} z^{n-2} - c_3^{(2)} z^{n-3} + \cdots \pm c_n^{(2)} = 0.$$

Hieraus bilden wir auf dem gleichen Wege die Gleichung

$$z^n - c_1^{(4)} z^{n-1} + c_2^{(4)} z^{n-2} - c_3^{(4)} z^{n-3} + \cdots \pm c_n^{(4)} = 0$$

mit den Wurzeln z_1^4, z_2^4, $\cdots$ z_n^4 und allgemein

$$z^n - c_1^{(\alpha)} z^{n-1} + c_2^{(\alpha)} z^{n-2} - c_3^{(\alpha)} z^{n-3} + \cdots \pm c_n^{(\alpha)} = 0 \tag{13}$$

mit den Wurzeln z_1^α, z_2^α, $\cdots$ z_n^α, wobei wir unter α eine Potenz von 2 zu verstehen haben. In (13) bedeutet

$$\begin{aligned} c_1^{(\alpha)} &= z_1^\alpha + z_2^\alpha + z_3^\alpha + \cdots = s_\alpha, \\ c_2^{(\alpha)} &= (z_1 z_2)^\alpha + (z_1 z_3)^\alpha + \cdots, \\ c_3^{(\alpha)} &= (z_1 z_2 z_3)^\alpha + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

so dass man s_α auf verhältnissmässig bequeme Weise bekommt. Das abgeleitete System liefert aber noch mehr. Bei hinlänglich grossem α wird jedesmal das erste Glied auf jeder der rechten Seiten den ungefähren Werth der Gesammtsumme angeben, genau wie dies für s_α schon in § 251 bewiesen ist. Man hat deshalb auf Grund der gleichen Ueberlegungen für wachsende α

$$\lim c_1^{(\alpha)} = z_1^\alpha, \quad \lim c_2^{(\alpha)} = (z_1 z_2)^\alpha, \quad \lim c_3^{(\alpha)} = (z_1 z_2 z_3)^\alpha, \quad \cdots$$

oder eigentlich nur

$$|z_1| = \lim \sqrt[\alpha]{c_1^{(\alpha)}}, \quad |z_1 z_2| = \lim \sqrt[\alpha]{c_2^{(\alpha)}}, \quad |z_1 z_2 z_3| = \lim \sqrt[\alpha]{c_3^{(\alpha)}}, \quad \cdots$$

und folglich

$$|z_1| = \lim \sqrt[\alpha]{c_1^{(\alpha)}}, \quad |z_2| = \lim \sqrt[\alpha]{\frac{c_2^{(\alpha)}}{c_1^{(\alpha)}}}, \quad |z_3| = \lim \sqrt[\alpha]{\frac{c_3^{(\alpha)}}{c_2^{(\alpha)}}}, \quad \cdots, \tag{14}$$

so dass also durch die Reihe der Coefficienten von (13) sofort Näherungswerthe für sämmtliche Wurzeln von $f(z) = 0$ geliefert werden.

Wir wollen die Rechnung an einem Beispiele durchführen.

$z^3 - 4z^2 - z + 3 = 0$	hat die	Wurzeln	$z_1,\ z_2,\ z_3$;
$z^3 - 18z^2 + 25z - 9 = 0$	„ „	„	$z_1^2,\ z_2^2,\ z_3^2$;
$z^3 - 274z^2 + 301z - 81 = 0$	„ „	„	$z_1^4,\ z_2^4,\ z_3^4$;
$z^3 - 74474z^2 + 46213z - 6561 = 0$	„ „	„	$z_1^8,\ z_2^8,\ z_3^8$.

Nun ist

$$\sqrt[5]{74474} = 4{,}064439 \cdots,$$

$$\sqrt[8]{\frac{46213}{74474}} = 0{,}942095 \cdots,$$

$$\sqrt[8]{\frac{6561}{46213}} = 0{,}783478 \cdots.$$

Die wahren Werthe der Wurzeln sind ihrer absoluten Grösse nach geordnet

$$z_1 = 4{,}0644364\cdots;\ z_2 = -0{,}89196520\cdots;\ z_3 = 0{,}82752156\cdots.$$

Der erste der drei Näherungswerthe ist also schon hinreichend genau. Die beiden anderen sind deswegen minder gut, weil die absoluten Werthe der Wurzeln sich nur wenig von einander unterscheiden.

§ 253. Falls alle Wurzeln der vorgelegten Gleichung reell sind, bleibt, wie man leicht sieht, die angegebene Methode auch dann noch wirksam, wenn mehrere der Wurzeln einander gleich, oder wenn sie nur durch ihr Vorzeichen von einander verschieden sind. Ist z. B.

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_4| > |z_5| > \cdots,$$

dann wird für hinlänglich hohe $\alpha = 2^a$ mit beliebiger Annäherung

$$c_1^{(\alpha)} = 4\,|z_1|^{\alpha},\quad c_2^{(\alpha)} = 6\,|z_1|^{2\alpha},\quad c_3^{(\alpha)} = 4\,|z_1|^{3\alpha},\quad c_4^{(\alpha)} = |z_1|^{4\alpha},$$
$$c_5^{(\alpha)} = |z_1^4 z_5|^{\alpha},\quad c_6^{(\alpha)} = |z_1^4 z_5 z_6|^{\alpha},\ \cdots$$

gesetzt werden können, und also bleiben die Formeln (14) bestehen. Welches Vorzeichen dann schliesslich jedem einzelnen z_i der $z_1, z_2, \cdots$ zu geben ist, das kann durch Substitution von z_i in $f(z)$ ermittelt werden; häufig, wie z. B. beim vorigen Beispiele, reicht bereits die Betrachtung von $c_1 = z_1 + z_2 + \cdots + z_n$ aus.

§ 254. Anders stellt es sich, wenn $f(z) = 0$ auch complexe Wurzeln besitzt. Wir wollen uns der Uebersichtlichkeit halber auf den einfachsten Fall beschränken, dass nur zwei complexe Wurzeln von gleichem, höchsten absoluten Werthe existiren

$$z_1 = \varrho\left[\cos\varphi\right],\quad z_2 = \varrho\left[\cos -\varphi\right],$$

und dass $z_3 < \varrho$ wird. Man hat hierbei

$$(15)\qquad \begin{aligned} c_1^{(\alpha)} &= 2\varrho^{\alpha}\cos\alpha\varphi + z_3^{\alpha} + z_4^{\alpha} + \cdots,\\ c_2^{(\alpha)} &= \varrho^{2\alpha} + 2\varrho^{\alpha}\cos\alpha\varphi\cdot z_3^{\alpha} + \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und es wird also zwar die Betrachtung von $c_1^{(\alpha)}$ keine Näherungswerthe liefern, wohl aber kann man die Reihe der $\sqrt[2\alpha]{c_2^{(\alpha)}}$ bei wachsenden α als Näherungswerthe für den Modul ϱ wählen.

Als Beispiel möge dienen

$z^3 - 3z^2 + 5z - 2 = 0$	mit den Wurzeln	$z_1,\ z_1,\ z_2$;
$z^3 + z^2 + 13z - 4 = 0$	„ „ „	$z_1^2,\ z_2^2,\ z_3^2$;
$z^3 + 25z^2 + 177z - 16 = 0$	„ „ „	$z_1^4,\ z_2^4,\ z_3^4$;
$z^3 - 271z^2 + 32129z - 256 = 0$	„ „ „	$z_1^8,\ z_2^8,\ z_3^8$;
$z^3 - 9183z^2 + 10321336569z - 65536 = 0$	„ „ „	$z_1^{16},\ z_2^{16},\ z_3^{16}$.

Die letzte Gleichung giebt als Näherungswerth für ϱ

$$\sqrt[32]{1032133889} = 1{,}912845 \cdots;$$

der wahre Werth ist $\varrho = 1{,}91318893 \cdots$.

Hat man so einen Werth für ϱ gefunden, dann giebt die erste Gleichung von (15), auf das Anfangsglied rechts beschränkt, den ungefähren Werth von φ durch

$$\cos \alpha\varphi = \frac{c_1^{(\alpha)}}{2\varrho^\alpha} = \frac{c_1^{(\alpha)}}{2\sqrt{c_2^{(\alpha)}}}$$

freilich nur bis auf Vielfache von $\frac{2\pi}{\alpha}$. So findet man beim obigen Beispiele

$$16\varphi = 81^0 48' + 2\varkappa\pi,$$

während in Wirklichkeit

$$\varphi = 50^0 7' 12'' \quad \text{und} \quad 16\varphi = 81^0 55' 12'' + 4\pi$$

ist. Hinsichtlich der Bestimmung des noch unbekannten ganzzahligen Factors $\varkappa$ sowie der weiteren bei dieser Methode auftretenden Verhältnisse verweisen wir auf die ausführliche Enke'sche Abhandlung: „Allgemeine Auflösung der numerischen Gleichungen“ *). Hier wollen wir noch erwähnen, dass wie die Wurzel von grösstem so auch die vom kleinsten absoluten Betrage berechnet werden kann. Um dies durchzuführen, ist es nur nöthig, aus der vorgelegten Gleichung durch die Substitution $z = \frac{1}{\zeta}$ eine andere herzuleiten, deren Wurzeln die reciproken Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Nach § 112 erhält man bei dieser Methode

$$\begin{aligned}
c_n\zeta^n &- c_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots = 0,\\
c_n^{(2)}\zeta^n &- c_{n-1}^{(2)}\zeta^{n-1} + \cdots = 0,\\
c_n^{(4)}\zeta^n &- c_{n-1}^{(4)}\zeta^{n-1} + \cdots = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

so dass in dem Falle, in welchem nur eine Wurzel $z_n = \frac{1}{\zeta_n}$ kleinsten Moduls besteht,

$$|z_n| = \lim \sqrt[\alpha]{\frac{c_n^{(\alpha)}}{c_{n-1}^{(\alpha)}}}$$

gesetzt werden kann.

Im Beispiele dieses Paragraphen ergiebt sich daher

*) J. für M. Bd. 22, S. 193.

$$\sqrt[16]{\frac{65536}{1032133889}} = 0{,}546602\cdots,$$

und der wahre Werth ist $0{,}54660235\cdots$.

§ 255. Wir gehen jetzt zur Behandlung der Formel

$$(11^b) \qquad \frac{s_{k+1}}{s_k} = z_1(1 + \varrho_k(n-1)r_2^k) \qquad (-1 < \varrho_k < 1)$$

über. Die Berechnung der $s_0, s_1, \cdots s_{n-1}$ muss nach den Formeln aus § 91 oder 93 geschehen; die weiteren s findet man am einfachsten durch die Recursionsformel

$$s_\alpha = c_1 s_{\alpha-1} - c_2 s_{\alpha-2} + c_3 s_{\alpha-3} - \cdots \mp c_n s_{\alpha-n}.$$

So ergiebt sich bei dem Beispiele aus § 252

$$z^3 - 4z^2 - z + 3 = 0$$

der Reihe nach

$$s_0 = 3,\ s_1 = 4,\ s_2 = 18,\ s_3 = 67,\ s_4 = 274,\ s_5 = 1109,$$
$$s_6 = 4509,\ s_7 = 18323,\ s_8 = 74474;$$
$$\frac{s_8}{s_7} = 4{,}0645.$$

Existiren hingegen mehrere reelle Wurzeln von gleichem höchsten Modul, etwa $\varkappa$ positive und λ negative,

$$z_1 = z_2 = \cdots = z_\varkappa = -z_{\varkappa+1} = -z_{\varkappa+2} = \cdots = -z_{\varkappa+\lambda},$$
$$|z_1| > |z_{\varkappa+\lambda+1}|,$$

dann erkennt man sofort, dass

$$s_{2k} = (\varkappa + \lambda)|z_1|^{2k} + \cdots,\quad s_{2k+1} = (\varkappa - \lambda)|z_1|^{2k+1} + \cdots,$$

$$(16)\quad \lim\frac{s_{2k+2}}{s_{2k+1}} = \frac{\varkappa+\lambda}{\varkappa-\lambda}|z_1|,\quad \lim\frac{s_{2k+1}}{s_{2k}} = \frac{\varkappa-\lambda}{\varkappa+\lambda}|z_1|,$$

$$\lim\frac{s_{2k+2}}{s_{2k}} = \lim\frac{s_{2k+1}}{s_{2k-1}} = z_1^2 = z_2^2 = \cdots = z_{\varkappa+\lambda}^2 \qquad (\varkappa \neq \lambda)$$

werden wird. Es besteht also zwar kein $\lim(s_{k+1} : s_k)$, aber die abgeleiteten Formeln geben dennoch die Möglichkeit, die Werthe von z, $\varkappa$ und λ zu berechnen. Auch bei $\varkappa = \lambda$ bleibt $\lim(s_{2\varkappa+2} : s_{2k}) = z_1^2$ bestehen, dagegen fällt die Grenze für $(s_{2k+1} : s_{2k-1})$ weg.

Wir nehmen jetzt als Wurzeln höchsten Moduls ein einziges Paar conjugirt complexer Werthe an

$$z_1 = \varrho\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\varphi\right],\quad z_2 = \varrho\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}-\varphi\right],$$

setzen für die übrigen z

$$z_3 = r_3\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\omega_3\right],\quad \cdots\quad z_n = r_n\left[\begin{smallmatrix}c\\s\end{smallmatrix}\omega_n\right] \qquad (r_\lambda \geqq r_{\lambda+1})$$

und erhalten für die Potenzsummen

$$(17)\qquad \begin{aligned} s_k &= 2\varrho^k \cos k\varphi + (\varepsilon_3^k + \varepsilon_4^k + \cdots + \varepsilon_n^k) \\ &= 2\varrho^k \cos k\varphi + \vartheta_k (n-2) r_3^k \qquad (-1 \leqq \vartheta_k \leqq 1;\ r_3 < \varrho). \end{aligned}$$

Hieraus erkennt man, dass $s_{k+1} : s_k$ keinen festen Grenzwerth haben kann, weil dies bei $\cos(k+1)\varphi : \cos k\varphi$ nicht eintritt; trotzdem ist man aber im Stande, aus den Werthen der s_k sowohl ϱ als φ zu berechnen.

Sind nämlich die Glieder der Zeichenreihe

$$(18)\quad \operatorname{sgn}\cos\varphi,\ \operatorname{sgn}\cos 2\varphi,\ \operatorname{sgn}\cos 3\varphi,\ \cdots\ \operatorname{sgn}\cos k\varphi,\ \cdots$$

bekannt, dann kann man daraus mit beliebiger Genauigkeit den Werth des Winkels φ ableiten. Wir haben φ zwischen 0 und 2π. Es mögen in (18) Serien von aufeinander folgenden positiven und negativen Gliedern vorkommen und zwar der Reihe nach

$$\nu_1 \text{ Glieder} > 0,\quad \nu_2 \text{ Glieder} < 0,\quad \nu_3 \text{ Glieder} > 0,\ \cdots,$$

wobei ν_1 auch gleich Null werden kann, während alle anderen ν positive ganze Zahlen sind. Da für jedes k die Gleichung $\cos k(2\pi - \varphi) = \cos k\varphi$ gilt, so bestimmt die Zeichenangabe für (18) den Winkel φ innerhalb des einfachen Kreises nicht unzweideutig, und wir können φ zwischen 0 und π gelegen denken. Nun ist

$$\begin{aligned} &\nu_1\varphi < \tfrac{\pi}{2} < (\nu_1+1)\varphi, && \tfrac{\pi}{2(\nu_1+1)} < \varphi < \tfrac{\pi}{2\nu_1}, \\ &(\nu_1+\nu_2)\varphi < \tfrac{3\pi}{2} < (\nu_1+\nu_2+1)\varphi, && \tfrac{3\pi}{2(\nu_1+\nu_2+1)} < \varphi < \tfrac{3\pi}{2(\nu_1+\nu_2)}, \\ &(\nu_1+\nu_2+\nu_3)\varphi < \tfrac{5\pi}{2} < (\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)\varphi, && \tfrac{5\pi}{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3+1)} < \varphi < \tfrac{5\pi}{2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)}, \\ &\cdots\cdots\cdots

Wenn deshalb in (17) die Zeichen der s_k stets mit den Zeichen der entsprechenden Glieder von (19) übereinstimmen würden, könnte man (19ª) zur Bestimmung des Winkels φ direct auf die Reihe

(18ª) $$\operatorname{sgn} s_1, \quad \operatorname{sgn} s_2, \quad \operatorname{sgn} s_3, \quad \cdots \quad \operatorname{sgn} s_k$$

verwenden. Ist aber $r_3 : \varrho = | z_3 : z_1 |$ nicht besonders klein, dann lässt sich über die Anfangsglieder von (18ª) gar nichts aussagen. Trotzdem können wir nachweisen, dass (19ª) in Gültigkeit bleibt.

Um $\frac{\pi}{2}$ und um $\frac{3\pi}{2}$ grenzen wir zwei Winkelräume ab $\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \cdots \frac{\pi}{2} + \vartheta\right)$ und $\left(\frac{3\pi}{2} - \vartheta \cdots \frac{3\pi}{2} + \vartheta\right)$ von solcher Kleinheit, dass nicht zwei aufeinander folgende Vielfache $\alpha\varphi$ und $(\alpha + 1)\varphi$ in einen und denselben dieser Räume fallen können. Ferner wählen wir k so gross, dass

$$\frac{1}{2}(n-2)(r_3 : \varrho)^k < |\sin\vartheta|$$

wird, dann kann das Ergänzungsglied in (17) das Zeichen von s_k nur dann gegen das Zeichen von $2\varrho^k \cos k\varphi$ verändern, wenn $(k-1)\varphi$ und $(k+1)\varphi$ ausserhalb und $k\varphi$ innerhalb eines der abgegrenzten Winkelräume liegen. Dabei haben jedoch s_{k-1} und s_{k+1} verschiedene Vorzeichen, und also kann der Zeichenwechsel in (18ª) gegen den in (18) höchstens um eine Stelle verschoben sein. Dies ist aber bei der Verwendung von (19ª) ebenso gleichgültig, wie der Umstand, dass in den Anfangsgliedern der Reihen (18) und (18ª) eine endliche Zahl von Unterschieden vorkommen. Man kann daher aus (19ª) mit Hülfe von (18ª) den Winkel φ bestimmen, wenn w_m die Anzahl der Zeichenwechsel in $s_1, s_2, \cdots s_m$ bedeutet.

Existiren mehrere Paare von complexen Wurzeln höchsten Moduls, oder auch nur ein Paar nebst anderen reellen Wurzeln gleichen Moduls, so gestalten sich die Verhältnisse zu complicirt, als dass wir hier darauf eingehen könnten. Schon in dem Falle

$$z_1 = \varrho, \quad z_2 = \varrho, \quad z_3 = \varrho\left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\varphi\right], \quad z_4 = \varrho\left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} - \varphi\right], \quad |z_5| < \varrho, \quad \cdots,$$

wobei die Potenzsumme

$$s_k = 2\varrho^k(1 + \cos k\varphi) + (z_5^k + \cdots)$$

wird, ist eine Einsicht in die Art der Näherung schwer zu erlangen. Zwar werden wir dabei im Allgemeinen $\operatorname{sgn} s_k = +1$ erhalten; aber $\frac{s_{k+1}}{s_k}$ kann zwischen 0 und ∞ schwanken.

§ 256. Bei derartigen verwickelten Verhältnissen ist es häufig vortheilhaft, eine Hülfsgleichung aufzustellen, deren Wurzeln angenähert die ν Wurzeln der höchsten Moduln für die Gleichung $f(z) = 0$ vom

n^{ten} Grade sind. Jacobi hat, einer Andeutung Fourier's folgend, in den „Observatiunculae ad theoriam aequationum pertinentes", Werke III, 280, die Bildung dieser Gleichung

$$z^\nu - \gamma_1 z^{\nu-1} + \gamma_2 z^{\nu-2} - \cdots \pm \gamma_\nu = 0 \tag{20}$$

angegeben. Wenn die Bedingung

$$|z_1| \geqq |z_2| \geqq \cdots |z_\nu| > |z_{\nu+1}| \geqq |z_{\nu+2}| \geqq \cdots$$

erfüllt ist, dann hat man, abgesehen von Factoren, die man der Einheit beliebig nahe bringen kann, die Reihe der Gleichungen

$$\begin{aligned} s_k &= z_1^k + z_2^k + \cdots + z_\nu^k, \\ s_{k+1} &= z_1^{k+1} + z_2^{k+1} + \cdots + z_\nu^{k+1}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und daraus ergiebt sich mit gleicher Annäherung

$$\begin{aligned} &s_{k+\nu} - \gamma_1 s_{k+\nu-1} + \gamma_2 s_{k+\nu-2} - \cdots \pm \gamma_\nu s_k = 0, \\ &s_{k+\nu+1} - \gamma_1 s_{k+\nu} + \gamma_2 s_{k+\nu-1} - \cdots \pm \gamma_\nu s_{k+1} = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &s_{k+2\nu-1} - \gamma_1 s_{k+2\nu-2} + \gamma_2 s_{k+2\nu-3} - \cdots \pm \gamma_\nu s_{k+\nu-1} = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Eliminirt man aus (20) und (21) die noch unbekannten Coefficienten γ_1, γ_2, $\cdots \gamma_\nu$, so entsteht

$$\begin{vmatrix} z^\nu & z^{\nu-1} & \cdots & 1 \\ s_{k+\nu} & s_{k+\nu-1} & \cdots & s_k \\ s_{k+\nu+1} & s_{k+\nu} & \cdots & s_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{k+2\nu-1} & s_{k+2\nu-2} & \cdots & s_{k+\nu-1} \end{vmatrix} = 0 \tag{22}$$

als eine Art von Näherungsgleichung für die ν höchsten Wurzeln von $f(z) = 0$. So ist für $\nu = 2$ die Gleichung (20) zu setzen:

$$(s_{k+1}^2 - s_k s_{k+2}) z^2 - (s_{k+1} s_{k+2} - s_k s_{k+3}) z + (s_{k+2}^2 - s_{k+1} s_{k+3}) = 0.$$

§ 257. Es bleibt jetzt noch übrig, die Methode zur Berechnung der s_k zu besprechen. Wir haben bereits am Anfange von § 255 erwähnt, dass es vortheilhaft sei, s_1, s_2, $\cdots s_{n-1}$ nach den Formeln des § 91 oder § 93 und die weiteren s dann nach der Recursionsformel

$$s_{n+k} - c_1 s_{n+k-1} + c_2 s_{n+k-2} - \cdots \pm c_n s_k = 0$$

zu bestimmen. Hierzu hat Euler eine Bemerkung gemacht, die theoretisch wie praktisch von gleicher Wichtigkeit ist.

Der Einfachheit halber dürfen wir annehmen, dass $f(z)$ ohne vielfache Factoren sei. Dann wollen wir den Bruch, dessen Zähler eine willkürliche Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades sein mag,

$$\frac{\varphi(z)}{f(z)} = \frac{a_0 z^{n-1} + a_1 z^{n-2} + a_2 z^{n-3} + \cdots + a_{n-1}}{z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n}$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varphi(z_\lambda)}{(z - z_\lambda) f'(z_\lambda)} \qquad (\S\ 39)$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varphi(z_\lambda)}{f'(z_\lambda)} + \frac{1}{z^2} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varphi(z_\lambda) z_\lambda}{f'(z_\lambda)} + \frac{1}{z^3} \sum_{\lambda=1}^{n} \frac{\varphi(z_\lambda) z_\lambda^2}{f'(z_\lambda)} + \cdots,$$

und dessen Entwickelung wir kürzer

$$= \frac{1}{z} \sigma_0 + \frac{1}{z^2} \sigma_1 + \frac{1}{z^3} \sigma_2 + \cdots$$

setzen, mit $f(z)$ multipliciren und erhalten dadurch mittels Vergleichung der Coefficienten gleichhoher Potenzen von z auf beiden Seiten die Reihe recurrirender Gleichungen

$$\sigma_0 = a_0, \quad \sigma_1 - c_1 \sigma_0 = a_1, \quad \sigma_2 - c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_0 = a_2, \quad \cdots$$

$$(23) \quad \sigma_{n+k} - c_1 \sigma_{n+k-1} + c_2 \sigma_{n+k-2} - \cdots \pm c_n \sigma_k = 0 \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

Hieraus erkennt man zuerst, dass zu jeder beliebigen Wahl von reellen Werthen für $\sigma_0, \sigma_1, \cdots \sigma_{n-1}$ eine Function $\varphi(z)$ gefunden werden kann, welche die Anfangsglieder der Entwickelung

$$\frac{1}{z} \sigma_0 + \frac{1}{z^2} \sigma_1 + \cdots + \frac{1}{z^n} \sigma_{n-1}$$

liefert, und weiter dass die σ_{n+k} derselben Recursionsformel unterliegen, nach welcher die Bildung der s_{n+k} vor sich geht. Weil ferner

$$\sigma_k = \frac{\varphi(z_1)}{f'(z_1)} z_1^k + \frac{\varphi(z_2)}{f'(z_2)} z_2^k + \cdots + \frac{\varphi(z_n)}{f'(z_n)} z_n^k$$

ist, so kann man an die σ dieselben Ueberlegungen knüpfen und aus diesen gleiche Resultate ziehen, denen wir bereits bei den s begegnet sind. Nothwendig ist es dazu nur, dass der Coefficient von z_1^k, d. h. dass $\varphi(z_1)$ nicht verschwindet. Das könnte aber nur dann eintreten, wenn $f(z)$ reductibel, und $\varphi(z)$ zu ihm nicht relativ prim wäre.

Wir haben also, wenn wir den einfachsten Fall $|z_1| > |z_2|$ ins Auge fassen, auch hier der Gleichung (11[b]) entsprechend,

$$z_1 = \lim \frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}.$$

Dabei sind $\sigma_0, \sigma_1, \cdots \sigma_{n-1}$ völlig willkürlich, und die übrigen σ werden nach der Recursionsformel (23) gebildet. Hierbei tritt sogar noch gegen die frühere Methode ein Vortheil zu Tage, wenn man einen, ja leicht zu findenden Näherungswerth q für die höchste Wurzel kennt und dann für die Anfangswerthe die Reihe

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 0, \quad \cdots \quad \sigma_{n-2} = 1, \quad \sigma_{n-1} = q$$

nimmt, indem dabei die Näherung schneller vor sich geht, als wenn man $s_0, s_1, \cdots s_{n-1}$ benutzt; denn man beginnt dann sofort mit einem genäherten Resultate, welches auf dem zweiten Wege erst nach einer Anzahl von Schritten erreicht werden würde.

Wir wollen dies endlich auf das Beispiel des § 252

$$z^3 - 4z^2 - z + 3 = 0$$

anwenden, indem wir

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_1 = 1, \quad \sigma_2 = 4$$

setzen und dann mittels

$$\sigma_{\alpha+3} = 4\sigma_{\alpha+2} + \sigma_{\alpha+1} - 3\sigma_\alpha$$

die weiteren σ berechnen. Dabei finden wir

$$\sigma_3 = 17, \quad \sigma_4 = 69, \quad \sigma_5 = 281, \quad \sigma_6 = 1142, \quad \sigma_7 = 4642, \quad \sigma_8 = 18867,$$

$$\frac{\sigma_8}{\sigma_7} = 4{,}06442 \cdots,$$

und dies stimmt mit der höchsten Wurzel der Gleichung in den vier ersten Decimalstellen überein.

Dreiundzwanzigste Vorlesung.

Algorithmen zur Berechnung der Wurzeln.

§ 258. Die Newton'sche Näherungsmethode besteht im Wesentlichen darin, dass man von dem, einer reellen Wurzel ζ von $f(z) = 0$ hinreichend angenäherten Werthe z_1 aus mittels der Formel

$$z_{\lambda+1} = z_\lambda - \frac{f(z_\lambda)}{f'(z_\lambda)} \tag{1}$$

der Reihe nach $z_2, z_3, \cdots$ berechnet. Den Coefficienten der höchsten Potenz von z in $f(z)$ setzen wir durchgehends als positiv voraus. Dann lässt sich beweisen, dass $\zeta = \lim_{n=\infty} z_n$ wird. Wir wollen allgemein die Frage behandeln, ob es noch andere, durch eine rationale Gleichung

$$z_{\lambda+1} = F(z_\lambda) \tag{2}$$

bestimmte Algorithmen giebt, für die bei Wiederholung der Operation von bestimmten Werthen z_1 aus ebenfalls $\zeta = \lim_{n=\infty} z_n$ wird*). Gesetzt,

*) Vgl. hierzu: L. Sancery: De la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines des équations. Nouv. Ann. (2) I. S. 305. — E. Schröder:

dies wäre der Fall, dann müsste, weil ja $\lim z_n = \lim z_{n+1}$ ist, aus (2) sich ergeben

$$\zeta = F(\zeta), \tag{3}$$

und folglich hätten die beiden Gleichungen

$$f(z) = 0 \quad \text{und} \quad F(z) - z = 0$$

eine Wurzel, nämlich ζ gemeinsam. Wenn nun, wie wir wieder voraussetzen wollen, $f(z)$ eine irreductible, ganze Function ist, dann wird die zweite Gleichung alle Wurzeln der ersten besitzen, und daher muss das Polynom

$$F(z) - z = f(z) \cdot g(z) \tag{4}$$

werden, wobei $g(z)$ eine beliebige rationale, ganze oder gebrochene Function sein kann. Derartige Ausdrücke lassen sich leicht und in beliebiger Menge bilden. So ergeben sich z. B. bei der Gleichung

$$f = z^2 - z - a = 0$$

unter anderen die folgenden Ausdrücke für $F(z)$

$$\begin{array}{ll} z^2 - a, & \sqrt{z + a}; \\ \dfrac{a - \varkappa z}{z - (\varkappa + 1)}, & \dfrac{(\varkappa + 1) z + a}{z + \varkappa}; \\ \dfrac{(a+1) z + a}{z^2}, & \dfrac{a + 1 + \sqrt{(a+1)^2 + 4az}}{2z}; \\ \dfrac{z^3 - a}{a + 1}, & \sqrt[3]{(a+1) z + a}; \\ \cdots\cdots\cdots & \end{array}$$

Es sind dabei in die zweite Spalte auch irrationale Functionen aufgenommen. Im Allgemeinen ist die nachfolgende Theorie auch auf sie anwendbar. Hier treten diese irrationalen Ausdrücke in besonders wichtiger Weise als die inversen Functionen der in gleicher Zeile links stehenden heraus, d. h. wenn man $u = F(z)$ aus der linken Spalte entnimmt, giebt die Umkehrung dieser Gleichung, nämlich $z = \Phi(u)$, die rechts stehende Function. Ein einfaches Mittel, solche Functionen F zu erhalten, besteht darin, dass man in f, oder allgemeiner in einem Producte $f \cdot g$ an beliebig vielen Stellen z durch u ersetzt; entsteht daraus $f(z, u)$, dann berechnet man aus $f(z, u) = 0$ einmal z als Function von u und einmal u als Function von z, und es wird das System

---

Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen. Math. Ann. II. S. 317. — C. Isenkrahe: Ueber die Anwendung iterirter Functionen zur Darstellung der Wurzeln algebraischer und transcendenter Gleichungen. Math. Ann. XXXI. S. 309.

(5) $$u = F(z), \quad z = \Phi(u)$$

ein Functionenpaar geben, für welches die Gleichungen

(5a) $$\zeta = F(\zeta), \quad \zeta = \Phi(\zeta)$$

gelten.

Es fragt sich nun, ob umgekehrt auch jede Wurzel von $F(z) = z$ auch eine Wurzel von $f(z) = 0$ ist. Aus (4) folgt, dass dies nicht nothwendig ist; und ebenso wenig ist jeder durch (2) asymptotisch gegebene Werth eine Wurzel von $f = 0$; es kann nach unserer Herstellungsmethode auch eine Wurzel von $g = 0$ sein. Wenn wir z. B. die Gleichung

$$f = z^2 + 1z - 2 = (z - 1)(z + 2) = 0$$

betrachten und den Algorithmus der Näherung

$$z_{\lambda+1} = \frac{2 - z_\lambda^3}{2z_\lambda - 1}$$

setzen, dann wird zwar die Gleichung

$$\zeta = \frac{2 - \zeta^3}{2\zeta - 1}$$

durch die beiden Wurzeln $\zeta = +1$, $\zeta = -2$ von $f = 0$ befriedigt, aber der Anfangswerth $z_1 = -1{,}99$ z. B. führt auf einen fremden Werth als Grenze:

$$z_2 = -1{,}78\cdots, \quad z_3 = -1{,}68\cdots, \quad z_4 = -1{,}55\cdots, \quad z_5 = -1{,}39\cdots,$$
$$z_6 = -1{,}24\cdots, \quad z_7 = -1{,}12\cdots, \quad z_8 = -1{,}05\cdots, \quad \cdots \lim_{n=\infty} z_n = -1,$$

was sich dadurch erklärt, dass

$$z - \frac{2 - z^3}{2z - 1} = f(z) \cdot \frac{z + 1}{2z - 1} = f(z) \cdot g(z)$$

ist. Die Wurzel $\zeta = -2$ ist hier überhaupt nicht einer asymptotischen Annäherung fähig, und das Gleiche gilt für $\zeta = 1$.

§ 259. Die bisher aufgestellte Bedingung für $F(z)$ ist für die Sicherheit einer Annäherung noch nicht ausreichend, wie sich soeben gezeigt hat. Bedeutet ζ eine reelle Wurzel, z_1 einen hinreichend genäherten Werth, und setzen wir

$$\zeta = z_1 + \delta_1 = z_2 + \delta_2,$$

so ist z_2 nur dann genauer als z_1, wenn $|\delta_2| < |\delta_1|$ wird. Nun hat man nach dem Mittelwerthsatze

(6) $$\zeta - \delta_2 = F(\zeta - \delta_1) = F(\zeta) - \delta_1 \cdot F'(\zeta - \Theta\delta_1), \qquad (0 \leqq \Theta \leqq 1).$$
$$\delta_2 = \delta_1 F'(\zeta - \Theta\delta_1)$$

Ist $|F'(\zeta)| > 1$, so kann man um ζ einen endlichen, reellen Bereich $(\zeta - \tau, \cdots \zeta + \tau)$ abgrenzen, innerhalb dessen der Modul von

$F'(z)$ grösser als 1 ist. Nimmt man den Näherungswerth z_1 innerhalb dieses Bereiches beliebig nahe an ζ an, so zeigt (6), dass die Fehler δ_2, δ_3, $\cdots$, statt kleiner zu werden, sich vergrössern. Eine asymptotische Annäherung ist in diesem Falle also unmöglich, ein sprungweises Erreichen aber natürlich nicht ausgeschlossen.

Ist zweitens $|F'(\zeta)| < 1$, dann kann man wiederum einen endlichen Bereich $(\zeta - \tau, \cdots \zeta + \tau)$ festlegen, innerhalb dessen der Modul von $F'(z)$ überall kleiner als 1 bleibt. Wählt man z_1 in diesem Bereiche, so ist z_2 ein genauerer Näherungswerth, weil $|\delta_2| < |\delta_1|$ ist, z_3 noch genauer als z_2, u. s. w. Es findet hierbei auch wirklich eine Convergenz nach ζ statt. Denn der Bereich braucht dazu nur so gewählt zu werden, dass das Maximum des Moduls von $F'(z)$ in ihm $< M$ ist, wo M einen positiven, der Einheit beliebig nahe liegenden, aber doch von 1 verschiedenen, echten Bruch bezeichnet; dann folgt aus (6) der Reihe nach

$$|\delta_2| < |\delta_1| M, \quad |\delta_3| < |\delta_2| M < |\delta_1| M^2, \cdots$$
$$|\delta_{\mu+1}| < |\delta_1| M^\mu,$$

und weil $\lim_{\mu=\infty} M^\mu = 0$ ist, so folgt hieraus die Convergenz der $z_{\mu+1}$ nach ζ hin. Man kann natürlich in den festgesetzten Bereich $(\zeta - \tau, \cdots \zeta + \tau)$ auch von ausserhalb belegenen Punkten sprungweise gelangen und ist dann der Annäherung sicher, wie wir eben zeigten.

Ist bei $|F'(\zeta)| < 1$ das Vorzeichen von F' positiv, dann haben δ_2 und δ_1 gleiche Vorzeichen, so dass die Annäherung von einer Seite her geschieht, und alle z_1, z_2, z_3, $\cdots$ gleichzeitig grösser oder gleichzeitig kleiner sind als ζ. Ist dagegen $\operatorname{sgn} F'(\zeta) = -1$, dann haben δ_2 und δ_1 verschiedene Vorzeichen und die Werthe z_1, z_2, z_3, $\cdots$ sind abwechselnd kleiner und grösser als ζ.

Aus (6) kann man entnehmen, dass die Convergenz um so schneller vor sich geht, je kleiner der absolute Betrag von $F'(\zeta)$ ist. Am günstigsten stellt sich der Fall $F'(\zeta) = 0$. Sollte gleichzeitig auch von höheren Ableitungen

$$F'(\zeta) = 0, \quad F''(\zeta) = 0, \quad \cdots \quad F^{(\lambda-1)}(\zeta) = 0, \quad F^{(\lambda)}(\zeta) \neq 0$$

sein, dann wird der Fehler

$$\delta_2 = \frac{\delta_1^\lambda}{\lambda!} F^{(\lambda)}(\zeta - \Theta\delta_1) \qquad (0 \leq \Theta \leq 1), \tag{7}$$

so dass also bei kleinem δ_1 die Annäherung etwa der λ^{ten} Potenz des Fehlers proportional erfolgt.

§ 260. Es bleibt noch der Fall $|F'(\zeta)| = 1$ zu betrachten übrig. Hierfür setzen wir, ähnlich wie bei (6),

$$\zeta - \delta_2 = F(\zeta - \delta_1) = F(\zeta) - \delta_1 F'(\zeta) + \frac{\delta_1^2}{2} F''(\zeta - \Theta\delta_1) \quad (0 \leqq \Theta \leqq 1)$$

und erhalten demnach

$$\delta_2 = \delta_1 F'(\zeta) - \frac{1}{2}\delta_1^2 F''(\zeta - \Theta\delta_1). \tag{8}$$

Ist nun zuerst $F'(\zeta) = +1$, und also

$$\delta_2 = \delta_1 - \frac{1}{2}\delta_1^2 F''(\zeta - \Theta\delta_1) = \delta_1\left(1 - \frac{1}{2}\delta_1 F''(\zeta - \Theta\delta_1)\right), \tag{8a}$$

so kann man, wenn $F''(\zeta)$ positiv ist, von ζ aus einen Bereich abgrenzen, in welchem bei hinreichend kleinem positiven δ_1 die Klammergrösse

$$1 - \frac{1}{2}\delta_1 F''(\zeta - \Theta\delta_1)$$

positiv und kleiner als 1 bleibt. Für jedes z_1, welches diesem Bereiche angehört, convergirt der Algorithmus. Bei negativem δ_1 findet das nicht statt. Aehnlich convergirt er bei negativem $F''(\zeta)$ und negativem δ_1. Man kann sich also bei $F'(\zeta) = 1$ und $F''(\zeta) \neq 0$ nur von einer Seite her der Wurzel ζ nähern.

Ist dagegen $F'(\zeta) = -1$, und also

$$\delta_2 = -\delta_1 - \frac{1}{2}\delta_1^2 F''(\zeta - \Theta\delta_1), \tag{8b}$$

dann versagen die eben benutzten Schlüsse, weil zwar $|\delta_2| < |\delta_1|$ wird, aber dann weiter $|\delta_3| > |\delta_2|$ werden kann. Um auch für diesen Fall eine Uebersicht der Verhältnisse zu erlangen, gehen wir in der Entwickelung einen Schritt weiter und setzen

$$\delta_2 = +\delta_1 F'(\zeta) - \frac{1}{2}\delta_1^2 F''(\zeta) + \frac{1}{6}\delta_1^3 F'''(\zeta) - \cdots,$$

$$\delta_3 = +\delta_2 F'(\zeta) - \frac{1}{2}\delta_2^2 F''(\zeta) + \frac{1}{6}\delta_2^3 F'''(\zeta) - \cdots,$$

woraus bei $F'(\zeta) = -1$ durch Elimination von δ_2 die Gleichung

$$\delta_3 = \delta_1 - \frac{1}{6}\delta_1^3[2F'''(\zeta) + 3F''(\zeta)^2] + \cdots \tag{9}$$

folgt. Man erkennt also, dass bei hinlänglich kleinem $|\delta_1|$, falls $F'(\zeta) = -1$ ist, Convergenz stattfinden wird, oder nicht, je nachdem die Klammer $[2F'''(\zeta) + 3F''(\zeta)^2]$ einen positiven oder einen negativen Werth besitzt.

§ 261. Wir wollen nun auf die Ableitung der Functionen F und Φ in § 258 zurückgehen und können zeigen, dass wenn F und Φ zwei inverse Functionen sind, für welche die beiden Gleichungen

$$\zeta = F(\xi), \quad \xi = \Phi(\zeta) \tag{5a}$$

gelten, dann der auf Φ gegründete Algorithmus an allen den Stellen nach ζ convergirt, an denen der auf F gegründete seinen Dienst versagt.

Aus den Elementen der Differentialrechnung ist zu entnehmen, dass für die beiden ersten Ableitungen von F und Φ die Beziehung

$$F'(\zeta) \cdot \Phi'(\zeta) = 1$$

gilt. Daraus folgt, dass bei $| F'(\zeta) | > 1$ sich $| \Phi'(\zeta) | < 1$ herausstellt, so dass stets einer und nur einer der beiden Algorithmen zum Ziele führt, sobald der Modul der Ableitung $F'(\zeta)$ von 1 verschieden ist.

Ferner hat man für die zweiten Ableitungen von F und von Φ

$$F''(\zeta) : F'(\zeta)^3 = - \Phi''(\zeta).$$

Ist also $F'(\zeta) = + 1$, so folgt, dass $F''(\zeta)$ und $\Phi''(\zeta)$ verschiedene Vorzeichen besitzen, und aus (3*) ergiebt sich: Auf der einen Seite der Wurzel ζ convergirt bei $F'(\zeta) = + 1$ der Algorithmus von F, auf der anderen derjenige von Φ.

Endlich ist noch

$$\Phi'''(\zeta) = \frac{3 F''(\zeta)^2 - F'(\zeta) F'''(\zeta)}{F''(\zeta)^5};$$

für $F'(\zeta) = - 1$ erhält man deshalb

$$\Phi''(\zeta) = F''(\zeta), \quad \Phi'''(\zeta) = - F'''(\zeta) - 3 F''(\zeta)^2,$$
$$2 \Phi'''(\zeta) + 3 \Phi''(\zeta)^2 = - [2 F'''(\zeta) + 3 F''(\zeta)^2].$$

Ist daher die in (9) auftretende auf den Algorithmus F bezügliche Klammer negativ, so ist die entsprechende, zu Φ gehörige Klammer positiv, so dass dann die Convergenz nach ζ von beiden Seiten her bei Anwendung von Φ eintritt. Bei $F'(\zeta) = - 1$ liefert einer der beiden Algorithmen Näherung von beiden Seiten her; der andere giebt von keiner Seite her eine Näherung.

Auf die weiteren Fälle, die bei $F''(\zeta) = 0$ u. s. w. vorkommen können, lohnt es sich nicht, hier näher einzugehen.

§ 262. Wir nehmen jetzt an, dass $| F'(\zeta) | < 1$ sei, so dass von beiden Seiten her mittels F eine asymptotische Annäherung an ζ erzielt werden kann. Um ζ herum bestimmen wir ein Intervall $(\xi_1 \cdots \xi_1')$ auf folgende Weise: Geht man von irgend einem Punkte der Strecke $(\xi_1 \cdots \xi_1')$ mit Ausnahme der Grenzpunkte als erstem Näherungswerthe aus, so bleibt man im Innern der Strecke und nähert sich dem Wurzelpunkte ζ. Für die Grenzpunkte ξ_1 und ξ_1' soll dies nicht mehr der Fall sein. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass man nicht auch von einem ausserhalb $(\xi_1 \cdots \xi_1')$ gelegenen Punkte z_1 durch

Iteration sprungweise in diese Strecke hineingelangen könnte; jedenfalls aber gilt diese letzte Eigenschaft nicht für alle Punkte zwischen ε_1 und ζ.

Es handelt sich nun um die Feststellung der Grenzpunkte ξ_1 und ξ_1'. Da man bei den Punkten $(\xi_1 + \varepsilon)$ und $(\xi_1' - \varepsilon)$, wenn $\xi_1 < \xi < \xi_1'$ ist, bei beliebig kleinem, positiven ε und einmaliger Iteration innerhalb der Strecke bleibt, und da die Resultate dieser Iteration sich von denen für ξ_1 und ξ_1' wegen der Stetigkeit nur beliebig wenig unterscheiden, so können ξ_2 und ξ_2' auch nur wieder die Grenzpunkte geben, d. h. man hat

$$\xi_2 = \xi_1 \text{ oder } \xi_1' \quad \text{und} \quad \xi_2' = \xi_1' \text{ oder } \xi_1.$$

Wir betrachten zuerst den Fall $\xi_2 = \xi_1$. Dann wird natürlich jede weitere Iteration $\xi_3 = \xi_4 = \cdots = \xi_1$ ergeben. Demnach ist ξ_1 eine Wurzel von $F(\varepsilon) - \varepsilon = f(\varepsilon)g(\varepsilon) = 0$. Liegt folglich keine Wurzel von $g = 0$ zwischen ζ und der nächst kleineren reellen Wurzel ζ' von $f(\varepsilon) = 0$, so ist ξ_1 selbst gleich ζ'. Dies wird also beispielsweise bei $g(\varepsilon) = 1$ eintreten. Ist $F(\varepsilon)$ eine ganze oder eine unecht gebrochene Function, dann ist die Möglichkeit vorhanden, dass ξ_1 den Werth $-\infty$ (und ebenso ξ_1' den Werth $+\infty$) annimmt. Denn dabei wird dem $\xi_1 = -\infty$ auch ein $\xi_2 = -\infty$ (und ähnlich bei $\xi_1' = \infty$ ein $\xi_2' = \infty$) entsprechen. Doch kann dies offenbar nur bei der kleinsten (resp. der grössten) reellen Wurzel vorkommen.

Wir betrachten zweitens den Fall

$$\xi_2 = \xi_1', \quad \xi_2' = \xi_1 \quad \text{also} \quad \xi_3 = \xi_1, \quad \xi_3' = \xi_1'.$$

Dann folgt (von $\xi_1 = -\infty$ bezw. $\xi_2 = +\infty$ abgesehen), dass ξ_1 und ξ_1' Wurzeln von

$$F[F(\varepsilon)] - \varepsilon = 0 \tag{12}$$

sind, und zwar solche, die nicht schon die Gleichung

$$F(\varepsilon) - \varepsilon = 0$$

befriedigen. Nimmt man eine derartige Wurzel ξ_1 zum Ausgangspunkte der Iteration, dann wechseln beständig die beiden Werthe ξ_1 und ξ_1' mit einander ab, und eine Convergenz findet dabei also nicht statt.

Nebenbei bemerken wir, dass ebenso jede Wurzel u_1 der Gleichung

$$F\{F[F(\varepsilon)]\} - \varepsilon = 0, \tag{13}$$

die nicht schon die Gleichung (12) befriedigt, zu einem Tripel von Werthen u_1, u_2, u_3 gehört, die bei der Iteration unaufhörlich cyklisch auseinander hervorgehen; und in derselben Weise kann man jede weitere, mehrfache Iteration benutzen.

Wir wollen ein numerisches Beispiel für solche, ja hinlänglich interessanten Fälle angeben. Es sei die Gleichung vorgelegt

$$z^2 + 4z - 13 = 0;$$

bilden wir daraus den Algorithmus

$$z_{\lambda+1} = \frac{13}{4} - \frac{1}{4} z_\lambda^2,$$

dann ergiebt sich beim Anfangswerthe $z_0 = 0$ Folgendes:

$$z_0 = 0; \quad z_1 = \frac{13}{4}; \quad z_2 = 0{,}61; \quad z_3 = 3{,}16; \quad z_4 = 0{,}75; \quad z_5 = 3{,}11;$$

$$z_6 = 0{,}84; \quad z_7 = 3{,}074; \quad z_8 = 0{,}888; \quad z_9 = 3{,}053; \quad z_{10} = 0{,}920; \quad \cdots$$

$$\lim_{m=\infty} z_{2m} = 1, \quad \lim_{m=\infty} z_{2m+1} = 3.$$

Nun ist in der That, wie die Iteration zeigt,

$$z_{\lambda+2} = \frac{39 + 26 z_\lambda^2 - z_\lambda^4}{64},$$

$$(z^4 - 26z^2 - 39) + 64z = [z^2 + 4z - 13](z - 1)(z - 3),$$

so dass diese Resultate mit der dargelegten Theorie völlig übereinstimmen.

Endlich gehen wir zu dem Falle

$$\xi_2 = \xi_1', \quad \xi_2' = \xi_1'$$

über. Hier ist ξ_1' entweder $+\infty$ oder eine Wurzel von $F(z) - z = 0$, die nicht zugleich Wurzel von $f(z) = 0$ ist. Tritt das Erste ein, dann muss $g(z)$ eine gebrochene Function, und ξ_1 eine Wurzel der Gleichung werden, welche entsteht, wenn man ihren Nenner gleich Null setzt. Ist dagegen ξ_1' eine Wurzel von $F(z) - z = 0$, dann findet man ξ_1 als eine von ξ_1' verschiedene Wurzel der Gleichung

$$\xi_1' = F(z).$$

§ 263. Bei dem eben besprochenen Falle $\xi_2 = \xi_1'$, $\xi_2' = \xi_1'$ kann es geschehen, dass die beiden ersten Fehler entgegengesetzte, die folgenden dagegen sämmtlich dieselben Vorzeichen haben. Dabei sind diese Fehler von endlicher Grösse. Es kann geschehen, dass auch bei beliebig kleinem δ_1 die Beziehung $\operatorname{sgn} \delta_1 \delta_2 = -1$, $\operatorname{sgn} \delta_2 \delta_3 = +1$, $\operatorname{sgn} \delta_3 \delta_4 = +1, \cdots$ eintritt. Dazu ist es nur nöthig, dass $|F''(\xi)| = 0$ ist, während $F'(\xi - \delta)$ und $F'(\xi + \delta)$ verschiedene Vorzeichen haben; und weil im Allgemeinen $F''(\xi)$ von Null verschieden ist, so reicht die erste Bedingung $|F''(\xi)| = 0$ hierbei auch im Allgemeinen aus.

Dieselben Verhältnisse treten gleichfalls ein, wenn man

$$F'(\xi) = 0, \quad F''(\xi) = 0, \quad \cdots \quad F^{(2\lambda-1)}(\xi) = 0, \quad F^{(2\lambda)}(\xi) \neq 0$$

hat, da dann

$$\delta_2 = \delta_1^{2\lambda} \frac{F^{(2\lambda)}(\zeta - \Theta\delta_1)}{(2\lambda)!}$$

werden wird.

§ 264. Wir hatten durch (4) gesehen, dass allgemein bei einem anwendbaren Algorithmus F

$$F(z) = z + f(z) \cdot g(z)$$

sein muss. Will man $|F'(z)| < 1$ für jede Wurzel ζ von $f(z) = 0$ als zweite Bedingung dazu fügen, so wäre g der Bedingung

$$0 > f'(z)g(z) > -2 \qquad \text{(wenn } f(z) = 0 \text{ ist)}$$

gemäss zu wählen. Jeder so erhaltene Algorithmus liefert Annäherung an jede reelle Wurzel. Sehr einfach wird diese Bedingung durch

$$g(z) = -\frac{1}{\varkappa f'(z)}$$

erfüllt bei positiven Werthen von $\varkappa$, die grösser als $\frac{1}{2}$ sind.

Nach § 259 stellt sich die Näherung besonders günstig, wenn die erste Ableitung von $F(z)$

$$F'(z) = 1 + f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

für alle Wurzeln von $f = 0$ verschwindet. Das geschieht, wenn wir

$$g(z) = -\frac{1}{f'(z)} + g_1(z) \cdot f(z)$$

setzen, wobei $g_1(z)$ eine willkürliche Function ist. Dann erhält man

$$F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} + g_1(z)f^2(z). \tag{13}$$

Noch vortheilhafter gestaltet sich nach § 259 die Convergenz, wenn ausserdem auch noch die zweite Ableitung

$$F''(z) = \left(\frac{f''}{f'} + 2g_1f'^2\right) + f\left(\frac{f'f''' - 2f''^2}{f'^3} + g_1''f + 4g_1'f' + 2g_1f''\right)$$

für alle Wurzeln von $f = 0$ verschwindet. Dies geschieht offenbar in der allgemeinsten Art für die Annahme

$$g_1 = -\frac{f''}{2f'^3} + g_2f,$$

also für die folgende Gestalt von $F(z)$

$$F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)} - \frac{f''(z)f^2(z)}{2f'(z)^3} + g_2(z)f^3(z), \tag{14}$$

wobei wieder unter $g_2(z)$ eine willkürliche Function zu verstehen ist.

In derselben Art kann man fortfahren und es so erreichen, dass

$$F'(\zeta) = 0, \quad F''(\zeta) = 0, \quad \cdots \quad F^{(\lambda-1)}(\zeta) = 0$$

für alle Wurzeln ζ von $f(z) = 0$ wird. In diesem Falle können wir sagen, dass die Convergenz von der λ^{ten} Ordnung (mindestens) ist. Hierbei wird jeder folgende Fehler der λ^{ten} Potenz des voraufgehenden proportional.

§ 265. Nunmehr gehen wir zu der Betrachtung einiger besonders wichtigen Algorithmen über. Setzen wir in (13) ein $g_1 = 0$, so entsteht der Newton'sche in der vorigen Vorlesung ausführlich behandelte Algorithmus

$$F(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Dieser liefert für alle Wurzeln quadratische Convergenz. Es ist nämlich für ihn bei jeder Wurzel ζ

$$F'(\zeta) = 0, \quad F''(\zeta) = \frac{f''(\zeta)}{f'(\zeta)}.$$

Dass $f = 0$ keine Doppel- oder mehrfachen Wurzeln besitzt, ist vorausgesetzt worden, ja sogar, dass $f(z)$ unzerlegbar sei; daher verschwindet $F''(\zeta)$ nicht, und F liefert in der That eine quadratische Convergenz und keine von höherer Ordnung. Weiter lehrt der Vergleich mit § 263, dass der Algorithmus an jede Wurzel nur von der einen Seite her asymptotisch heranführt, derart dass bei hinlänglich kleinen Werthen von δ_1, die auf der anderen Seite liegen, $\operatorname{sgn} \delta_1 \cdot \delta_2 = -1$ wird.

Aus

$$F'(z) = \frac{f(z) f''(z)}{f'(z)^2}$$

folgt, dass auf derjenigen Seite von ζ, für welche zunächst $f(z)$ und $f''(z)$ gleiche Vorzeichen besitzen, $\operatorname{sgn} \delta_2 = \operatorname{sgn} \delta_1$ sein wird. Von ihr aus geht also die asymptotische Näherung in demselben Sinne vor sich, während die andere Seite gleich bei der ersten Iteration verlassen wird, sobald nur δ_1 hinlänglich klein ist.

Im Falle dass $f(z) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt, oder allgemeiner, im Falle dass die reellen Wurzeln von $f'(z) = 0$ sämmtlich durch die reellen Wurzeln von $f(z) = 0$ getrennt werden, und die von $f''(z) = 0$ durch diejenigen von $f'(z) = 0$, kann man den Bereich der Convergenz, welcher zu der grössten und zu der kleinsten reellen Wurzel gehört, leicht bestimmen. Wir betrachten die Gleichung (§ 259; 7)

$$\delta_2 = -\frac{1}{2} \delta_1^2 F''(\zeta - \Theta \delta_1)$$

$$= -\frac{1}{2} \delta_1^2 \frac{f''(\zeta - \Theta \delta_1)}{f'(\zeta - \Theta \delta_1)}$$

und entnehmen aus ihr, dass für grosse positive oder negative $z_1 = \zeta - \delta_1$, also für grosse negative oder positive δ_1, das Vorzeichen von δ_2 immer nur von dem des Bruches $f'' : f'$ abhängen wird. Nun kann man für grosse Werthe von z setzen $f'(z) = n a_0 z^{n-1}$ und $f''(z) = n(n-1) a_0 z^{n-2}$; für solche Werthe wird somit $\operatorname{sgn}(f'' : f') = \operatorname{sgn} z$. Für grosse positive δ_1 d. h. für grosse negative z_1, wird also

δ_2 positiv; für grosse negative δ_1 d. h. für grosse positive z_1 wird δ_2 negativ. Die Iteration führt daher zunächst nicht auf die andere Seite der grössten resp. kleinsten Wurzel hinüber; diese Verhältnisse bleiben, da weder $f''=0$ noch $f'=0$ nach unserer Specialannahme jenseits der äussersten Wurzeln von $f=0$ verschwinden können, bis in beliebige Nähe an diese Wurzeln heran unverändert, so dass also die äussersten Grenzen beider Convergenzintervalle das eine Mal $+\infty$ und das andere Mal $-\infty$ sind. Auch die inneren Grenzen sind bei der höchsten und der niedrigsten Wurzel leicht zu erkennen. Hat man die äussersten Wurzeln eben überschritten, so ändert sich der Sinn der Näherung, d. h. es wird $\operatorname{sgn}\delta_1\cdot\delta_2=-1$. Dies bleibt unseren Voraussetzungen gemäss so lange, bis $f'(z)=0$ wird; dann führt die entsprechende Iteration sofort ins Unendliche. Wir haben also den Satz: Besitzt $f(z)=0$ nur reelle Wurzeln, und sind u_1 und u_2 die äussersten reellen Wurzeln von $f'(z)=0$, wobei $u_1<u_2$ ist, so führt jeder Anfangswerth des Newton'schen Algorithmus zwischen $-\infty$ und u_1 auf die kleinste, und jeder zwischen u_2 und $+\infty$ auf die grösste Wurzel von $f=0$.*)

§ 266. Lassen wir für den Augenblick auch mehrfache Wurzeln bei $f=0$ zu, so folgt, dass die Newton'sche Methode bei diesen nur eine lineare Annäherung giebt. In der That, wenn wir

$$f(z)=(z-z_1)^\alpha(z-z_2)\cdots$$

haben, dann wird, falls wir nur die niedrigsten Potenzen von $(z-z_1)$ beibehalten, da zuletzt $z=z_1$ gesetzt wird,

$$f'(z)=\alpha(z-z_1)^{\alpha-1}(z-z_2)\cdots+\cdots,$$
$$f''(z)=\alpha(\alpha-1)(z-z_1)^{\alpha-2}(z-z_2)\cdots+\cdots,$$
$$F'(z)=\frac{f(z)f''(z)}{f'(z)^2}=\frac{\alpha(\alpha-1)(z-z_1)^{2\alpha-2}(z-z_2)^2\cdots+\cdots}{\alpha\cdot\alpha(z-z_1)^{2\alpha-2}(z-z_2)^2\cdots+\cdots},$$
$$F'(z_1)=\frac{\alpha-1}{\alpha},$$

so dass also bei $\alpha>1$ der Werth von F' endlich und positiv bleibt. Hier findet von beiden Seiten her lediglich eine lineare Näherung an die α-fache Wurzel z_1 statt.

Es lässt sich aber ohne Schwierigkeit ein anderer Algorithmus bestimmen, für den selbst bei vielfachen Wurzeln überall quadratische Convergenz bestehen bleibt. Dazu reicht es aus

---

*) Vgl. A. Tauber: Ueber die Newton'sche Näherungsmethode. Monatshefte f. Math. u. Phys. Wien 1885. VI; 291.

$$F(z) = z - \frac{f(z)f'(z)}{f'(z)^2 - f(z)f''(z)}$$

zu setzen. Denn es wird für diesen Algorithmus

$$F'''(z) = \frac{2f(z)^2f''(z)^2 - f(z)f'(z)^2f''(z) - f^2(z)f'(z)f'''(z)}{(f'(z)^2 - f(z)f''(z))^2},$$

wobei für die Annahme

$$f(z) = (z - z_1)^\alpha (z - z_2) \cdots$$

scheinbar zwar sowohl Zähler als Nenner als niedrigste Potenzen von $(z - z_1)$ die $(4\alpha - 4)^{\text{ten}}$ enthalten, in Wirklichkeit aber der Coefficient dieser Potenz im Zähler den Werth

$$2\alpha^2(\alpha - 1)^2 - \alpha^3(\alpha - 1) - \alpha^2(\alpha - 1)(\alpha - 2) = 0$$

annimmt, so dass der Zähler den Factor $(z - z_1)^{4\alpha - 1}$ enthält, und daher, wie behauptet wurde, $F'''(z_1) = 0$ ist. Dadurch ist dann auch hier die quadratische Convergenz festgelegt.

§ 267. Wir stellen zweitens für die quadratische Gleichung

$$\alpha z^2 + cz - b = 0 \qquad (\alpha > 0)$$

den Algorithmus

$$z_{\varkappa+1} = \frac{az_\varkappa + b}{\alpha z_\varkappa + \beta} \qquad (c = \beta - a)$$

auf. Es sind die beiden Wurzeln ζ und ζ' der Gleichung durch

$$\begin{aligned} \alpha\zeta + \beta &= \tfrac{1}{2}(a + \beta + \sqrt{D}) \\ \alpha\zeta' + \beta &= \tfrac{1}{2}(a + \beta - \sqrt{D}) \end{aligned} \qquad D = (\beta - a)^2 + 4\alpha b$$

bestimmt. Dabei wollen wir $\operatorname{sgn}\sqrt{D} = +1$ für positive D nehmen und uns auf diesen Fall $D > 0$ beschränken, um die sonst auftretenden complexen Wurzeln oder gleichen Wurzeln auszuschliessen.

Es wird

$$F'(z) = \frac{a\beta - b\alpha}{(\alpha z + \beta)^2},$$

$$F'(\zeta)F'(\zeta') = \frac{a\beta - b\alpha}{[(\alpha\zeta + \beta)(\alpha\zeta' + \beta)]^2} = 1.$$

Ist $|\alpha\zeta + \beta|$ von $|\alpha\zeta' + \beta|$ verschieden, dann wird der eine der beiden Werthe $|F'(\zeta)|$, $|F'(\zeta')|$ grösser, der andere dagegen kleiner als 1, und es wird sonach nur an den letzteren eine Näherung stattfinden können. Ist $(a + \beta) > 0$, dann hat $|\alpha\zeta + \beta|$ einen grösseren Werth als $|\alpha\zeta' + \beta|$; folglich ist $|F'(\zeta)| < |F'(\zeta')|$, und also findet an die algebraisch grössere Wurzel die Annäherung statt. Bei $(a + \beta) < 0$ erfolgt sie an die algebraisch kleinere Wurzel. Bei $(a + \beta) = 0$ ist $|\alpha\zeta + \beta| = |\alpha\zeta' + \beta|$, und daher wird

$$F[F(z)] = \frac{(a^2+b\alpha)z+b(a+\beta)}{\alpha(a+\beta)z+(b\alpha+\beta^2)} = \frac{(a^2+b\alpha)z}{b\alpha+\beta^2}$$

die Relation

$$z_3 = \frac{(a^2+b\alpha)z_1}{b\alpha+\beta^2} = z_1$$

liefern, so dass dabei gar keine Näherung vorkommen kann.

Wir untersuchen weiter, innerhalb welchen Intervalles überhaupt Convergenz möglich ist. Wie wir bei den allgemeinen Betrachtungen sahen, können Grenzpunkte nur solche sein, die entweder

$$F(z) - z = 0 \quad \text{oder} \quad F(F(z)) - z = 0$$

machen. Da wir aber für die beiden linken Seiten

$$F(z) - z = -\frac{\alpha z^2 + cz - b}{\alpha z + \beta},$$

$$F(F(z)) - z = -\frac{(a+\beta)(\alpha z^2+cz-b)}{\alpha(a+\beta)z+(b\alpha+\beta^2)}$$

finden, so folgt, dass bei $(a+\beta) \neq 0$ überhaupt keine Grenzpunkte vorhanden sein können, und dass also jeder beliebige Anfangswerth z_1 auf die erreichbare Wurzel asymptotisch führt, natürlich abgesehen von dem etwa zum Ausgange genommenen zweiten Wurzelpunkte.

Die zu dem aufgestellten F gehörige inverse Function liefert

$$z_{x+1} = \frac{-\beta z_x + b}{\alpha z_x - a};$$

durch diesen Algorithmus wird dann die zweite, auf dem ersten Wege nicht erreichbare Wurzel erhalten werden.

In dem bisher ausgeschlossenen Grenzfalle $D = 0$ giebt es zwei einander gleiche Wurzeln. Es wird hier

$$\alpha\zeta + \beta = \alpha\zeta' + \beta = \frac{1}{2}(a+\beta),$$

$$4(a\beta - b\alpha) = (a+\beta)^2,$$

$$\delta_{x+1} = \frac{a\zeta+b}{\alpha\zeta+\beta} - \frac{a(\zeta-\delta_x)+b}{\alpha(\zeta-\delta_x)+\beta} = \frac{\delta_x}{1-\frac{2\alpha}{a+\beta}\delta_x},$$

und dieses letzte Resultat zeigt, dass, je nachdem $\operatorname{sgn}\alpha(\beta+a) = \pm 1$ ist, die Annäherung nur von der Seite der negativen oder nur von der Seite der positiven δ her erfolgen kann, weil nur in dem hervorgehobenen Falle $|\delta_{x+1}|$ kleiner als $|\delta_x|$ wird.

§ 268. Wir wollen noch mit einigen Worten auf ein Paar naheliegende Algorithmen für die allgemeine Gleichung n^{ten} Grades

$$f(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

eingehen. Zuerst sei $F(z)$ durch die Gleichung

$$z_{x+1} = z_x^n + c_1 z_x^{n-1} + c_2 z_x^{n-2} + \cdots + (c_{n-1} + 1) z_x + c_n$$

bestimmt. Hier ist

$$F'(z) = f'(z) + 1;$$

also kann F nur zur Annäherung an solche Wurzeln ζ dienen, für die

$$0 > f'(\zeta) > -2$$

ist. Bedeuten $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$ die reellen, nach absteigender Grösse geordneten Wurzeln von $f(z) = 0$, dann sind $f'(\zeta_1), f'(\zeta_3), \cdots$ positiv, und es kommen bei der Näherung also überhaupt nur die Wurzeln $\zeta_2, \zeta_4, \cdots$ als möglich in Betracht. —

Endlich setzen wir zur Bestimmung eines neuen Algorithmus

$$F(z) = \sqrt[n]{\varphi(z)}, \quad \varphi(z) = -c_1 z^{n-1} - c_2 z^{n-2} - \cdots - c_{n-1} z - c_n$$

und haben also

$$z_{x+1} = \sqrt[n]{\varphi(z_x)}.$$

Hier ist die Ableitung

$$F'(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{n\zeta^{n-1}} = 1 - \frac{f'(\zeta)}{n\zeta^{n-1}},$$

so dass also die Bedingung

$$0 < \frac{f'(\zeta)}{n\zeta^{n-1}} < 2 \tag{15}$$

erfüllt sein muss, damit an die Wurzel ζ Annäherung stattfinden kann. Bei der höchsten reellen Wurzel ζ_1 wird $f'(\zeta_1)$ positiv werden, da f für sie bei wachsendem Argumente im Wachsen begriffen ist, ferner $f'(\zeta_2)$ negativ, da zwischen ζ_1 und ζ_2 eine ungerade Anzahl von Wurzeln der Gleichung $f'(z) = 0$ liegt, u. s. f., so dass

$$\operatorname{sgn} f'(\zeta_1) = -\operatorname{sgn} f'(\zeta_2) = \operatorname{sgn} f'(\zeta_3) = -\operatorname{sgn} f'(\zeta_4) = \cdots = +1.$$

Für ungerade n ist in (15) ζ^{n-1} stets positiv; folglich kann eine Annäherung überhaupt nur an $\zeta_1, \zeta_3, \zeta_5 \cdots$ stattfinden. Für gerade n stellt es sich so: Haben etwa $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_{2\alpha}$ reelle, positive Werthe, dagegen $\zeta_{2\alpha+1}, \zeta_{2\alpha+2}, \cdots$ reelle, negative, dann folgt, dass bei der Annäherung als mögliche Grenzwerthe überhaupt nur $\zeta_1, \zeta_3, \cdots \zeta_{2\alpha-1}, \zeta_{2\alpha+2}, \zeta_{2\alpha+4}, \cdots$ in Frage kommen; sind dagegen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_{2\alpha-1}$ positiv und $\zeta_{2\alpha}, \zeta_{2\alpha+1}, \cdots$ negativ, dann kann eine Annäherung höchstens an $\zeta_1, \zeta_3, \cdots \zeta_{2\alpha-1}, \zeta_{2\alpha}, \zeta_{2\alpha+2}, \cdots$ stattfinden. Es mag bemerkt werden, dass bei geradem n positive ζ nur durch $F(z) = +|\sqrt[n]{\varphi(z)}|$ und negative nur durch $F(z) = -|\sqrt[n]{\varphi(z)}|$ erreicht werden können.

§ 269. Wir haben uns bisher allein mit reellen Wurzeln beschäftigt, weil wir den principiell benutzten Mittelwerthsatz nur für

reelle Grössen abgeleitet haben. Will man von dieser strengen Beweisführung absehen, dann ist es leicht, auch die complexen Wurzeln in den Bereich der Betrachtung zu ziehen.

Wir denken uns in der Entwickelung von F nach Potenzen von h

$$F(z+h) = F(z) + hF'(z) + \frac{h^2}{1\cdot 2}F'(z) + \cdots$$

die Grösse h als von so kleinem Modul, dass mit hinreichender Genauigkeit bereits

$$F(z+h) = F(z) + hF'(z)$$

gesetzt werden kann, wenn $F'(z)$ nicht verschwindet, und, wenn es verschwindet,

$$F(z+h) = F(z) + \tfrac{1}{2}h^2F''(z).$$

Dann können wir die in den Anfangsparagraphen dieser Vorlesung gemachten Schlüsse auf complexe Wurzeln erweitern. Aus

$$(6^a) \qquad \delta_2 = \delta_1 F'(\xi)$$

folgt, dass wenn $|F'(\xi)| < 1$ ist, um die Wurzel ξ in der Ebene, welche die complexen $z = x + iy$ darstellt, ein Flächenbereich derart abgegrenzt werden kann, dass jeder Punkt des Bereiches als Anfangswerth einer Reihe von Näherungswerthen genommen werden darf, die auf F gegründet asymptotisch zu ξ führen. Die Näherung geht um so schneller vor sich, je kleiner der absolute Werth von $F'(\xi)$ ist. Für $F'(\xi) = 0$ erhalten wir quadratische Convergenz.

Aus § 265 folgt, dass die Newton'sche Methode auch für complexe und demnach für sämmtliche Wurzeln Gültigkeit besitzt.

Vierundzwanzigste Vorlesung.

Iteration.

§ 270. Im Vorhergehenden haben wir auf einen Anfangswerth z_1 eine Operation $\varphi(z)$ angewendet; auf das erhaltene Resultat $\varphi(z_1)$ dieselbe Operation, so dass $\varphi[\varphi(z_1)]$ entstand, u. s. f. Wir nennen dieses Wiederholen derselben Operation iteriren, und werden das Resultat und die Operation selbst als Iteration bezeichnen. Diese Operationsart wollen wir etwas eingehender studiren.

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnungen ein

$$(1) \qquad \varphi[\varphi(z)] = \varphi_2(z), \quad \varphi[\varphi_2(z)] = \varphi_2[\varphi(z)] = \varphi_3(z), \cdots$$

und erkennen ohne Weiteres, dass hierfür die Regel

$$\varphi_{\varkappa+\lambda}(z) = \varphi_{\varkappa}[\varphi_{\lambda}(z)] = \varphi_{\lambda}[\varphi_{\varkappa}(z)] \tag{2}$$

gilt. Wir setzen $\varphi_0(z) = z$.

Wir wollen zunächst beweisen, dass, wenn φ eine rationale, ganze Function ist, auch der Quotient

$$\frac{\varphi_m(z) - z}{\varphi(z) - z} = T_m(z)$$

eine ganze, rationale Function wird, falls m eine beliebige positive, ganze Zahl bedeutet. Man hat, um dies einzusehen, nur in den Quotienten

$$\frac{\varphi_\nu(x) - \varphi_\nu(y)}{x - y},$$

der natürlich eine ganze Function der beiden Variablen x und y ist, $x = \varphi_{\varkappa\nu}(z)$, $y = \varphi_{(\varkappa-1)\nu}(z)$ einzusetzen. Dann entstehen die ganzen Functionen von z

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)\nu}(z) - \varphi_{\varkappa\nu}(z)}{\varphi_{\varkappa\nu}(z) - \varphi_{(\varkappa-1)\nu}(z)} = Q_{\varkappa\nu}(z),$$

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)\nu}(z) - \varphi_{\varkappa\nu}(z)}{\varphi_\nu(z) - \varphi_0(z)} = \prod_{\lambda=1}^{\lambda=\varkappa} \frac{\varphi_{(\lambda+1)\nu}(z) - \varphi_{\lambda\nu}(z)}{\varphi_{\lambda\nu}(z) - \varphi_{(\lambda-1)\nu}(z)} = Q_\nu Q_{2\nu} \cdots Q_{\varkappa\nu},$$

$$\frac{\varphi_{(\varkappa+1)\nu}(z) - z}{\varphi_\nu(z) - z} = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa} \frac{\varphi_{(\lambda+1)\nu}(z) - \varphi_{\lambda\nu}(z)}{\varphi_\nu(z) - z} \tag{3}$$

$$= 1 + Q_\nu + Q_\nu Q_{2\nu} + \cdots + (Q_\nu Q_{2\nu} \cdots Q_{\varkappa\nu}).$$

Hieraus ergiebt sich nun für $\nu = 1$ und $(\varkappa + 1) = m$ das Behauptete als Specialfall in der Form

$$\frac{\varphi_m(z) - z}{\varphi(z) - z} = 1 + Q_1 + Q_1 Q_2 + \cdots + (Q_1 Q_2 \cdots Q_{m-1}). \tag{3a}$$

Im allgemeinen Falle, d. h. für eine allgemeine ganze Function $\varphi(z)$, ist die linke Seite von (3a) nicht weiter durch $(\varphi(z) - z)$ theilbar. Denn träte dies allgemein ein, dann müsste es auch für die besondere Annahme

$$\varphi(z) = z^\mu, \quad \varphi(\varphi(z)) = z^{\mu^2}, \quad \cdots \quad \varphi_m(z) = z^{\mu^m}$$

eintreten, d. h. es müsste auch der Quotient

$$\frac{z^{\mu^m} - z}{(z^\mu - z)^2}$$

eine ganze Function von z sein; das ist aber offenbar nicht so, weil ja der Nenner den Factor z^2, der Zähler aber nur z^1 enthält.

§ 271. Wir verstehen jetzt unter z' irgend einen festen Werth. Dann gilt die Reihe der folgenden Sätze.

(I.) Giebt es in der Reihe der iterirten Functionen

$$z', \quad \varphi(z'), \quad \varphi_2(z'), \quad \varphi_3(z'), \cdots \tag{4}$$

irgend ein Glied, welches gleich z' wird, so giebt es ein $\varphi_\alpha(z')$ der Art, dass alle Glieder, deren Werth z' ist, der Reihe

$$z', \quad \varphi_\alpha(z'), \quad \varphi_{2\alpha}(z'), \quad \varphi_{3\alpha}(z'), \cdots \tag{5}$$

angehören, und nur sie.

In der That, wenn $\varphi_\alpha(z')$ das erste Glied in der Reihe (4) ist, welches $= z'$ wird, und $\varphi_\beta(z')$ irgend ein anderes späteres von gleicher Eigenschaft, und wenn endlich $\beta = \mu\alpha + \gamma$ gesetzt wird $(\gamma < \alpha)$, so folgt $\varphi_\beta(z') = \varphi_\gamma[(\varphi_{\mu\alpha}(z')] = \varphi_\gamma(z') = z'$, und das ist mit den Annahmen nur verträglich, falls $\gamma = 0$ wird.

(II.) Die Glieder der Reihe

$$z', \quad \varphi(z'), \quad \varphi_2(z'), \cdots \varphi_{\alpha-1}(z') \tag{6}$$

sind dann sämmtlich von einander verschieden; bei der Fortsetzung der Iteration wiederholen sich diese Werthe in der gleichen Reihenfolge.

In der That, wenn in (6) gleiche Werthe vorkämen, wenn also etwa

$$\varphi_\varkappa(z') = \varphi_\lambda(z') \qquad (\varkappa < \lambda < \alpha)$$

wäre, dann müsste ja auch

$$\varphi_{\alpha-\lambda+\varkappa}(z') = \varphi_{\alpha-\lambda}[\varphi_\varkappa(z')] = \varphi_{\alpha-\lambda}[\varphi_\lambda(z')] = \varphi_\alpha(z') = z'$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht. Der zweite Theil des Satzes ist klar.

(III.) Bedeutet z' eine Wurzel von $\varphi_\varkappa(z) - z = 0$, so ist jedes $\varphi_\lambda(z')$ bei willkürlichem Index λ auch eine Wurzel derselben Gleichung. Denn es ist

$$\varphi_\varkappa[\varphi_\lambda(z')] = \varphi_\lambda[\varphi_\varkappa(z')] = \varphi_\lambda(z').$$

Daraus folgt, dass alle Glieder der Reihe

$$z', \quad \varphi(z'), \quad \varphi_2(z'), \cdots \varphi_{\varkappa-1}(z')$$

Wurzeln von $\varphi_\varkappa(z) - z = 0$ sind. Ist in dieser Reihe $\varphi_{\lambda_1}(z')$ das erste Glied, dessen Werth wieder gleich z' wird, dann sind nach (I.) und (II.)

$$z', \quad \varphi(z'), \quad \varphi_2(z'), \cdots \varphi_{\lambda_1-1}(z')$$

von einander verschiedene Wurzeln von $\varphi_\varkappa(z) - z = 0$, und λ_1 wird dabei ein Theiler von $\varkappa$. So erkennt man:

(IV.) Die Wurzeln von $\varphi_\varkappa(z) - z = 0$ ordnen sich in Zeilen

$$\begin{array}{llll} z', & \varphi(z'), & \varphi_2(z'), \cdots \varphi_{\lambda_1-1}(z'), & (\varphi_{\lambda_1}(z') = z'), \\ z'', & \varphi(z''), & \varphi_2(z''), \cdots \varphi_{\lambda_2-1}(z''), & (\varphi_{\lambda_2}(z'') = z''), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

und λ_1, λ_2 $\cdots$ sind Theiler von $\varkappa$. Jede Wurzel von $\varphi(z) - z = 0$ und nur diese werden dabei eingliedrige Zeilen bilden. Die Wurzeln von

$$T_\varkappa(z) = \frac{\varphi_\varkappa(z) - z)}{\varphi(z) - z} = 0$$

ordnen sich deshalb in ein ähnliches Schema ein, in welchem keine eingliedrigen Zeilen vorkommen. Ist q eine Primzahl, dann ordnen sich die Wurzeln von $T_q(z) = 0$ in ein Schema

$$\begin{array}{llll} z', & \varphi(z'), & \varphi_2(z'), \cdots \varphi_{q-1}(z'), \\ z'', & \varphi(z''), & \varphi_2(z''), \cdots \varphi_{q-1}(z''), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ein, dessen Zeilen sämmtlich je q Glieder enthalten.

Hierbei ist $\varphi(z)$ als allgemeine Function gedacht (S. 315, unten). Wenn man die Coefficienten von φ nunmehr so ändert, dass, wenn dies möglich ist, die beiden Gleichungen

$$T_q(z) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(z) - z = 0$$

eine Wurzel z' gemeinsam haben, dann werden alle Glieder der ersten Zeile im letzten Schema einander gleich werden, und so folgt das Theorem:

(V.) Wenn für eine specielle Function $\varphi(z)$ die beiden Gleichungen

$$T_q(z) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(z) - z = 0$$

eine Wurzel z' gemeinsam haben, so ist dieses z' eine q-fache Wurzel der ersten von beiden Gleichungen, sobald q eine Primzahl ist.

Aus diesem Satze folgt eine merkwürdige algebraische Formel. Es sei eine ganze Function vorgelegt

$$\varphi(z) = az + bz^2 + cz^3 + \cdots;$$

dann beginnt φ_q mit $a^q z$, und wir können setzen

$$\varphi_q(z) = a^q z + b_q z^2 + c_q z^3 + \cdots,$$

$$T_q(z) = \frac{\varphi_q(z) - z}{\varphi(z) - z} = \frac{a^q - 1}{a - 1} + \beta_q z^1 + \gamma_q z^2 + \cdots + \delta_q z^{q-1} + \cdots.$$

Hier ist $z = 0$ eine Wurzel von $\varphi(z) = 0$. Wählen wir a als Wurzel von

$$\frac{a^q - 1}{a - 1} = a^{q-1} + a^{q-2} + \cdots + a + 1 = 0, \tag{7}$$

also als primitive Einheitswurzel, dann hat auch $T_q = 0$ die Wurzel $z = 0$; folglich ist sie nach (V.) eine q-fache Wurzel dieser Gleichung, d. h. es fallen dann die Glieder mit $z^1, z^2, \cdots z^{q-1}$ im Ausdrucke von T_q fort, oder alle die Gleichungen für a

$$\beta_q = 0, \quad \gamma_q = 0, \cdots \delta_q = 0$$

haben mit (7) eine Wurzel gemeinsam. (7) ist aber, wie wir bald beweisen werden, irreductibel. Deshalb müssen die Ausdrücke $\beta_q, \gamma_q, \cdots \delta_q$ durch $(a^q - 1) : (a - 1)$ theilbar sein.

(VI.) Setzt man

$$\varphi(z) = az + bz^2 + cz^3 + \cdots,$$
$$\varphi_q(z) = a^q z + b_q z^2 + c_q z^3 + \cdots + d_q z^q + \cdots,$$
$$T_q(z) = \frac{a^q - 1}{a - 1} + \beta_q z + \gamma_q z^2 + \cdots + \delta_q z^{q-1} + \cdots,$$

dann werden die Coefficienten $\beta_q, \gamma_q, \cdots \delta_q$ von $z, z^2, \cdots z^{q-1}$ in T_q, und $b_q, c_q, \cdots d_q$ von $z^2, z^3, \cdots z^q$ in $\varphi_q(z)$ durch

$$a^{q-1} + a^{q-2} + \cdots + a + 1$$

theilbar. Die letzte Eigenschaft folgt daraus, dass

$$\varphi_q(z) - z = (\varphi(z) - z) T_q(z)$$

in unserem Falle die Wurzel $z = 0$ in $(q + 1)$-facher Multiplicität besitzt, so dass im Polynome $\varphi_q - z$ die Glieder mit $z, z^2, \cdots z^q$ sämmtlich für das oben gewählte a verschwinden müssen.

(VII.) Die gemeinsamen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\varphi_\varkappa(z) = z, \quad \varphi_\lambda(z) = z$$

sind auch Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_\mu(z) = z,$$

wenn μ den grössten gemeinsamen Theiler von $\varkappa$ und λ bezeichnet.

Den gemachten Voraussetzungen nach giebt es in (4) die beiden Glieder $\varphi_\varkappa(z')$, $\varphi_\lambda(z')$, welche $= z'$ werden, wenn z' eine der gemeinsamen Wurzeln ist. Also sind $\varkappa$ und λ Vielfache desjenigen ersten Index, für den die Iteration z' als Resultat liefert. Das zeigt, dass μ ein Vielfaches dieses ersten Index wird.

(VIII). Ist z' eine Wurzel von $\varphi_\varkappa(z) - z = 0$, so ist es auch eine Wurzel von $\varphi_{m\varkappa}(z) - z = 0$, wenn m die Reihe der positiven ganzen Zahlen durchläuft.

Denn es ist

$$\varphi_{2\varkappa}(z') = \varphi_\varkappa(\varphi_\varkappa(z')) = \varphi_\varkappa(z') = z',$$
$$\varphi_{3\varkappa}(z') = \varphi_\varkappa(\varphi_{2\varkappa}(z')) = \varphi_\varkappa(z') = z',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(IX.) Hat das Gleichungssystem für zwei Unbekannte x und y

$$\varphi_\varkappa(x) = y, \quad \varphi_\lambda(y) = x$$

die Lösungen $x = x'$, $y = y'$, dann sind x', y' Wurzeln der Gleichung

$$\varphi_{\varkappa+\lambda}(x) - x = 0;$$

und wenn umgekehrt x' eine Lösung der letzten Gleichung ist, dann bilden

$$x' \text{ und } y' = \varphi_\varkappa(x')$$

ein Wurzelpaar des ersten Gleichungssystems.

§ 272. Das einfachste Beispiel solcher Iterirung liefert, abgesehen von dem wenig interessanten $\varphi = \alpha z + \beta$, die gebrochene Function

$$\varphi(z) = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}, \tag{8}$$

worin α_1, β_1, γ_1, δ_1 reelle Grössen sind, für die $\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 \neq 0$ sein soll, weil sonst $\varphi(z) = \beta_1 : \delta_1 = \alpha_1 : \gamma_1$ und also eine Constante werden würde. Wir setzen

$$\varphi_2(z) = \frac{\alpha_2 z + \beta_2}{\gamma_2 z + \delta_2}, \quad \varphi_3(z) = \frac{\alpha_3 z + \beta_3}{\gamma_3 z + \delta_3}, \quad \cdots,$$

$$\varphi_m(z) = \frac{\alpha_m z + \beta_m}{\gamma_m z + \delta_m}$$

und schliessen aus der Gleichung

$$\varphi_m(z) = \varphi(\varphi_{m-1}(z)) = \frac{\alpha_{m-1}(\alpha_1 z + \beta_1) + \beta_{m-1}(\gamma_1 z + \delta_1)}{\gamma_{m-1}(\alpha_1 z + \beta_1) + \delta_{m-1}(\gamma_1 z + \delta_1)}$$

durch Vergleichung der Coefficienten der beiden letzten Ausdrücke

$$\alpha_m = \alpha_1\alpha_{m-1} + \gamma_1\beta_{m-1}, \quad \beta_m = \beta_1\alpha_{m-1} + \delta_1\beta_{m-1},$$
$$\gamma_m = \alpha_1\gamma_{m-1} + \gamma_1\delta_{m-1}, \quad \delta_m = \beta_1\gamma_{m-1} + \delta_1\delta_{m-1}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}\alpha_m\delta_m - \beta_m\gamma_m &= (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)\,(\alpha_{m-1}\delta_{m-1} - \beta_{m-1}\gamma_{m-1}) \\ &= (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)^2\,(\alpha_{m-2}\delta_{m-2} - \beta_{m-2}\gamma_{m-2}) \\ &\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= (\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1)^m.\end{aligned}$$

Denkt man sich von vorn herein jeden Coefficienten von φ durch $\sqrt{|\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1|}$ dividirt, so entsteht die einfachere Formel

$$\alpha_m\delta_m - \beta_m\gamma_m = \pm 1.$$

Wir untersuchen nun, unter welchen Bedingungen die Gleichung

$$\varphi_m(z) = z$$

für jedes z, also identisch erfüllt werden wird.

Diejenigen Werthe z, welche bei unserer einmal angewendeten Operation φ ungeändert bleiben, genügen der Gleichung

$$z = \frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1}$$

oder

$$\gamma_1 z^2 + (\delta_1 - \alpha_1) z - \beta_1 = 0.$$

Wir bezeichnen sie mit z' und z'' und haben wegen der Voraussetzung $(\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1) = \pm 1$

$$\gamma_1 z' = \frac{\alpha_1 - \delta_1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \delta_1}{2}\right)^2 \mp 1}, \quad \gamma_1 z'' = \frac{\alpha_1 - \delta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \delta_1}{2}\right)^2 \mp 1},$$

$$\frac{\gamma_1 z' - \alpha_1}{\gamma_1 z'' - \alpha_1} = \frac{\gamma_1 z'' + \delta_1}{\gamma_1 z' + \delta_1} = \pm \left[\frac{\alpha_1 + \delta_1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 + \delta_1}{2}\right)^2 \mp 1}\right]^2 = N.$$

Wir nehmen nun zuerst an, N sei von 1 verschieden; hierbei sind z' und z'' von einander verschieden. Es wird in diesem Falle, da ja $\varphi(z') = z'$, $\varphi(z'') = z''$ ist,

$$\frac{\varphi(z) - z'}{\varphi(z) - z''} = \left(\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} - \frac{\alpha_1 z' + \beta_1}{\gamma_1 z' + \delta_1}\right) : \left(\frac{\alpha_1 z + \beta_1}{\gamma_1 z + \delta_1} - \frac{\alpha_1 z'' + \beta_1}{\gamma_1 z'' + \delta_1}\right)$$

$$= \frac{z - z'}{z - z''} \cdot \frac{\gamma_1 z'' + \delta_1}{\gamma_1 z' + \delta_1} = N \frac{z - z'}{z - z''},$$

$$\frac{\varphi_2(z) - z'}{\varphi_2(z) - z''} = N^2 \frac{z - z'}{z - z''}, \quad \cdots \quad \frac{\varphi_m(z) - z'}{\varphi_m(z) - z''} = N^m \frac{z - z'}{z - z''}.$$

Die charakteristische Bedingung dafür, dass $\varphi_m(z) = z$ ist, lautet also einfach

$$N^m = 1,$$

und wir untersuchen zunächst, was dies für reelle, und dann, was es für complexe Werthe von N bedeutet.

Im ersten Falle kann nur $N = \pm 1$ sein, und da $N = +1$ ausgeschlossen war, so bleibt allein $N = -1$, $m = 2\varkappa$ möglich. Weil nun schon $N^2 = +1$ wird, so haben wir

$$z = \varphi_2(z) = \frac{(\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1)z + (\alpha_1 + \delta_1)\beta_1}{(\alpha_1 + \delta_1)\gamma_1 z + (\beta_1\gamma_1 + \delta_1^2)},$$

$$(\alpha_1^2 + \beta_1\gamma_1)z + (\alpha_1 + \delta_1)\beta_1 = (\alpha_1 + \delta_1)\gamma_1 z^2 + (\beta_1\gamma_1 + \delta_1^2)z,$$

$$(\alpha_1 + \delta_1)(\gamma_1 z^2 + (\delta_1 - \alpha_1)z - \beta_1) = 0;$$

weil diese Gleichungen für alle z gelten sollen, so ist, da der banale Fall $\alpha_1 = \delta_1$, $\beta_1 = 0$, $\gamma_1 = 0$ ausgeschlossen werden kann, zu setzen

$$\alpha_1 + \delta_1 = 0.$$

Ist N complex, dann muss der Radicand in N negativ sein, folglich gelten in den obigen Gleichungen die oberen Vorzeichen, und man hat

$$\alpha_1\delta_1 - \beta_1\gamma_1 = +1,$$

sowie

$$\left|\frac{\alpha_1+\delta_1}{2}\right|<1.$$

Man kann deshalb

$$\frac{\alpha_1+\delta_1}{2}=\cos\varphi,\quad \sqrt{1-\left(\frac{\alpha_1+\delta_1}{2}\right)^2}=\sin\varphi,$$

$$N=\cos 2\varphi-i\sin 2\varphi,$$

$$1=N^m=\cos 2m\varphi-i\sin 2m\varphi$$

setzen. Daher ist $2m\varphi=2\varkappa\pi$, wobei $\varkappa$ irgend eine ganze Zahl bedeuten muss, und somit ergiebt sich

$$\alpha_1+\delta_1=2\cos\frac{\varkappa\pi}{m}.$$

Die oben für $N=-1$ abgeleitete Bedingung ist unter der hier gefundenen enthalten. Es wird dann und nur dann $\varphi_m(z)=z$ werden, wenn $\frac{\alpha_1+\delta_1}{2}$ gleich dem Cosinus des m^{ten} Theils eines ganzen Vielfachen von π ist.

Bisher hatten wir $N\neq 1$ angenommen. Wir betrachten jetzt $N=1$. Da dann $z'=z''$ ist, so muss

$$\sqrt{\left(\frac{\alpha_1+\delta_1}{2}\right)^2\mp 1}=0$$

sein; also gilt das obere Vorzeichen, und es wird

$$\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1=1,\quad \alpha_1+\delta_1=\pm 2.$$

Das ergiebt für die Iterationen der Reihe nach

$$\varphi_2(z)=\frac{(2\alpha_1\mp 1)z+2\beta_1}{2\gamma_1 z+(2\delta_1\mp 1)},$$

$$\varphi_3(z)=\frac{(3\alpha_1\mp 2)z+3\beta_1}{3\gamma_1 z+(3\delta_1\mp 2)},$$

. . . . . .

$$\varphi_m(z)=\frac{[m\alpha_1\mp(m-1)]z+m\beta_1}{m\gamma_1 z+[m\delta_1\mp(m-1)]}.$$

Soll demnach für jedes z die Gleichung $\varphi_m(z)=z$ gelten, so ist

$$\beta_1=0,\quad \gamma_1=0,\quad \alpha_1=\delta_1;\qquad \varphi(z)=z$$

zu setzen. — Lässt man m wachsen, so nähert sich φ_m dem Werthe

$$\varphi_\infty(z)=\frac{(\alpha_1\mp 1)z+\beta_1}{\gamma_1 z+(\delta_1\mp 1)}.$$

§ 273. Dass bei der Iteration einer ganzen Function $\varphi(z)$ niemals identisch $\varphi_m(z)=z$ werden kann, ist selbstverständlich. Wir wollen hier noch beweisen, dass das Wiederauftreten des Anfangswerthes auch bei keiner gebrochenen, rationalen Function von höherem als dem ersten Grade eintreten kann.

Zu diesem Zwecke betrachten wir eine beliebige gebrochene Function, zerlegen Zähler und Nenner in ihre linearen Factoren und schreiben dies

$$\frac{g(z)}{h(z)} = \frac{a_0(z-a_1)(z-a_2)\cdots}{\alpha_0(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots},$$

wobei wir natürlich voraussetzen dürfen, dass kein $a_1, a_2, \cdots$ einem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ gleich ist. Für z setzen wir in diesen Quotienten die gebrochene Function

$$\varphi(z) = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

ein und nehmen an, dass auch Z und N zwei ganze Functionen ohne gemeinsamen Theiler seien. Die Eintragung dieses Werthes ergiebt

$$\frac{g(\varphi(z))}{h(\varphi(z))} = \frac{a_0(Z-a_1N)(Z-a_2N)\cdots}{\alpha_0(Z-\alpha_1N)(Z-\alpha_2N)\cdots} N^\mu,$$

wobei die positive oder negative ganze Zahl μ die Differenz der Grade von h und g bezeichnet.

In dem Bruche rechts kann sich kein Factor in z, der im Zähler auftritt, gegen einen gleichen im Nenner wegheben. Denn hätten zwei Klammern, etwa

$$Z(z) - a_\lambda N(z) \quad \text{und} \quad Z(z) - \alpha_\mu N(z)$$

einen gemeinsamen Theiler, dann hätte ihn auch ihre Differenz

$$(a_\lambda - \alpha_\mu) N(z) \quad \text{und also auch} \quad Z(z),$$

d. h. gegen die Annahme wären Z und N nicht relativ prim zu einander. —

Wäre nun $\varphi_m(z) = z$, so setzen wir für die voraufgehende Iteration

$$\varphi_{m-1}(z) = \frac{g(z)}{h(z)};$$

dann folgt aus dem bewiesenen Hülfssatze, dass $\varphi_m(z)$ durch Fortheben nicht vereinfacht werden, und dass sonach $\varphi_m(z)$ nur dann $= z$ sein kann, wenn schon $g : h$ und φ selbst linear sind; damit ist die Richtigkeit der Behauptung dargelegt.

So einfach der gegebene Beweis des Hülfssatzes ist, so hat er doch nach der Seite hin einen Mangel, dass bei unserem rein arithmetischen Satze die Existenz von Wurzeln einer Gleichung, also ein algebraisches Theorem vorausgesetzt wurde. Dem können wir folgendermassen abhelfen.

Es seien $g(z)$, $h(z)$ zwei ganze Functionen, unter denen $g(z)$ dem Grade nach höher oder mindestens gleich $h(z)$ ist. Ferner sollen beide Functionen ohne einen gemeinsamen Theiler angenommen werden. Setzt man nun in g und in h für die Variable z den Bruch

$$\varphi = \frac{Z(z)}{N(z)}$$

ein und entfernt die Nenner durch Multiplication mit der niedrigsten dazu nöthigen Potenz von N; dann behaupten wir, dass die neuen Functionen, die mit $g(Z, N)$, $h(Z, N)$ bezeichnet werden mögen, auch keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

Zum Beweise wenden wir auf g und h die Euklid'sche Methode des grössten gemeinsamen Theilers an. Dabei möge

$$g(z) = q_1(z)\,h(z) + h_1(z)$$

die erste Zeile des Schemas sein; q_1 ist ganz wie gewöhnlich der Quotient und h_1 der Rest der Division. Setzt man jetzt wieder $\varphi(z)$ statt z ein und bezeichnet ähnlich wie soeben, dann entsteht hieraus

$$g(Z, N) = q_1(Z, N)\,h(Z, N) + N^{\mu_1} h_1(Z, N).$$

Dabei ist μ_1 die Differenz der Grade von g und h_1. Hätten nun $g(Z, N)$ und $h(Z, N)$ einen gemeinsamen Theiler, so hätte denselben auch, da er offenbar kein Theiler von N^{μ_1} sein kann, die Function $h_1(Z, N)$. Die zweite Zeile des Euklid'schen Schemas sei

$$h(z) = q_2(z)\,h_1(z) + h_2(z);$$

ihr entsprechend bilden wir wiederum

$$h(Z, N) = q_2(Z, N)\,h_1(Z, N) + N^{\mu_2} h_2(Z, N)$$

und schliessen, dass auch $h_2(Z, N)$ denselben Theiler besitzt. So geht es weiter, und da wir schliesslich bei fortgesetzter Division auf eine Constante h_r kommen, so folgt die behauptete Unmöglichkeit der Existenz eines Theilers von $g(Z, N)$ und $h(Z, N)$.

Fünfundzwanzigste Vorlesung.

Die Untersuchungen von Lagrange.

§ 274. Lagrange knüpft einen Theil seiner Untersuchungen über die algebraischen Gleichungen an eine wichtige Transformation an (§ 120). Bezeichnen wir die Wurzeln von

$$(1) \qquad f(z) = z^n - c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} - \cdots \pm c_n = 0$$

mit $z_1, z_2, \cdots z_n$ und setzen die Quadrate der Wurzeldifferenzen

$$(2) \quad \varphi_\alpha = (z_\lambda - z_\mu)^2, \qquad (\lambda < \mu;\ \lambda = 1, 2, \cdots n-1;\ \mu = 2, 3, \cdots n),$$

dann kann, wenn λ und μ alle gestatteten Werthe durchlaufen, φ_α im Ganzen $\frac{1}{2} n(n-1)$ Werthe annehmen. Diese Anzahl werde wie früher

mit ϱ bezeichnet. Alle die ϱ Werthe von φ sind die Wurzeln einer Gleichung ϱ^{ten} Grades

$$(3) \qquad F(\varphi) = \varphi^{\varrho} - C_1\varphi^{\varrho-1} + C_2\varphi^{\varrho-2} - \cdots \pm C_{\varrho} = 0,$$

deren Coefficienten ganze, rationale Functionen von $c_1, c_2, \cdots c_n$ werden. Die bequemste Herstellung von (3) durch Berechnung der Coefficienten C haben wir früher (§ 120) besprochen; wir wollen (3) als Gleichung der Wurzeldifferenz-Quadrate bezeichnen. Wir haben sie bereits bei der Trennung der Wurzeln (§ 238) benutzt.

Welches sind die charakteristischen Bedingungen dafür, dass (3) eine positive Wurzel habe? Offenbar muss $(z_\lambda - z_\mu)$ reell sein $= q$, und also, wenn wir $z_\mu = a + bi$ setzen, $z_\lambda = (q + a) + bi$, d. h. (1) muss Wurzeln besitzen, die in ihren imaginären Theilen übereinstimmen. Dies findet beispielsweise stets dann statt, wenn (1) mehrere reelle Wurzeln besitzt; aber aus dem Vorkommen von positiven Wurzeln φ_α kann noch nicht umgekehrt auf reelle Wurzeln z_λ geschlossen werden. So hat man z. B. für

$$f(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = 0$$

die Wurzeln $1 + i$, $1 - i$, i, $-i$ und daher für φ die Werthe

$$-4,\ 1,\ (1+2i)^2,\ (1-2i)^2,\ 1,\ -4,$$

unter denen zwei positive vorkommen, trotzdem $f = 0$ keine reellen Wurzeln besitzt.

Welches sind ferner die charakteristischen Bedingungen dafür, dass (3) eine negative Wurzel habe? Offenbar muss $(z_\lambda - z_\mu)$ rein imaginär sein $= qi$, und also, wenn wir $z_\mu = a + bi$ setzen, $z_\lambda = a + (b + q)i$, d. h. (1) muss Wurzeln besitzen, die in ihren reellen Theilen übereinstimmen. Dies kann nur stattfinden, wenn (1) überhaupt imaginäre Wurzeln besitzt, und findet dann auch sicher statt, da ja mit einem $z_\lambda = (a + bi)$ zugleich die conjugirt complexe Grösse $z_\lambda' = (a - bi)$ als Wurzel auftritt; denn zwei gleiche reelle Wurzeln geben ein $\varphi_\alpha = 0$. Das Vorkommen von complexen Wurzeln bei (1) ist charakteristisch für das Vorkommen von negativen Wurzeln bei (3).

Complexe Wurzeln können für (3) nur erscheinen, wenn (1) gleichfalls complexe Wurzeln besitzt. Infolge unseres letzten Resultates können wir also sagen: Die Gleichung (3) hat keine complexen Wurzeln, wenn sie keine imaginären Wurzeln besitzt.

§ 275. Aus dieser Eigenthümlichkeit hat schon Waring in seinem Werke: Miscellanea analytica, 1762, einen wichtigen Schluss gezogen, auf den dann später auch Lagrange (Œuvres, Bd. 8 S. 143)

näher eingegangen ist, nicht ohne in einigen Worten Waring's Verdienste zu erwähnen.

Gesetzt, (1) besitzt nur reelle, von einander verschiedene Wurzeln. Dann besitzt (3) lediglich reelle, positive Wurzeln, und also ist nach § 197 die linke Seite von (3) vollständig und besitzt in der Coefficientenreihe nur Zeichenwechsel; mit anderen Worten, alle $C_1, C_2, \cdots C_\varrho$ sind von Null verschieden und positiv. Wenn umgekehrt (3) die eben ausgesprochene Eigenschaft besitzt, dann folgt, dass diese Gleichung keine reelle, negative Wurzel φ_α haben kann, weil für eine solche alle Vorzeichen der Glieder auf der linken Seite einander gleich würden, und die Summe deswegen nicht verschwinden kann. Nach den letzten Resultaten des vorigen Paragraphen hat also (1) dann auch keine complexen Wurzeln. Es ist charakteristisch für die Realität sämmtlicher Gleichungswurzeln von (1), dass (3) eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenwechseln ist, dass also die $C_1, C_2, \cdots C_\varrho$ wesentlich positive Grössen sind.

So erkennt man aus dem Beispiele von § 120 für die Gleichung

$$z^3 - c_1 z^2 + c_2 z - c_3 = 0 \tag{1a}$$

unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $C_2 = (c_1^2 - 3c_2)^2$ ist, als charakteristische Bedingungen für die Realität der Wurzeln der Gleichung (1a) des dritten Grades (vgl. § 216)

$$c_1^2 - 3c_2 > 0,$$
$$-4c_1^3 c_3 + c_1^2 c_2^2 + 18 c_1 c_2 c_3 - 4c_2^3 - 27 c_3^2 > 0.$$

Bei diesen Betrachtungen ist aber festzuhalten, dass die ϱ Bedingungen

$$C_1 > 0, \quad C_2 > 0, \quad \cdots \quad C_\varrho > 0 \tag{4}$$

nicht unabhängig von einander zu sein brauchen; ja wir wissen sogar aus den Ueberlegungen beim Sturm'schen Satze (§ 224), dass schon $(n-1)$ Bedingungen ausreichen, um die Realität aller Wurzeln zu verbürgen; die grosse Zahl von $\varrho = \frac{1}{2} n(n-1)$ Bedingungen (4) muss sich daher stets auf $(n-1)$ reduciren lassen.

§ 276. Die Untersuchungen über das Vorkommen negativer Wurzeln bei (3) haben uns gezeigt, dass die beiden conjugirt complexen Wurzeln $z_\lambda = (a + bi)$ und $z_\lambda' = (a - bi)$ von (1) eine negative Wurzel $(-4b^2)$ in (3) hervorrufen. Wenn daher

$$-\varrho', \quad -\varrho'', \quad -\varrho''', \quad \cdots$$

sämmtliche negative Wurzeln von (3) sind, so befinden sich die Coefficienten von i aller complexen Wurzeln von (1) unter den Grössen

$$(5) \qquad \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho''},\ \tfrac{1}{2}\sqrt{\varrho'''},\ \cdots.$$

Dass nicht nothwendig jede dieser Grössen gleich einem solchen Coefficienten oder, geometrisch gesprochen, gleich einer imaginären Wurzelcoordinate ist, zeigt die Annahme $z_\lambda = (a + bi)$, $z_\mu = (a + b_1 i)$, welche zu einem $\varphi_\alpha = -(b - b_1)^2$ führt. Es ist also noch nöthig, aus (5) die Auswahl zu treffen und zur gefundenen imaginären die reelle Coordinate zu bestimmen. Das macht Lagrange folgendermassen.

In (1) trägt er $z = x + yi$ ein. Dadurch entsteht, wenn

$$(6) \qquad \begin{aligned} f(x) - \tfrac{y^2}{2!} f''(x) + \tfrac{y^4}{4!} f^{IV}(x) \cdots &= g(x, y^2), \\ f'(x) - \tfrac{y^2}{3!} f'''(x) + \tfrac{y^4}{5!} f^{V}(x) \cdots &= h(x, y^2) \end{aligned}$$

gesetzt wird, die Gleichung zwischen den reellen Grössen x und y

$$(6^a) \qquad g(x, y^2) + iy \cdot h(x, y^2) = 0,$$

und wenn nun $z_\lambda = x_\lambda + y_\lambda i$ eine Wurzel von (1) ist, dann müssen die beiden Gleichungen

$$(6^b) \qquad g(x, y_\lambda^2) = 0, \quad y_\lambda h(x, y_\lambda^2) = 0$$

eine reelle Wurzel $x = x_\lambda$ gemeinsam haben. Da es sich bei dieser Untersuchung um complexe Wurzeln z_λ handelt, so ist y_λ von Null verschieden, und dieser Factor kann demnach ohne Schaden bei der zweiten Gleichung weggelassen werden. Ist dies geschehen, dann muss $x = x_\lambda$ ein Nullwerth des gemeinsamen Theilers $T(x, y_\lambda^2)$ der beiden Functionen $g(x, y_\lambda^2)$ und $h(x, y_\lambda^2)$ werden; und jede reelle Wurzel von

$$T(x, y_\lambda^2) = 0$$

giebt eine zu $y_\lambda i$ gehörige reelle Coordinate einer Wurzel z von (1). Es sind also die Grössen (5) in g und h einzutragen, und es ist zu untersuchen, ob ein gemeinsamer Theiler mit reeller Wurzel besteht.

Wir wollen diese Regel an einem früher behandelten Beispiele (§ 254) durchführen, nämlich an der Gleichung dritten Grades

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 2 = 0.$$

Nach § 120 wird die Gleichung der Wurzeldifferenzquadrate

$$\varphi^3 + 12\varphi^2 + 66\varphi + 59 = 0,$$

deren Form sofort zeigt, dass eine negative Wurzel φ_1 vorhanden ist. Wendet man auf die Gleichung in φ das Criterium § 206 an, so zeigt sich, dass φ_1 die einzige negative Wurzel der Gleichung in φ ist; und daher wird $\frac{1}{2}\sqrt{-\varphi_1}$ die imaginäre Coordinate y_1 zweier Wurzeln z_1, z_2. Man findet für sie

$$\varphi_1 = -8{,}616708,$$
$$y_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\varphi_1} = 1{,}467711.$$

Die Gleichungen (6^b) lauten hier abgesehen vom Factor y_1 der zweiten

$$x^3 - 3x^2 + (5 - 3y_1^2)x + (3y_1^2 - 2) = 0, \quad 3x^2 - 6x + (5 - y_1^2) = 0;$$

das wird bei unserem Werthe von y_1^2 bis auf die sechste Decimale

$$x^3 - 3x^2 - 1{,}462531x + 4{,}462531 = 0, \quad x^2 - 2x + 0{,}948608 = 0,$$

und der grösste gemeinsame Theiler beider Polynome ist vom ersten Grade und hat die Form

$$x - 1{,}226698;$$

man erhält daraus die complexen Wurzeln unserer Gleichung

$$z_1 = 1{,}226698 + 1{,}467711\,i, \quad z_2 = 1{,}226698 - 1{,}467711\,i.$$

§ 277. Zu dieser von Lagrange gegebenen Methode haben wir noch eine interessante Bemerkung zu machen. Wir hatten durch die Substitution $z = x + yi$ aus dem Polynome $f(z)$ erhalten

(6^a) $$g(x, y^2) + iy \cdot h(x, y^2) = 0.$$

Die beiden Gleichungen der beiden Unbekannten x und y

(6^c) $$g(x, y^2) = 0 \quad \text{und} \quad yh(x, y^2) = 0$$

haben ihrer Herleitung zufolge genau n reelle Wurzelpaare $(x, y) = (x_1, y_1); (x_2, y_2); \cdots (x_n, y_n)$ gemeinsam. Es liefert dabei der erste Factor der zweiten Gleichung von (6^c) alle und nur die reellen Wurzeln von $f(z) = 0$, wie dies ja auch von vorn herein klar ist, da $g(x, 0) = f(x)$ wird. Der zweite Factor $h(x, y^2)$ liefert durch Vereinigung mit $g(x, y^2)$ alle und nur die complexen Wurzeln. Ordnet man nun g und h nach Potenzen von x und fasst die Functionen als ganze Functionen von x auf, dann wird sicher die Resultante nach x durch Nullsetzen eine Gleichung

(7) $$R_{g,h} = P(y^2) = 0$$

ergeben, die unter ihren reellen Wurzeln y alle imaginären Wurzelcoordinaten der Wurzeln von $f(z) = 0$ besitzt. Hat also $f = 0$ wirklich eine complexe Wurzel $z_1 = x_1 + y_1 i$, dann folgt aus (3) und (7)

$$F(-4y_1^2) = 0, \quad P(y_1^2) = 0$$

und also haben die beiden Gleichungen

$$F(-4\eta) = 0, \quad P(\eta) = 0$$

eine Wurzel gemeinsam. Nun ist der Definition nach

$$F(\varphi) = \prod (\varphi - (z_\lambda - z_\mu)^2) \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots n-1;\ \mu = \lambda + 1, \cdots n),$$

und daraus kann man, wie wir später zeigen werden, den Schluss ziehen, dass $F(\varphi)$ eine irreductible Function sein wird, so lange $f(z)$ allgemein ist, d. h. so lange zwischen den Wurzeln von $f = 0$ keine algebraischen Beziehungen bestehen. Verbindet man dieses Resultat mit dem vorigen, dann zeigt sich, dass im allgemeinen Falle $P(y^2)$ durch $F(-4y^2)$ theilbar sein muss. Weiter erkennen wir aus (6), dass die Coefficienten von x^ν in g und h nach y nur bis zur Potenz $y^{n-\nu}$ aufsteigen, wenn ν gerade, und nur bis zur Potenz $y^{n-\nu-1}$ wenn ν ungerade ist. Da ferner nach § 137 die Resultante $P(y^2)$ isobarisch ist von einem Grade, der gleich dem Producte der Gradzahlen von g und von h in x wird, so ist ersichtlich, dass $P(y^2)$ höchstens bis zu $y^{n(n-1)}$ aufsteigt. $F(-4y^2)$ thut dies wirklich, und so können beide Functionen sich höchstens durch einen constanten Factor unterscheiden. Endlich zeigt die Eintragung von $y = 0$ in (6), dass das absolute Glied von $P(y^2)$ gleich $R_{f,f'}$ und daher nach § 158 gleich D_f, d. h. bis auf das Vorzeichen gleich dem absoluten Gliede von $F(-4y^2)$ wird. Wir sehen also: Setzt man

$$f(z) = f(x + yi) = g(x, y^2) + iy \cdot h(x, y^2),$$

so wird die Resultante der beiden Functionen g, h von x

$$R_{g,h} = P(y^2)$$

gleich $F(-4y^2)$, wobei $F(\varphi)$ die Gleichung der Wurzeldifferenz-Quadrate von $f(z) = 0$ bedeutet. Dies giebt eine bequeme Methode, um die Gleichung der Wurzeldifferenz-Quadrate in geschlossener Form, als Determinante n^{ter} Ordnung aufzuschreiben und zu berechnen. Zugleich erkennt man hieraus, dass sämmtliche Wurzeln von $P(y^2) = 0$ durch die Formel

$$y = \pm \tfrac{1}{2} i[(x_\lambda - x_\mu) + i(y_\lambda - y_\mu)]$$

gegeben werden.

§ 278. Die oben besprochene Lagrange'sche Methode liefert die complexen Wurzeln von $f(z) = 0$ durch Aufsuchung der reellen, positiven Wurzeln gewisser anderen Gleichungen. Lagrange hat nun weiter auch eine Vorschrift zur näherungsweisen Berechnung der positiven Wurzeln algebraischer Gleichungen angegeben, die wir jetzt zu besprechen haben. Sie beruht auf der Benutzung der Kettenbrüche.

Wir nehmen an, dass eine reelle, positive Wurzel von $f = 0$ zwischen den ganzen Zahlen a und $(a + 1)$ gelegen sei. Setzt man dann

$$z = a + \frac{1}{z'}$$

in (1) ein und multiplicirt mit z'^n, so erhält man eine neue Gleichung

$$(8) \qquad f_1(z') = c_0' z'^n - c_1' z'^{n-1} + c_2' z'^{n-2} - \cdots \pm c_n' = 0,$$

welche eine Wurzel $z' = \frac{1}{z-a}$ besitzt, d. h. also eine positive Wurzel z', welche grösser ist als 1. Für diese sucht man nun durch Probiren das nächst niedrige Ganze a_1 und setzt wieder

$$z' = a_1 + \frac{1}{z''}$$

in die letzte Gleichung ein. Dadurch kommt man nach Multiplication mit z''^n zu der Gleichung

$$(9) \qquad f_2(z'') = c_0'' z''^n - c_1'' z''^{n-1} + c_2'' z''^{n-2} - \cdots \pm c_n'' = 0,$$

welche eine Wurzel $z'' = \frac{1}{z'-a}$ besitzt, d. h. also eine positive Wurzel z'', welche grösser ist als 1. Für diese sucht man ebenfalls das nächst niedere Ganze a_2 und setzt

$$z'' = a_2 + \frac{1}{z'''},$$

u. s. f. So erhält man für z bei weiterer Fortsetzung einen Kettenbruch

$$(10) \qquad z = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}},$$

der in bekannter Weise aufgerechnet werden muss. —

Es ist ersichtlich, dass wenn zwischen a und $(a+1)$ mehrere Wurzeln von (1) liegen, z' ebenso viele verschiedenen Werthe annehmen kann, so dass also (8) mehrere positiven Wurzeln > 1 besitzt, und umgekehrt. Wählt man a_1 als den Näherungswerth für eine dieser Wurzeln, dann kann auch (9) noch mehrere positive, die Einheit übertreffenden Wurzeln z'' haben, falls (1) noch mehrere Wurzeln zwischen den Grenzen

$$a + \frac{1}{a_1} \quad \text{und} \quad a + \frac{1}{a_1 + 1},$$

also in dem von $\left(a + \frac{1}{a_1}\right)$ aus auf eine Länge von $\frac{1}{a_1(a_1+1)}$ wachsenden Intervalle hat. Ebenso kann die Gleichung für z''' noch mehrere die Einheit übertreffenden Wurzeln besitzen, falls (1) noch mehrere Wurzeln zwischen

$$a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \quad \text{und} \quad a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + 1}},$$

also in dem betreffenden Intervalle von der Grösse $\frac{-1}{(a_1 a_2 + 1)(a_1 a_2 + a_1 + 1)}$ besitzt, u. s. f. Man erkennt aber zugleich, dass von einer bestimmten

Grenze an sämmtliche transformirten Gleichungen nur eine einzige positive, die Einheit übertreffende Wurzel liefern werden, und dass, sobald die erste solche transformirte Gleichung erreicht ist, alle folgenden dieselbe Eigenschaft haben werden.

Man überzeugt sich leicht davon, dass die Transformationen durch die Formeln

$$f_1(z) = f(a)z^n + \frac{1}{1!}f'(a)z^{n-1} + \frac{1}{2!}f''(a)z^{n-2} + \cdots,$$

$$f_2(z) = f_1(a_1)z^n + \frac{1}{1!}f_1'(a_1)z^{n-1} + \frac{1}{2!}f_1''(a_1)z^{n-2} + \cdots,$$

$$f_3(z) = f_2(a_2)z^n + \frac{1}{1!}f_2'(a_2)z^{n-1} + \frac{1}{2!}f_2''(a_2)z^{n-2} + \cdots,$$

. . . . . .

geliefert werden.

§ 279. Als Beispiel wählen wir unsere frühere Gleichung

$$z^3 - 3z^2 + 5z - 2 = 0.$$

Hierfür wird $a = 0$, also $z = \frac{1}{z'}$, und dann entstehen der Reihe nach durch die angegebenen Transformationen die Gleichungen

$$2z^3 - 5z^2 + 3z - 1 = 0, \qquad z' = 1 + \frac{1}{z''};$$

$$z^3 + z^2 - z - 2 = 0, \qquad z'' = 1 + \frac{1}{z'''};$$

$$z^3 - 4z^2 - 4z - 1 = 0, \qquad z''' = 4 + \frac{1}{z^{IV}};$$

$$17z^3 - 12z^2 - 8z - 1 = 0, \qquad z^{IV} = 1 + \frac{1}{z^V};$$

$$4z^3 - 19z^2 - 39z - 17 = 0, \qquad z^V = 6 + \frac{1}{z^{VI}};$$

$$71z^3 - 165z^2 - 53z - 4 = 0, \qquad z^{VI} = 2 + \frac{1}{z^{VII}};$$

$$202z^3 - 139z^2 - 261z - 71 = 0, \qquad z^{VII} = 1 + \frac{1}{z^{VIII}};$$

$$269z^3 - 67z^2 - 467z - 202 = 0, \qquad z^{VIII} = 1 + \frac{1}{z^{IX}};$$

$$467z^3 - 206z^2 - 740z - 269 = 0, \qquad z^{IX} = 1 + \frac{1}{z^X};$$

. . . . . .

Aus den Werthen der a ergeben sich die Näherungswerthe

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{6}{11}, \frac{41}{75}, \frac{88}{161}, \frac{129}{236}, \frac{217}{397}, \frac{346}{633}, \frac{563}{1030} = 0{,}546601,$$

und aus der Grösse des Nenners ersieht man, dass der letzte Werth in allen sechs Decimalstellen richtig ist.

§ 280. Aus dem Schema des vorigen Paragraphen tritt heraus, dass die transformirten Gleichungen von $f_3(z) = 0$ an auf den positiven Anfangscoefficienten lauter negative Coefficienten folgen lassen. Lagrange hat dies bemerkt, aber seine auf diese Eigenthümlichkeit gerichteten Untersuchungen*) bedurften noch eines Abschlusses, der erst von Vincent**) gegeben ist. Wir wollen uns mit dieser Frage beschäftigen.

In (1) tragen wir als Substitution

$$z = \frac{P_x \zeta + P_{x-1}}{Q_x \zeta + Q_{x-1}} \qquad (x = 1, 2, \cdots)$$

ein, wobei über die P und die Q vorausgesetzt werden soll, dass sämmtliche Grössen positiv sind, und dass die Differenzen

$$\frac{P_x}{Q_x} - \frac{P_{x-1}}{Q_{x-1}}$$

mit wachsendem x beliebig klein werden. Durch die Umkehrung der Substitution erhält man den Ausdruck

$$\zeta = q_x \frac{\sigma_{x-1} - z}{z - \sigma_x} \qquad \left(q_x = \frac{Q_{x-1}}{Q_x}, \quad \sigma_x = \frac{P_x}{Q_x}\right),$$

und daraus geht hervor, dass einer reellen Wurzel z_1 von (1) wieder eine reelle Wurzel

$$\zeta_1 = q_x \frac{\sigma_{x-1} - z_1}{z_1 - \sigma_x}$$

der transformirten Gleichung in ζ entspricht. Ist z_1 nicht die Grenze der sich die Brüche σ_{x-1}, σ_x, $\cdots$ nähern, dann werden von einem bestimmten x ab die Vorzeichen im Zähler und Nenner von ζ_1 verschieden sein, und ζ_1 wird sich der Grenze $(-q_x)$ beliebig nähern, da σ_x beliebig wenig von σ_{x-1} verschieden wird. Das Gleiche wird bei allen reellen Wurzeln ζ_2, ζ_3, $\cdots$ der transformirten Gleichung stattfinden, bei denen die entsprechenden z_2, z_3, $\cdots$ nicht gleich $\lim \sigma_x$ werden. Das ihrer Gesammtheit entsprechende Polynom der transformirten Gleichung nähert sich also mit allen seinen Coefficienten mehr und mehr denen einer Potenz von $(\zeta + q_x)$.

Ist dagegen eine Wurzel von (1) z. B. z_0 der Grenzwerth von σ_x, derart, dass z_0 stets zwischen zwei aufeinanderfolgenden σ liegt, dann

---

*) Œuvres, Bd. VIII, Note XII, S. 286.

**) J. de M. I, 341; Note sur la résolution des équations numériques.

wird ζ_0 einen positiven Werth, etwa $+p_\varkappa$ erhalten und zum Wurzelfactor $(\zeta - p_\varkappa)$ gehören. Ueber den Werth von $p_\varkappa$ lässt sich nichts aussagen.

Ferner entspricht der complexen Gleichungswurzel $(x_1 + iy_1)$ von (1) die Wurzel ζ_1 der transformirten Gleichung:

$$\xi_1 + i\eta_1 = q_\varkappa \frac{\sigma_{\varkappa-1} - x_1 - iy_1}{x_1 + iy_1 - \sigma_\varkappa} = q_\varkappa \frac{(\sigma_{\varkappa-1} - x_1)(x_1 - \sigma_\varkappa) - y_1^2 - iy_1(\sigma_{\varkappa-1} - \sigma_\varkappa)}{(x_1 - \sigma_\varkappa)^2 + y_1^2}.$$

Man erkennt sofort, dass bei hinreichend hohem $\varkappa$ die imaginäre Coordinate η_1 sich der Null, und die reelle dem Werthe $(-q_\varkappa)$ nähert; genau wie dies bei den reellen Wurzeln erster Sorte stattfand, wird also auch hier bei hinreichend hohem $\varkappa$ der Wurzelfactor $[\zeta - (\xi_1 + i\eta_1)]$ sich beliebig wenig von $(\zeta + q_\varkappa)$ unterscheiden.

Besitzt (1) keine Wurzel z_0, welche zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Werthen der convergirenden Brüche

$$\frac{P_1}{Q_1}, \frac{P_2}{Q_2}, \cdots \frac{P_{\varkappa-1}}{Q_{\varkappa-1}}, \frac{P_\varkappa}{Q_\varkappa}, \cdots \tag{11}$$

liegt, dann nähert sich die transformirte Gleichung asymptotisch der Form

$$(\zeta + q_\varkappa)^n = \zeta^n + \binom{n}{1} q_\varkappa \zeta^{n-1} + \binom{n}{2} q_\varkappa^2 \zeta^{n-2} + \cdots + q_\varkappa^n \quad \left(q_\varkappa = \frac{Q_{\varkappa-1}}{Q_\varkappa}\right).$$

Ist dagegen eine derartige Wurzel z_0 vorhanden, dann erhält man für die Gleichung in ζ die Form

$$\begin{aligned}(\zeta - p_\varkappa)(\zeta + q_\varkappa)^{n-1} = \zeta^n &+ \left[\binom{n-1}{1} q_\varkappa - p_\varkappa\right] \zeta^{n-1} \\ &+ \left[\binom{n-1}{2} q_\varkappa - \binom{n-1}{1} p_\varkappa\right] q_\varkappa \zeta^{n-2} \\ &+ \left[\binom{n-1}{3} q_\varkappa - \binom{n-1}{2} p_\varkappa\right] q_\varkappa^2 \zeta^{n-3} + \cdots - p_\varkappa q_\varkappa^{n-1}.\end{aligned} \tag{12}$$

Falls auf der rechten Seite einer der Coefficienten negativ wird, muss, wie man leicht sieht, der folgende und also auch jeder folgende negativ sein. Der letzte Coefficient ist negativ, da $p_\varkappa$ positiv wird.

Ist eine Wurzel z_0 vorhanden, welche zwischen je zwei aufeinander folgenden Werthen der Brüche (11) liegt, dann besitzt die Gleichung in ζ stets einen und nur einen Zeichenwechsel in der Reihe der Coefficienten bei hinreichend hohem $\varkappa$.

Bei der Lagrange'schen Transformationsmethode treten die hier besprochenen Verhältnisse ein, da man (11) mit der Reihe der durch den Kettenbruch (10) gelieferten Näherungswerthe zusammenfallen

lassen kann. Dass der Zeichenwechsel nicht nothwendig beim zweiten Gliede einzutreten braucht, wie dies beim Beispiele des vorigen Paragraphen eintrat, zeigt die Behandlung der Function

$$f(z) = (z^2 - z - 1)(z + 1)^2,$$

wenn man die Wurzel $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ zu berechnen sucht.

§ 281. Die auseinandergesetzte Methode steht, trotzdem Lagrange sie über die Newton'sche setzen möchte, in ihrer praktischen Anwendbarkeit der einfachen Newton'schen nach. Die auszuführenden Rechnungen sind von ermüdender Weitschweifigkeit. Sie zerfallen in zwei verschiedene Theile. Einmal ist nach Auffindung jedes Theilnenners eine Transformation der Gleichung vorzunehmen, und dann muss für diese transformirte Gleichung wieder eine positive, die Einheit übertreffende Wurzel gesucht werden, welche als neuer Theilnenner zu benutzen sein wird. Lagrange hat gezeigt, dass nach einigen Anfangswerthen für die Theilnenner alle folgenden ohne mühsames Probiren direct bestimmt werden können. Die Ableitung dieser Vorschrift bei Lagrange ist etwas umständlich. Aus der Gleichung (12) können wir sein Schlussresultat direct entnehmen. Hat man nämlich

$$f_x(\xi) = c_0^{(x)}\xi^n - c_1^{(x)}\xi^{n-1} + c_2^{(x)}\xi^{n-2} - \cdots \pm c_n^{(x)} = 0$$

als transformirte Gleichung, aus welcher der Werth des neuen Theilnenners a_x zu bestimmen ist, so folgt aus den Ueberlegungen des vorigen Paragraphen erstens, dass a_x gleich der grössten ganzen Zahl sein muss, welche in p_x enthalten ist, und zweitens, dass angenähert

$$\frac{c_1^{(x)}}{c_0^{(x)}} = p_x - \binom{n-1}{1} q_x, \tag{13}$$

$$a_x = \binom{n-1}{1}\frac{Q_{x-1}}{Q_x} + \frac{c_1^{(x)}}{c_0^{(x)}} \tag{13a}$$

sein wird; ja man kann aus (13) an Stelle der ganzen Zahl a_x den Werth p_x als angenäherten vollständigen Theilnenner entnehmen und so beim Abschlusse der Rechnung die Genauigkeit des Resultates noch vermehren.

Weitere algebraische Untersuchungen von Lagrange gehören anderen Gebieten an; wir werden auf sie an gehöriger Stelle noch einzugehen haben.

Sechsundzwanzigste Vorlesung.

Die Gleichungen zweiten, dritten und vierten Grades.

§ 282. Wir sind bisher nur beiläufig, besonders bei der Behandlung der Tschirnhausen-Transformation auf die Lösung der algebraischen Gleichungen der niedersten Grade eingegangen. Hier kehren wir zu dieser Frage zurück, um sie systematisch zu erledigen.

Hat man zunächst die Gleichung zweiten Grades

$$z^2 - 2a_1 z + a_2 = 0, \tag{1}$$

so folgt durch die Substitution

$$z = u + a_1, \quad u = z - a_1$$

die umgewandelte, vereinfachte Gleichung

$$u^2 - (a_1^2 - a_2) = 0.$$

Eine Gleichung von der Form $z^n - c = 0$ heisst eine reine, oder eine binomische Gleichung; eine solche haben wir hier also durch unsere Transformation erlangt und können daraus das Resultat

$$u = \pm\sqrt{a_1^2 - a_2},$$
$$z = a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - a_2}$$

ziehen. Bezeichnen wir die beiden Wurzeln von (1) durch z_1 und z_2, so haben wir je nach dem gewählten Vorzeichen der Quadratwurzel

$$z_1 = a_1 + \sqrt{a_1^2 - a_2}, \quad z_2 = a_1 - \sqrt{a_1^2 - a_2}, \tag{2}$$

$$2a_1 = z_1 + z_2, \qquad 2\sqrt{a_1^2 - a_2} = z_1 - z_2, \tag{3}$$

$$z_\lambda = \frac{z_1 + z_2}{2} \pm \frac{z_1 - z_2}{2}, \qquad (\lambda = 1, 2). \tag{4}$$

Welcher Werth dabei der Quadratwurzel gegeben werden soll, ist ganz in unser Belieben gestellt.

§ 283. Auch die Gleichung dritten Grades

$$z^3 - 3a_1 z^2 + 3a_2 z - a_3 = 0 \tag{5}$$

kann man durch eine Tschirnhausen'sche Transformation, wie in § 115 angegeben ist, in eine reine Gleichung umwandeln. Wir wollen dies schrittweise bewerkstelligen. Zunächst setzen wir

$$z = u + a_1, \quad u = z - a_1$$

und erhalten durch Umwandlung eine Gleichung ohne das Glied mit u^2, nämlich

$$u^3 - 3(a_1^2 - a_2)u - (2a_1^3 - 3a_1 a_2 + a_3) = 0.$$

Der weiteren Behandlung können wir sonach von vorn herein die einfachere Form

$$z^3 + 3c_2 z - 2c_3 = 0 \tag{6}$$

zu Grunde legen. Hierfür wird, da $c_1 = s_1 = 0$ ist (§ 94),

$$3c_2 = -\frac{1}{2}s_2, \quad 2c_3 = +\frac{1}{3}s_3, \quad \Delta = -108(c_2^3 + c_3^2),$$

$$\sqrt{-3\Delta} = 18\sqrt{c_3^2 + c_2^3}.$$

Die Formeln aus § 115 zeigen dann, dass man aus (6) vermittels der Substitution

$$u = 2c_2^2 + (c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3})\, z + c_2 z^2 \tag{7}$$

eine reine Gleichung erhalten muss. Erhebt man (7) in die zweite und in die dritte Potenz, so folgt nach gehöriger Reduction durch (6)

$$u^2 = 2\sqrt{c_3^2 + c_2^3}\,\{2c_2(c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}) - c_2^2 z + (c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3})z^2\} \tag{7a}$$

$$= \frac{2\sqrt{c_3^2 + c_2^3}\,[c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}]}{c_2}\{2c_2^2 + (c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3})z + c_2 z^2\};$$

$$u^3 = 8\sqrt{(c_3^2 + c_2^3)^3}\,[c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}]. \tag{8}$$

Die letzte dieser Gleichungen giebt direct das Resultat der Einführung von u in (6). Man hat also durch Ausziehen der dritten Wurzel

$$u = 2\sqrt{c_3^2 + c_2^3}\,\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}. \tag{9}$$

Aus den beiden Gleichungen (7) und (7a) folgt durch Elimination von z^2

$$2\sqrt{c_3^2 + c_2^3}\, z = u - \frac{c_2 u^2}{2\sqrt{c_3^2 + c_2^3}\,[c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}]}$$

$$= u - \frac{4c_2(c_3^2 + c_2^3)}{u},$$

und daraus als Lösung der Gleichung (6) vom dritten Grade das Schlussresultat in der Form

$$z = \sqrt[3]{\sqrt{c_3^2 + c_2^3} + c_3} - \frac{c_2}{\sqrt[3]{\sqrt{c_3^2 + c_2^3} + c_3}} \tag{10}$$

$$= \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}.$$

§ 284. Zu dem gleichen Ergebnisse kann man auch mit geringerem Aufwande von Rechnung gelangen, indem man nach Euler

$$z = \sigma + \tau, \tag{11}$$

$$z^3 = (\sigma^3 + \tau^3) + 3\sigma\tau(\sigma + \tau) = (\sigma^3 + \tau^3) + 3\sigma\tau z$$

setzt und dann (6) und die aus (11) folgende Gleichung

$$z^3 - 3\sigma\tau \cdot z - (\sigma^3 + \tau^3) = 0$$

mit einander identificirt. Hiernach wird wegen der nothwendigen Uebereinstimmung der Coefficienten in beiden Formen:

$$\sigma^3 + \tau^3 = 2c_3, \qquad \sigma^3\tau^3 = -c_2^3;$$

$$\sigma^3 = c_3 \pm \sqrt{c_3^2 + c_2^3}, \quad \tau^3 = c_3 \mp \sqrt{c_3^2 + c_2^3},$$

wobei gleichzeitig die beiden oberen oder die beiden unteren Zeichen genommen werden müssen, damit die vorhergehende Gleichung befriedigt werde. Daraus ergiebt sich dann wiederum, wie oben

$$(10^a) \qquad z = \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}.$$

§ 285. Bedenkt man, dass die Quadratwurzel zwei verschiedene Werthe repräsentirt, so scheint es, als ob zu der ersten Formel von (10) noch die zweite Formel mit verändertem Vorzeichen der Quadratwurzel, nämlich

$$(11) \qquad z = \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} - \frac{c_2}{\sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}}$$

treten müsse; aus der Identität

$$\sigma\tau = \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}\ \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} = -c_2$$

folgt aber, dass dieses Resultat nur eine andere Form des in (10) erhaltenen darstellt, indem die Summanden sich vertauscht haben.

Bezeichnet man weiter die drei Wurzeln von $\varepsilon^3 - 1 = 0$, also die drei dritten Einheitswurzeln mit 1, ω, ω^2, wobei demnach

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}; \quad \frac{1}{\omega} = \omega^2; \quad \omega^4 = \omega$$

ist, dann folgt für die drei Wurzeln von (1), wenn man dem Symbol $\sqrt[3]{\ }$ einen beliebigen, aber bestimmten von seinen drei möglichen Werthen giebt,

$$z_1 = \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} - \frac{c_2}{\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}},$$

$$(12) \qquad z_2 = \omega\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} - \frac{c_2\omega^2}{\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}},$$

$$z_3 = \omega^2\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} - \frac{c_2\omega}{\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}}.$$

Bei der Anwendung der zweiten Formel von (10) ist zu bedenken, dass die Cubikwurzel im zweiten Summanden von u^2 aus (9), und die im ersten dem u entspricht, dass also hier zu setzen ist

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}},\\
z_2 &= \omega \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}},\\
z_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \omega \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

Die Werthe der beiden in (13) vorkommenden dritten Wurzeln sind nicht von einander unabhängig, sondern sie müssen durch die auch aus $\sigma\tau = -c_2$ hervorgehende Beziehung mit einander verbunden sein. Diese Beschränkung, welche hinzugefügt werden muss, zeigt, dass die Formeln (12) den Formeln (13) vorzuziehen sind.

§ 286. Aus den Untersuchungen des § 216 können wir sofort entnehmen, dass für $c_3^2 + c_2^3 > 0$ nur eine reelle, für $c_3^2 + c_2^3 < 0$ drei reelle und von einander verschiedene Wurzeln vorkommen, während bei $c_3^2 + c_2^3 = 0$ drei reelle Wurzeln vorhanden sind, unter denen mindestens zwei einander gleiche Werthe haben. Das können wir hier, auf unsere Lösungen gestützt, auch direct herleiten.

Ist $c_3^2 + c_2^3 > 0$, so werden die Radicanden der Cubikwurzeln in (13) reell, und daher dürfen für die dritten Wurzeln selbst reelle Werthe genommen werden, die wir mit A und B bezeichnen wollen. Dann findet sich bei der Einführung der Werthe für ω und ω^2

$$
\begin{aligned}
z_1 &= A + B,\\
z_2 &= -\frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}\sqrt{-3}, \qquad (A \neq B)\\
z_3 &= -\frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{-3},
\end{aligned}
$$

d. h. es kommen bei $c_3^2 + c_2^3 > 0$ zwei complexe Wurzeln z vor.

Ist $c_3^2 + c_2^3 = 0$, so wird wegen $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$$z_1 = 2\sqrt[3]{c_3}, \quad z_2 = z_3 = -\sqrt[3]{c_3},$$

d. h. bei $c_3^2 + c_2^3 = 0$ giebt es zwei reelle, gleiche Wurzeln.

Ist endlich $c_3^2 + c_2^3 < 0$, so werden die Radicanden der Cubikwurzeln in (13) complex und einander conjugirt; dasselbe findet dann auch mit den dritten Wurzeln selbst statt, und setzt man daher dementsprechend bei reellen α und β

$$\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} = \alpha + \beta i, \quad \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} = \alpha - \beta i,$$

so folgt für die Ausdrücke der Wurzeln

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 2\alpha,\\
z_2 &= (\alpha + \beta i)\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} + (\alpha - \beta i)\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = -\alpha + \beta\sqrt{3},\\
z_3 &= (\alpha + \beta i)\frac{-1-\sqrt{-3}}{2} + (\alpha - \beta i)\frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = -\alpha - \beta\sqrt{3}.
\end{aligned}
$$

Diese Wurzeln sind reell; sie sind auch von einander verschieden. Denn wäre zuerst

$$2\alpha = -\alpha \pm \beta\sqrt{3},$$

so hätte man

$$\beta = \pm\alpha\sqrt{3}, \quad \alpha + \beta i = -2\alpha\left(\frac{-1 \mp \sqrt{-3}}{2}\right),$$

$$c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3} = (\alpha + \beta i)^3 = -8\alpha^3,$$

und das wäre gegen die Voraussetzung reell. Es kann aber auch nicht

$$-\alpha + \beta\sqrt{3} = -\alpha - \beta\sqrt{3}$$

sein, denn sonst wäre $\beta = 0$ und $c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}$ eine reelle Grösse.

Bei $c_3^2 + c_2^3 < 0$ sind alle drei Wurzeln reell und von einander verschieden.

§ 287. Dieser letzte, der sogenannte irreducible Fall, macht bei der numerischen Rechnung wegen des scheinbar unnöthigen Durchganges durch das Complexe Umständlichkeiten. Es ist für solche Zwecke besser, die Lösung durch goniometrische Functionen zu bebewerkstelligen, um ganz im Gebiete des Reellen zu bleiben.

Es sei, um dies durchzuführen,

$$c_3 = \varrho\cos\varphi, \quad c_3^2 + c_2^3 = -\varrho^2\sin^2\varphi; \qquad (c_2 < 0)$$

dann wird

$$\varrho = \sqrt{-c_2^3}, \quad \cos\varphi = \frac{c_3}{\sqrt{-c_2^3}}, \qquad (c_2 < 0)$$

und also

$$z = \sqrt[3]{\varrho}\left(\left[{}_s^c\varphi\right]^{\frac{1}{3}} + \left[{}_s^c-\varphi\right]^{\frac{1}{3}}\right).$$

Weil nun aber nach einem bekannten Satze

$$\left[{}_s^c\varphi\right]^{\frac{1}{3}} = \left[{}_s^c\frac{\varphi + 2\varkappa\pi}{3}\right] \qquad (\varkappa = 0,\ 1,\ 2)$$

ist, so folgen die drei Gleichungswurzeln in reeller Form

$$z_1 = 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi}{3},$$

$$z_2 = 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$

$$z_3 = 2\sqrt[3]{\varrho}\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3}.$$

Der hier behandelte Fall legt die Frage nahe, ob es nicht möglich sein sollte, bei anderer Anordnung der Rechnung den Durchgang durch das Complexe auch in der algebraischen Auflösungsformel zu vermeiden. Wir werden später erkennen, dass dies durch die Natur der Sache ausgeschlossen ist.

§ 288. Neben die behandelten Auflösungsmethoden für die Gleichung dritten Grades könnten wir auf Grund der ersten Formel in (12) noch diejenige stellen, welche sich durch die Substitution einer Variablen q vermöge

$$z = q - \frac{c_2}{q}$$

ergeben würde. Die nöthigen Rechnungen sind dabei äusserst einfach, die Substitution selbst erscheint dagegen weniger naheliegend. —

Eine rechnerisch complicirtere, theoretisch dagegen eben so einfache wie wichtige Methode stammt von Lagrange; sie beruht auf der Benutzung der symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Ein lineares Aggregat der drei Wurzeln z_1, z_2 und z_3

$$t_1 = z_1 + Az_2 + Bz_3 \tag{14}$$

besitzt bei allen Vertauschungen der z untereinander sechs Werthe

$$\begin{aligned} &t_1 = z_1 + Az_2 + Bz_3, \quad t_2 = z_2 + Az_3 + Bz_1, \quad t_3 = z_3 + Az_1 + Bz_2, \\ &t_4 = z_1 + Az_3 + Bz_2, \quad t_5 = z_2 + Az_1 + Bz_3, \quad t_6 = z_3 + Az_2 + Bz_1 \end{aligned} \tag{15}$$

und genügt deshalb der Gleichung

$$(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)(t - t_5)(t - t_6) = 0.$$

Gelingt es, A und B so zu bestimmen, dass diese Gleichung die einfache Gestalt

$$t^6 - Mt^3 + N = 0$$

annimmt, dann lassen sich die Werthe von t durch Lösung dieser in t^3 quadratischen Gleichung angeben. Für das Zustandekommen dieser Gestalt ist es nöthig und hinreichend, dass mit t_1 zugleich ωt_1, $\omega^2 t_1$ und mit t_4 zugleich ωt_4 und $\omega^2 t_4$ zu den Wurzeln (15) gehören. Wir setzen daher

$$t_3 = \omega t_1, \quad t_2 = \omega^2 t_1; \quad t_6 = \omega t_4, \quad t_5 = \omega^2 t_4$$

und erhalten aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_3 + Az_1 + Bz_2 &= \omega(z_1 + Az_2 + Bz_3), \\ z_2 + Az_3 + Bz_1 &= \omega^2(z_1 + Az_2 + Bz_3) \end{aligned}$$

und den entsprechenden übereinstimmend die Resultate

$$A = \omega, \quad B = \omega^2,$$

$$t_1 = z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3; \quad t_4 = z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3,$$

$$t^6 - Mt^3 + N = (t^3 - t_1^3)(t^3 - t_4^3) = 0,$$

$$t_1^3 + t_4^3 = 2S(z_1^3) - 3S(z_1^2 z_2) + 12 z_1 z_2 z_3 = 54 c_3,$$

$$(t_1 t_4)^3 = (S(z_1)^2 - 3S(z_1 z_2))^3 = -729 c_2^3,$$

$$t^6 - 54 c_3 t^3 - 729 c_2^3 = 0,$$

$$t_1^3 = 27(c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}), \quad t_4^3 = 27(c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}),$$

$$t_1 = 3\sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}, \quad t_4 = 3\sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}.$$

Weil nun gemäss (15) und wegen (6)

$$\begin{aligned} t_1 &= z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3, \\ t_4 &= z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3, \qquad (1 + \omega + \omega^2 = 0) \\ 0 &= z_1 + z_2 + z_3 \end{aligned}$$

ist, so folgt durch lineare Combination dieser drei Gleichungen

$$\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{1}{3}(t_1 + t_4) = \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}, \\ z_2 &= \tfrac{1}{3}(\omega^2 t_1 + \omega t_4) = \omega \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \omega^2 \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}, \\ z_3 &= \tfrac{1}{3}(\omega t_1 + \omega^2 t_4) = \omega^2 \sqrt[3]{c_3 + \sqrt{c_3^2 + c_2^3}} + \omega \sqrt[3]{c_3 - \sqrt{c_3^2 + c_2^3}}. \end{aligned} \tag{13}$$

Die zu Grunde gelegte specielle Form der Gleichung dritten Grades

$$z^3 + 3c_2 z - 2c_3 = 0 \tag{6}$$

ruft hierbei nur geringe Vereinfachungen gegenüber der allgemeinen Form hervor. Setzt man unter Beibehaltung des Coefficienten von z^2

$$z^3 - pz^2 + qz - r = 0, \tag{6a}$$

dann wird die Gleichung sechsten Grades

$$t^6 - (2p^3 - 9pq + 27r)t^3 + (p^2 - 3q)^3 = 0,$$

und die weiteren Aenderungen sind leicht zu übersehen. Man hat

$$\begin{aligned} t_1 &= z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3, \\ t_4 &= z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3, \qquad t_1 = \sqrt[3]{P - \sqrt{Q}}, \quad t_4 = \sqrt[3]{P + \sqrt{Q}} \\ p &= z_1 + z_2 + z_3, \end{aligned} \tag{16}$$

und also findet man

$$\begin{aligned} z_1 &= \tfrac{1}{3}(p + t_1 + t_4), \\ z_2 &= \tfrac{1}{3}(p + \omega^2 t_1 + \omega t_4), \\ z_3 &= \tfrac{1}{3}(p + \omega t_1 + \omega^2 t_4). \end{aligned}$$

Bemerkenswerth ist, dass sowohl t_1 und t_4, d. h. die beiden Cubikwurzeln, welche in die Lösung eingehen, rationale ganze Functionen von z_1, z_2, z_3 sind (mit complexen Coefficienten), als auch $\sqrt{Q}$, d. h. die auftretende Quadratwurzel. Das Erste ist aus (16) zu ersehen; das Letzte folgt aus

$$\begin{aligned} 2\sqrt{Q} &= t_4^3 - t_1^3 = (z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3)^3 - (z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)^3 \\ &= 3\omega(\omega - 1)[z_1^2 z_2 + z_2^2 z_3 + z_3^2 z_1 - z_1 z_2^2 - z_2 z_3^2 - z_3 z_1^2] \\ &= 3\sqrt{-3} \cdot (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1). \end{aligned}$$

Abgesehen von einem constanten Factor ist also die innerste Wurzel, die bei der Lösung auftritt, die Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung. Bei den quadratischen Gleichungen bemerken wir dasselbe.

§ 289. Bei den Gleichungen vierten Grades führt die Tschirnhausen'sche Methode bereits zu recht complicirten Formeln; deshalb lassen wir diese auf Transformation gegründete Lösung bei Seite.

Wir wollen die zu Grunde gelegte Gleichung vierten Grades

$$\zeta^4 - 4a_1\zeta^3 + 6a_2\zeta^2 - 4a_3\zeta + a_4 = 0 \tag{17}$$

zuerst durch die Substitution

$$\zeta = u + a_1, \quad u = \zeta - a_1$$

vereinfachen. Dabei ergiebt sich als reducirte Gleichung

$$u^4 + 6(a_2 - a_1^2)u^2 - 4(a_3 - 3a_2a_1 - 2a_1^3)u + (a_4 - 4a_3a_1 + 6a_2a_1^2 - 3a_1^3) = 0, \tag{18}$$

und die weitere Behandlung können wir demnach an die Form

$$z^4 - 4c_2z^2 - 8c_3z - 4c_4 = 0 \tag{18a}$$

knüpfen. Wir setzen, ähnlich wie bei den Gleichungen dritten Grades nach einem von Euler angegebenen Verfahren*),

$$z = \varrho + \sigma + \tau,$$

$$z^2 - (\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2) = 2(\varrho\sigma + \sigma\tau + \tau\varrho),$$

$$z^4 - 2(\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)z^2 + (\varrho^2+\sigma^2+\tau^2)^2 = 4(\varrho^2\sigma^2 + \sigma^2\tau^2 + \tau^2\varrho^2) + 8\varrho\sigma\tau z$$

und identificiren diese letzte Gleichung mit (18a). Das ergiebt die drei Forderungen

$$\varrho^2 + \sigma^2 + \tau^2 = 2c_2,$$

$$\varrho^2\sigma^2 + \sigma^2\tau^2 + \tau^2\varrho^2 = c_4 + c_2^2,$$

$$\varrho\sigma\tau = c_3,$$

so dass ϱ^2, σ^2 und τ^2 die drei Wurzeln der Gleichung

$$\xi^3 - 2c_2\xi^2 + (c_2^2 + c_4)\xi - c_3^2 = 0 \tag{19}$$

sind. Bezeichnet man diese Wurzeln mit ξ_1, ξ_2, ξ_3, so folgt

$$\varrho = \pm\sqrt{\xi_1}, \quad \sigma = \pm\sqrt{\xi_2}, \quad \tau = \pm\sqrt{\xi_3},$$

und zwar können zwei der Vorzeichen $\pm$ willkürlich angenommen werden, während das dritte so zu wählen ist, dass die Gleichung

$$\varrho \cdot \sigma \cdot \tau = c_3$$

befriedigt wird. Sind demgemäss bei der Darstellung einer Wurzel

$$z_1 = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3} \tag{20}$$

die Vorzeichen richtig gewählt, dann liefern die drei weiteren Zeichencombinationen, welche die Forderung $\varrho\sigma\tau = c_3$ erfüllen,

*) Comment. Petrop. 1738.

$$(20^a)\qquad \begin{aligned} z_2 &= \sqrt{\xi_1} - \sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_3},\\ z_3 &= -\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} - \sqrt{\xi_3},\\ z_4 &= -\sqrt{\xi_1} - \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3} \end{aligned}$$

die übrigen drei Wurzeln von (18ª).

§ 290. Eine andere, bereits von Descartes benutzte Methode beruht darauf, dass man eine Zerlegung des Gleichungspolynoms durchführt, indem man das Polynom von (18ª)

$$z^4 - 4c_2z^2 - 8c_3z - 4c_4 = (z^2 + 2uz + v)(z^2 - 2uz + w)$$

setzt und die noch unbekannten Coefficienten u, v, w bestimmt. Sind sie gefunden, dann ist die Auflösung von (18ª) auf die Lösung zweier quadratischen Gleichungen reducirt. Multiplicirt man rechts durch und vergleicht die Coefficienten gleich hoher Potenzen von z, so folgt

$$v + w = 4u^2 - 4c_2, \quad v - w = \frac{4c_3}{u}, \quad vw = -4c_4,$$

und also daraus weiter

$$v = 2u^2 - 2c_2 + \frac{2c_3}{u}, \quad w = 2u^2 - 2c_2 - \frac{2c_3}{u},$$

$$-4c_4 = \left(2u^2 - 2c_2 + \frac{2c_3}{u}\right)\left(2u^2 - 2c_2 - \frac{2c_3}{u}\right),$$

$$(21)\qquad u^6 - 2c_2u^4 + (c_2^2 + c_4)u^2 - c_3^2 = 0.$$

Ein Blick auf (19) zeigt, dass $\xi = u^2$ ist. Die algebraische Bedeutung von u ist a priori klar: die verschiedenen Werthe von $2u$ und $(-2u)$ sind die verschiedenen Summen von je zwei der Wurzeln z_1, z_2, z_3, z_4, was ja a posteriori auch aus (20) und (20ª) durch die Formen

$$(22)\qquad z_1 + z_2 = 2\sqrt{\xi_1}, \quad z_1 + z_3 = 2\sqrt{\xi_2}, \quad z_1 + z_4 = 2\sqrt{\xi_3}$$

hervorgeht. Die sechs Wurzeln u sind somit direct durch $\pm\sqrt{\xi_1}$, $\pm\sqrt{\xi_2}$, $\pm\sqrt{\xi_3}$ gegeben.

Die Gleichungswurzeln von (18ª) treten hier in einer von (20), (20ª) ganz verschiedenen Form als Summen von nur zwei Quadratwurzeln auf; die Schlussformeln gehen nämlich aus

$$z^2 + 2uz + \left(2u^2 - 2c_2 + \frac{2c_3}{u}\right) = 0,$$

$$z^2 - 2uz + \left(2u^2 - 2c_2 - \frac{2c_3}{u}\right) = 0$$

hervor und lauten in abkürzender Bezeichnung

$$(23)\qquad \begin{aligned} z_{1,2} &= +u \pm \sqrt{-u^2 + 2c_2 + \frac{2c_3}{u}},\\ z_{3,4} &= -u \pm \sqrt{-u^2 + 2c_2 - \frac{2c_3}{u}}. \end{aligned}$$

Dies würde also, wenn man etwa $\sqrt{\xi_1}$ statt u einträgt, zu den Resultaten

$$(23^a)\qquad \begin{aligned} z_{1,2} &= +\sqrt{\xi_1} \pm \sqrt{-\xi_1 + 2c_2 + \frac{2c_3}{\sqrt{\xi_1}}}, \\ z_{3,4} &= -\sqrt{\xi_1} \pm \sqrt{-\xi_1 + 2c_2 - \frac{2c_3}{\sqrt{\xi_1}}} \end{aligned}$$

führen. Vergleicht man dies mit (20), so zeigt sich, dass

$$\sqrt{\xi_1} + \sqrt{-\xi_1 + 2c_2 + \frac{2c_3}{\sqrt{\xi_1}}} = \sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3},$$

oder nach Weglassung von $\sqrt{\xi_1}$ und Quadrirung

$$-\xi_1 + 2c_2 + \frac{2c_3}{\sqrt{\xi_1}} = \xi_2 + \xi_3 + 2\sqrt{\xi_2}\sqrt{\xi_3}$$

werden muss, was, wie die Gleichung (19) beweist, auch wirklich der Fall ist, da $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 2c_2$ und $\xi_1\xi_2\xi_3 = c_3^2$ wird. Die Umwandlung der Formeln (23) in (20) oder umgekehrt ist daher leicht zu bewerkstelligen. Dieser eigenthümliche Zusammenhang unter den Wurzeln, dass nämlich

$$\sqrt{-\xi_1 + 2c_2 + \frac{2c_3}{\sqrt{\xi_1}}} = \sqrt{\xi_2} + \sqrt{\xi_3}$$

ist, erklärt es dann auch, dass die Gesammtheit der vier Wurzelwerthe in (23) stets dieselbe bleibt, welche Wurzel von (21) auch in (23) für u eingesetzt werden möge.

§ 291. Der Lagrange'sche, bei den Gleichungen dritten Grades dargelegte Gedankengang führt hier auf die Einführung einer sechswerthigen Function t der vier Wurzeln z, welcher man am einfachsten die Gestalt giebt $t = z_1 + z_2 - z_3 - z_4$. Daraus folgen dann

$$(24)\qquad \begin{aligned} t_1 &= z_1 + z_2 - z_3 - z_4, & t_4 &= -z_1 - z_2 + z_3 + z_4 = -t_1, \\ t_2 &= z_1 - z_2 + z_3 - z_4, & t_5 &= -z_1 + z_2 - z_3 + z_4 = -t_2, \\ t_3 &= z_1 - z_2 - z_3 + z_4, & t_6 &= -z_1 + z_2 + z_3 - z_4 = -t_3 \end{aligned}$$

als die einzigen verschiedenen Werthe, welche t_1 bei den 24 möglichen Vertauschungen der z untereinander annehmen kann. Die Coefficienten der Gleichung

$$(t-t_1)(t-t_4)(t-t_2)(t-t_5)(t-t_3)(t-t_6) = (t^2-t_1^2)(t^2-t_2^2)(t^2-t_3^2) = 0$$

sind somit rationale ganze Functionen der Coefficienten von (18). Man erhält durch Ausrechnung ihrer Werthe

$$\begin{aligned} t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 &= 4^2 \cdot 2c_2, \\ t_1^2t_2^2 + t_2^2t_3^2 + t_3^2t_1^2 &= 4^4(c_2^2 + c_4), \\ t_1^2t_2^2t_3^2 &= 4^6c_3^2, \end{aligned}$$

und daraus folgt

$$t^6 - 4^2 \cdot 2c_2 t^4 + 4^4(c_2^2 + c_4)t^2 - 4^6 c_3^2 = 0, \tag{25}$$

so dass sich also $t = 4u$ herausstellt. Sind die Werthe von t bestimmt, so liefern die Gleichungen (24) im Vereine mit $z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$ die mit (20) und (20ª) übereinstimmenden Resultate

$$z_1 = \frac{1}{4}(t_1 + t_2 + t_3), \qquad z_2 = \frac{1}{4}(t_1 - t_2 - t_3),$$

$$z_3 = \frac{1}{4}(-t_1 + t_2 - t_3), \quad z_4 = \frac{1}{4}(-t_1 - t_2 + t_3).$$

§ 292. Die Gleichung (19) giebt in Verbindung mit den Formeln (20) und (20ª) Aufschluss über die Natur der Wurzeln. Da (19) vom dritten Grade ist, so besitzt diese Gleichung eine oder drei reelle Wurzeln.

Ist nur eine Wurzel ξ reell, so mögen etwa ξ_2 und ξ_3 conjugirt complex sein. Dann können wir, da auch $\sqrt{\xi_2}$ und $\sqrt{\xi_3}$ conjugirt sind,

$$\sqrt{\xi_2} = p + iq, \quad \sqrt{\xi_3} = p - iq$$

setzen und erkennen, dass z_1 und z_2 reell, dagegen z_3 und z_4 conjugirt complex sind.

Sind die Wurzeln ξ von (19) reell, und ist $c_3 \neq 0$, dann existirt unter den ξ wegen des positiven absoluten Gliedes mindestens eine positive Wurzel. Wir wollen die drei Fälle betrachten, dass alle drei, oder zwei, oder nur eins der ξ positiv ist. Dabei ergeben sich die Sätze: Sind alle drei Wurzeln ξ positiv, dann sind alle vier Wurzeln z reell und von einander verschieden. — Sind zwei der Wurzeln ξ positiv, während die dritte negativ ist, dann sind alle vier Wurzeln z complex. — Ist eine Wurzel etwa ξ_1 positiv, während ξ_2, ξ_3 negativ und von einander verschieden sind, dann sind alle vier Wurzeln z complex. — Sind zwei Wurzeln ξ negativ und einander gleich, dann werden zwei Wurzeln z complex, die andern beiden reell und einander gleich.

Der Grenzfall $c_3 = 0$ hat zur Folge das Verschwinden eines der ξ und daher das a priori ersichtliche Resultat, dass zwei Paare entgegengesetzt gleicher Wurzeln z vorhanden sind.

§ 293. Die innerste in den expliciten Ausdrücken für die z vorkommende Wurzel ist die Quadratwurzel, welche der Lösung von (19) ihren Ursprung verdankt. Nach dem Schlussresultate von § 288 hat diese Wurzel demnach, von einem constanten Factor abgesehen, den Werth

$$(\xi_1-\xi_2)(\xi_2-\xi_3)(\xi_3-\xi_1)$$
$$=(\sqrt{\xi_1}-\sqrt{\xi_2})(\sqrt{\xi_1}+\sqrt{\xi_2})(\sqrt{\xi_2}-\sqrt{\xi_3})(\sqrt{\xi_2}+\sqrt{\xi_3})\cdots$$

und also nach (22), wieder mit Unterdrückung einer multiplicativen Constante, den Ausdruck in den Wurzeln z_1, z_2, z_3, z_4

$$[(z_1+z_2)-(z_1+z_3)][(z_1+z_2)+(z_1+z_3)]\cdots=(z_2-z_3)[z_1+(z_1+z_2+z_3)]\cdots$$
$$=(z_2-z_3)(z_1-z_4)\cdot(z_2-z_4)(z_1-z_3)\cdot(z_3-z_4)(z_1-z_2).$$

Das ist somit, genau wie bei den Gleichungen zweiten und dritten Grades, die Quadratwurzel aus der Discriminante der vorgelegten Gleichung vierten Grades (18[a]). Aber dasselbe gilt auch von der allgemeinen Gleichung (17); denn da die Wurzeln beider durch die Beziehungen

$$\zeta=z+a_1,\quad \zeta_\varkappa-\zeta_\mu=z_\varkappa-z_\mu$$

mit einander verbunden sind, so folgt ohne Weiteres, dass auch hier die Discriminante der ζ als Radicand unter die innerste Wurzel tritt.

Aus der Gleichung (19) können wir die Beantwortung der Frage erhalten, wann eine Gleichung vierten Grades (18[a]) ohne Anwendung von Cubikwurzeln lösbar ist; es ist dazu nur nöthig, dass (19) eine rationale Wurzel besitzt, so dass die andern beiden durch Quadratwurzeln darstellbar sind.

Siebenundzwanzigste Vorlesung.

Einheitswurzeln.

§ 294. Wir haben uns beiläufig bereits mehrfach mit Grössen beschäftigen müssen, bei denen eine Potenz gleich der Einheit wird. Es ist Zeit, dass wir auf ihre Natur und ihre Eigenschaften systematisch eingehen. Die Wurzeln der Gleichung

$$z^m=1 \tag{1}$$

heissen die m^{ten} Einheitswurzeln. Wir bezeichnen sie im Allgemeinen durch die Buchstaben

$$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots \omega_{m-1} \tag{2}$$

und verstehen dabei unter ω_0 die stets als Einheitswurzel beliebiger Ordnung mitauftretende Zahl 1. Die Werthe (2) sind alle von einander verschieden, weil (1) keine vielfachen Wurzeln besitzt. Dies ist daraus ersichtlich, dass z^m-1 mit der Ableitung mz^{m-1} keinen gemeinsamen Theiler haben kann.

Ist eine Grösse ω zugleich eine m^{te} und eine n^{te} Einheitswurzel, so ist sie auch eine k^{te} Einheitswurzel, falls k den grössten gemeinsamen Theiler von m und n bedeutet. Es sei $n > m$ und $n = qm + m_1$ $(m_1 < m)$, dann folgt aus den Gleichungen

$$\omega^m = 1, \quad \omega^n = \omega^{qm+m_1} = (\omega^m)^q \omega^{m_1} = \omega^{m_1} = 1,$$

dass ω auch eine m_1^{te} Einheitswurzel ist. Wenn dann weiter nach dem Euklid'schen Schema $m = q_1 m_1 + m_2$ angenommen wird $(m_2 < m_1)$, dann folgt ebenso, dass ω eine m_2^{te} Einheitswurzel sein muss, u. s. w. Man kann den Beweis auch direct durch den elementaren zahlentheoretischen Satz führen, dass es zwei ganze Zahlen μ, ν giebt, für welche die Gleichung

$$m\mu + n\nu = k$$

gilt; denn hieraus folgt unmittelbar

$$\omega^k = \omega^{m\mu+n\nu} = (\omega^m)^\mu \cdot (\omega^n)^\nu = 1.$$

Die Potenzsummen der m^{ten} Einheitswurzeln genügen den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{m-1} = 0,\\
&\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + \omega_{m-1}^2 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega_0^{m-1} + \omega_1^{m-1} + \omega_2^{m-1} + \cdots + \omega_{m-1}^{m-1} = 0,\\
&\omega_0^m + \omega_1^m + \omega_2^m + \cdots + \omega_{m-1}^m = m,
\end{aligned}$$

und es wird allgemein bei ganzzahligem k

$$\begin{aligned}
\omega_0^k + \omega_1^k + \cdots + \omega_{m-1}^k &= m \quad (\text{wenn } k \equiv 0 \pmod m \text{ ist}),\\
&= 0 \quad (\text{wenn } k \text{ nicht} \equiv 0 \pmod m \text{ ist}).
\end{aligned}$$

Dies folgt unmittelbar daraus, dass für die elementaren symmetrischen Functionen aus der Form der Gleichung (1) die Bestimmung

$$S(\omega_0) = 0, \quad S(\omega_0\omega_1) = 0, \quad \cdots S(\omega_0\omega_1\cdots\omega_{m-2}) = 0,$$
$$\omega_0\omega_1\omega_2\cdots\omega_{m-1} = 1$$

hervorgeht (vgl. § 94).

§ 295. Ist ω eine m^{te} Einheitswurzel, dann ist auch jede positive ganzzahlige Potenz ω^t eine solche. Denn es ist ja

$$(\omega^t)^m = (\omega^m)^t = 1.$$

Derselbe Satz gilt auch für negative ganzzahlige Potenzen, wobei

$$\omega^{-t} = \frac{1}{\omega^t} \quad \text{oder auch} \quad \omega^{-t} = \omega^{xm-t}$$

zu definiren ist. —

In der Reihe, die wir uns beliebig weit erstreckt denken wollen,

(3) $$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \cdots \omega^t, \cdots$$

sind demnach alle Glieder m^{te} Einheitswurzeln; da es deren aber nur m verschiedene giebt, so müssen zwischen den Gliedern von (3) Gleichungen $\omega^\beta = \omega^\alpha$ $(\beta > \alpha)$ vorhanden sein. Daraus folgt $\omega^{\beta-\alpha} = 1$, d. h. es giebt auch Glieder der Reihe, die gleich 1 werden. Es sei $\omega^\varkappa$ das erste derartige Glied, dann sind alle ihm in (3) vorhergehenden Potenzen

$$1,\ \omega,\ \omega^2,\ \cdots\ \omega^{\varkappa-1} \tag{4}$$

von einander verschieden, weil aus $\omega^\beta = \omega^\alpha$ $(\varkappa > \beta > \alpha)$ wieder $\omega^{\beta-\alpha} = 1$ $(\beta - \alpha < \varkappa)$ folgen würde, was der gemachten Annahme widerspräche, dass erst $\omega^\varkappa = 1$ wird. Dieselben Werthe (4) in derselben Aufeinanderfolge wiederholen sich dann in (3) unaufhörlich, derart dass für jedes α

$$\omega^\alpha = \omega^{\varkappa+\alpha} = \omega^{2\varkappa+\alpha} = \cdots$$

ist, und dass dies auch die einzigen Glieder von (3) sind, welche den Werth ω^α annehmen; insbesondere sind die Potenzen

$$1,\ \omega^\varkappa,\ \omega^{2\varkappa},\ \omega^{3\varkappa},\ \cdots \tag{5}$$

die einzigen, welche den Werth 1 besitzen. Von diesem für ω charakteristischen Exponenten $\varkappa$ sagt man: Die m^{te} Einheitswurzel ω gehört zu $\varkappa$, oder ω gehört zum Exponenten $\varkappa$, sobald $\omega^\varkappa$ die niedrigste Potenz in (3) vom Werthe 1 ist.

Da nun $\omega^m = 1$ ist, so muss ω^m in der Reihe (5) vorkommen, d. h. jeder Exponent $\varkappa$, zu dem eine m^{te} Einheitswurzel gehört, muss ein Theiler von m sein. Es ist eine sehr wichtige Frage, ob umgekehrt zu jedem Theiler von m als Exponenten genommen auch eine m^{te} Einheitswurzel gehört. Diejenigen etwa vorhandenen m^{ten} Einheitswurzeln, welche zu m selbst gehören, heissen primitive m^{te} Einheitswurzeln, diejenigen hingegen, bei denen dies nicht der Fall ist, heissen nicht-primitive m^{te} Einheitswurzeln. Die Entscheidung der Frage, ob es primitive m^{te} Einheitswurzeln giebt, wird auch die Lösung der allgemeineren Frage herbeiführen, ob zu jedem Theiler d von m Wurzeln gehören.

§ 296. Wenn m eine Primzahl $= p$ ist, dann folgt die Antwort sofort aus dem Umstande, dass jeder Exponent, zu dem eine Wurzel gehören kann, ein Theiler von $m = p$ ist, also hier nur gleich 1 oder gleich p sein darf. Im ersten Falle wäre schon $\omega^1 = 1$, d. h. nur die Einheit befriedigt diese Forderung. Folglich sind alle von 1 verschiedenen p^{ten} Einheitswurzeln primitiv, und ihre Zahl ist $(p - 1)$.

Die Anzahl der für ein beliebiges m vorhandenen primitiven

Einheitswurzeln wird durch die zahlentheoretische Function $\varphi(m)$ bezeichnet. Es ist daher als erstes Resultat zu verzeichnen

$$\varphi(p) = p\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{6}$$

Auch für eine Primzahlpotenz $m = p^\mu$ lässt sich die Frage ohne irgend welche Schwierigkeit entscheiden. Jede nicht-primitive Wurzel ω gehört zu einem Theiler von $m = p^\mu$ und also zu einer Potenz p^α $(\alpha < \mu)$; folglich ist die $p^{\mu-1\text{te}}$ Potenz jeder nicht-primitiven Wurzel ω sicher bereits $= 1$, d. h. jede nicht-primitive Wurzel, und nur die nicht-primitiven m^{ten} Wurzeln sind schon Wurzeln von

$$z^{p^{\mu-1}} = 1.$$

Es giebt daher genau $p^{\mu-1}$ nicht-primitive $p^{\mu\text{te}}$ Einheitswurzeln, und die übrigen vorhandenen $(p^\mu - p^{\mu-1})$ Wurzeln sind deshalb primitive; es ist somit als zweites Resultat zu verzeichnen

$$\varphi(p^\mu) = p^\mu\left(1 - \frac{1}{p}\right). \tag{6a}$$

Wir können noch tiefer in die Natur dieser $p^{\mu\text{ten}}$ Einheitswurzeln eindringen. Es sei ω_1 eine beliebige unter den p Wurzeln der Gleichung

$$z^p = 1;$$

ω_2 eine beliebige unter den p Wurzeln der Gleichung

$$z^p = \omega_1,$$

u. s. w. und endlich ω_μ eine beliebige unter den p Wurzeln der Gleichung

$$z^p = \omega_{\mu-1};$$

dann ist das Product der so erhaltenen $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\mu$, nämlich

$$\varpi = \omega_1\omega_2\omega_3 \cdots \omega_{\mu-1}\omega_\mu, \tag{7}$$

eine $p^{\mu\text{te}}$ Einheitswurzel. Denn wir erhalten der Reihe nach die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varpi^p &= \omega_1^p\omega_2^p\omega_3^p \cdots \omega_{\mu-1}^p\omega_\mu^p &&= 1 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_{\mu-2} \cdot \omega_{\mu-1},\\
\varpi^{p^2} &= \omega_1^p\omega_2^p \quad \cdots \omega_{\mu-2}^p\omega_{\mu-1}^p &&= 1 \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \cdots \omega_{\mu-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varpi^{p^{\mu-1}} &= \omega_1, \qquad \varpi^{p^\mu} = 1.
\end{aligned}$$

Ferner sind alle diese p^μ Wurzeln, die bei verschiedener Wahl von $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\mu$ gebildet werden können, von einander verschieden. Denn es folgt aus der Annahme der Gleichheit $\varpi = \varpi'$, d. h.

$$\omega_1\omega_2 \cdots \omega_{\mu-1}\omega_\mu = \omega_1'\omega_2' \cdots \omega_{\mu-1}'\omega_\mu',$$

durch Potenzirung

$$\varpi^{p^{\mu-1}} = \varpi'^{p^{\mu-1}} = \omega_1 = \omega_1'$$
$$\varpi^{p^{\mu-2}} = \varpi'^{p^{\mu-2}} = \omega_1\omega_2 = \omega_1'\omega_2',$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und daraus ergiebt sich der Reihe nach $\omega_1 = \omega_1'$, $\omega_2 = \omega_2'$, $\cdots$. Man erhält somit auf diesem Wege durch die Formel (7) alle $p^{\mu\text{ten}}$ Einheitswurzeln und zwar jede ein einziges Mal.

Endlich fragen wir nach den nicht-primitiven Wurzeln unter (7). Für sie, und nur für sie, wird bereits die $p^{\mu-1\text{te}}$ Potenz $= 1$, also nach dem oben bei der Potenzirung gefundenen Resultate $\omega_1 = 1$; d. h. ϖ ist eine nicht-primitive oder eine primitive Wurzel, je nachdem in (7) $\omega_1 = 1$ oder von 1 verschieden angenommen wird. Die Herstellung einer primitiven Wurzel hängt daher ab von der Auffindung je einer Wurzel $\omega_1, \omega_2, \cdots \omega_\mu$ der Gleichungen

$$z^p = 1,\ z^p = \omega_1,\quad z^p = \omega_2,\quad \cdots\ z^p = \omega_{\mu-1},$$

wobei die Wurzel ω_1 der ersten Gleichung von 1 verschieden sein muss.

Als Beispiel wählen wir $p = 2$, $\mu = 3$. Dann ist $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = i$ und ω_3 als Wurzel von $z^2 = i$ zu wählen. Setzen wir, um diese Wurzel zu berechnen, $\omega_3 = p + qi$, so wird

$$\omega_3^2 = p^2 + 2pqi - q^2 = i,$$
$$p^2 - q^2 = 0, \qquad 2pq = 1.$$

Es reicht also aus, $p = q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ zu setzen, und man kann

$$\omega_3 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

wählen, um daraus dann nach der obigen Vorschrift

$$\varpi = \omega_1\omega_2\omega_3 = -1 \cdot i \cdot \frac{1+i}{\sqrt{2}} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$$

als primitive achte Einheitswurzel bestimmen.

§ 297. Wir gehen jetzt zu dem allgemeinen Falle über. Den beliebigen Exponenten m, der weder eine Primzahl noch eine Primzahlpotenz sein soll, zerlegen wir willkürlich in zwei zu einander theilerfremde Factoren $m = r \cdot s$ und verstehen dann unter α jede r^{te} und unter β jede s^{te} Einheitswurzel. Es wird jetzt das Product $\varpi = \alpha\beta$ eine m^{te} Einheitswurzel, denn es folgt durch Potenziren die Gleichung

$$\varpi^m = (\alpha^r)^s\,(\beta^s)^r = 1.$$

Ferner sind alle $m = r \cdot s$ so gebildeten ϖ von einander verschieden; denn aus der Annahme $\varpi = \varpi'$ oder

$$\alpha\beta = \alpha'\beta'$$

würde die Gleichung

$$\varpi^r = \varpi'^r = \alpha^r\beta^r = \beta^r = \alpha'^r\beta'^r = \beta'^r .$$

folgen. Da nun r und s relative Primzahlen sind, und es also zwei Zahlen ϱ, σ giebt, für welche $r\varrho + s\sigma = 1$ wird, so ergäbe sich weiter aus $\beta^r = \beta'^r$ durch Potenzirung mit dem Exponenten ϱ

$$\beta^{r\varrho} = \beta^{1-s\sigma} = \beta = \beta'^{r\varrho} = \beta'^{1-s\sigma} = \beta'$$

d. h.

$$\beta = \beta';$$

und auf entsprechendem Wege würde sich zeigen

$$\alpha = \alpha'.$$

Man erhält somit durch die Producte $\alpha\beta$ alle $m = r \cdot s$ Wurzeln.

Nun fragen wir nach den primitiven m^{ten} Wurzeln unter ihnen. Es möge α zum Exponenten ϱ und β zum Exponenten σ gehören; dann ist

$$\varpi^{\varrho\sigma} = (\alpha^\varrho)^\sigma\,(\beta^\sigma)^\varrho = 1.$$

Soll also ϖ primitiv sein, dann darf $\varrho\sigma$ kein Theiler von m, sondern muss gleich m, d. h. es muss $\varrho = r$ und $\sigma = s$ werden; soll ϖ dagegen nicht-primitiv sein, dann muss $\varrho\sigma$ ein Theiler von m, d. h. es darf nicht gleichzeitig $\varrho = r$ und $\sigma = s$ werden. Folglich sind die primitiven Wurzeln durch $\varrho = r$, $\sigma = s$ gekennzeichnet, d. h. dadurch, dass α eine primitive r^{te} und β eine primitive s^{te} Wurzel ist. Sobald nicht beides gleichzeitig eintritt, wird ϖ eine nicht-primitive m^{te} Einheitswurzel. Man hat daher für die Anzahl φ der primitiven $(rs)^{\text{ten}}$ Wurzeln die Gleichung die Bestimmung

$$\varphi(r \cdot s) = \varphi(r)\,\varphi(s), \tag{8}$$

wenn r und s theilerfremd zu einander sind.

Zerlegt man nun, was nur auf eine einzige Weise möglich ist, m in seine Primzahlpotenzfactoren

$$m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_\varkappa^{\mu_\varkappa}$$

und wendet (8) und (6^a) an, so entsteht das Theorem: Es giebt

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_\varkappa}\right) \tag{6^b}$$

primitive m^{te} Einheitswurzeln, wenn $p_1, p_2, \cdots$ die verschiedenen Primfactoren von m bedeuten.

§ 298. Der gegebene Ausdruck (6^b) für $\varphi(m)$ ist stets positiv und abgesehen von dem Specialfalle $m = 2$ stets gerade, sobald m eine positive Zahl > 1 ist. Für $m = 1$ wollen wir $\varphi(m) = 1$ setzen. Durch (6^b) ist also die Existenz primitiver Wurzeln in jedem Falle bewiesen, und durch die voraufgegangene Untersuchung sind die Mittel zu ihrer Berechnung gegeben.

Ist nun d ein Theiler von m, und fragt man nach den zum Exponenten d gehörigen m^{ten} Einheitswurzeln, so ist es klar, dass diese und nur sie durch sämmtliche primitiven Wurzeln der Gleichung

$$x^d = 1$$

geliefert werden; denn jede dieser Wurzeln giebt, in die d^{te} und erst in diese Potenz erhoben den Werth 1. Es gehören demnach zu jedem Exponenten d, welcher ein Theiler von m ist,

$$\varphi(d)$$

Einheitswurzeln.

Da jede m^{te} Wurzel entweder zum Exponenten m oder zu einem Theiler d von m als Exponenten gehört, und da genau m solcher m^{ten} Einheitswurzeln vorhanden sind, so folgt der zahlentheoretische Satz

$$\sum_{(d)} \varphi(d) = m, \tag{9}$$

wobei die Summe über alle Theiler d von m inclusive der beiden Grenzwerthe $d = 1$ und $d = m$ selbst zu erstrecken ist.

§ 299. Verstehen wir unter ω eine primitive m^{te} Einheitswurzel, dann liefert der Definition gemäss (§ 295) die Reihe

$$1, \omega, \omega^2, \cdots \omega^{m-2}, \omega^{m-1}$$

sämmtliche m^{ten} Einheitswurzeln. Wir fragen, ob die unter ihnen vorkommenden, zum Exponenten d gehörigen Einheitswurzeln etwa schon an ihren Potenzexponenten kenntlich sind. Es möge ω^α zum Exponenten d gehören; dann ist $\omega^{\alpha d}$ die niedrigste Potenz von ω, welche gleich 1 wird, d. h. αd ist das niedrigste Vielfache von α, welches zugleich ein Vielfaches von m wird. Sonach muss α mit m als grössten gemeinsamen Factor $\frac{m}{d}$ haben, d. h.: Damit ω^α zum Exponenten d gehöre, muss $\alpha = \varkappa \frac{m}{d}$ sein, wo $\varkappa$ relativ prim zu d ist. Insbesondere wird ω^α dann und nur dann eine primitive m^{te} Einheitswurzel, wenn α eine zu m theilerfremde Zahl bedeutet. Aus der Thatsache, dass es $\varphi(m)$ primitive m^{te} Einheitswurzeln giebt, folgt dann die gewöhnliche zahlentheoretische Definition des Symbols $\varphi(m)$ als Anzahl der zu m theilerfremden Zahlen, die kleiner als m sind.

§ 300. Wir wollen hier auch der goniometrischen Auflösungsmethode gedenken, von der wir im Vorhergehenden schon bisweilen Gebrauch gemacht haben. Setzen wir, wie in der ersten Vorlesung

$$z = \varrho \left[{}^{c}_{s} \varphi \right] \tag{10}$$

so wird

$$z^m = \varrho^m \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix} m\varphi\right] = 1,$$

$$\varrho^m \cos m\varphi = 1, \quad \varrho^m \sin m\varphi = 0,$$

also $\varrho = 1$ und $m\varphi$ ein Vielfaches von 2π. Demnach erhalten wir als Werthe unserer m^{ten} Einheitswurzeln sämmtliche Grössen

$$\varpi = \left[\begin{smallmatrix} c & \frac{2k\pi}{m} \\ s & \end{smallmatrix}\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots).$$

Bedenkt man jedoch, dass weder der Cosinus noch der Sinus bei Vermehrung des Arguments um $\pm 2\pi$ sich ändern, so folgt für die m vorhandenen m^{ten} Einheitswurzeln die Formel

$$\varpi_k = \left[\begin{smallmatrix} c & \frac{2k\pi}{m} \\ s & \end{smallmatrix}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots m-1). \tag{11}$$

Hierbei ist ϖ_k eine primitive Wurzel, wenn k eine relative Primzahl zu m ist; und allgemein gehört ϖ_k zum Exponenten d, wenn $(m:d)$ der grösste gemeinsame Theiler von k und m ist. Natürlich darf man k in (11) irgend welche m aufeinander folgenden Zahlen durchlaufen lassen.

§ 301. Wir können hier auch gleich die Gleichung

$$z^m + 1 = 0 \tag{12}$$

behandeln. Alle ihre Wurzeln sind, wie die Zerlegung

$$z^{2m} - 1 = (z^m + 1)(z^m - 1) = 0$$

zeigt, $(2m)^{\text{te}}$ Einheitswurzeln, und zwar diejenigen, welche nicht schon zum Exponenten m oder zu Theilern von m als Exponenten gehören, weil für diese ja schon $z^m = 1$ werden würde. Man erkennt, dass wenn 2^α die höchste in m aufgehende Potenz von 2 ist, diejenigen $(2m)^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln auch Wurzeln von (12) werden, welche zu Exponenten gehören, die durch $2^{\alpha+1}$ theilbar sind.

Setzt man wieder (10) an, so folgt jetzt

$$\varrho^m \cos m\varphi = -1, \quad \varrho^m \sin m\varphi = 0;$$

folglich wird $\varrho = 1$, $m\varphi$ ein ungerades Vielfaches von π, und

$$\varpi = \left[\begin{smallmatrix} c & \frac{(2k+1)\pi}{m} \\ s & \end{smallmatrix}\right] \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots);$$

nach gleichen Schlüssen wie vorher erhalten wir die definitive Formel

$$\varpi = \left[\begin{smallmatrix} c & \frac{(2k+1)\pi}{m} \\ s & \end{smallmatrix}\right] \qquad (k = 0, 1, 2, \cdots m). \tag{13}$$

Ebensogut hätten wir auch $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{m-2}{2}, + \frac{m}{2}$ bei geradem m nehmen können, u. s. w.

§ 302. Aus den angestellten Betrachtungen konnten wir ersehen, dass die primitiven Wurzeln für $m = p$ durch die Gleichung

$$(14^a) \qquad \frac{z^p-1}{z-1} = z^{p-1} + z^{p-2} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$$

geliefert werden, und für $m = p^\mu$ durch die Gleichung

$$(14^b) \qquad \frac{z^{p^\mu}-1}{z^{p^{\mu-1}}-1} = z^{p^{\mu-1}(p-1)} + z^{p^{\mu-1}(p-2)} + \cdots + z^{p^{\mu-1}} + 1 = 0.$$

Im allgemeinen Falle $m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_\varkappa^{\mu_\varkappa}$ ist

$$(14) \qquad F_m(z) = \frac{(z^m-1)\,\Pi\left(z^{\frac{m}{p_1 p_2}}-1\right)\cdots}{\Pi\left(z^{\frac{m}{p_1}}-1\right)\Pi\left(z^{\frac{m}{p_1 p_2 p_3}}-1\right)\cdots} = 0$$

die Gleichung, welche alle und nur die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln, jede in der ersten Potenz liefert; die Productzeichen beziehen sich auf alle Permutationen der $p_1, p_2, \cdots p_\varkappa$, so dass z. B. der zweite Factor des Zählers die $\frac{1}{2}\varkappa(\varkappa-1)$ Factoren

$$\left(z^{\frac{m}{p_1 p_2}}-1\right)\left(z^{\frac{m}{p_1 p_3}}-1\right)\left(z^{\frac{m}{p_2 p_3}}-1\right)\cdots\left(z^{\frac{m}{p_{\varkappa-1} p_\varkappa}}-1\right)$$

enthält. Durch Induction kommt man leicht zu der angegebenen Form; den Beweis führen wir folgendermassen. Es sei ω eine m^{te} Einheitswurzel, die zum Exponenten

$$\mu = \frac{m}{p_1^{\alpha_1}\cdots p_\delta^{\alpha_\delta}} \qquad (\delta \leqq \varkappa)$$

gehört, dann wird nicht nur $\omega^\mu = 1$ sondern auch jede Potenz von ω, deren Exponent ein Vielfaches von μ ist und nur solche; insbesondere gilt das für die Exponenten

$$m;\ \frac{m}{p_1}, \frac{m}{p_2}, \cdots \frac{m}{p_\delta};\ \frac{m}{p_1 p_2}, \cdots \frac{m}{p_{\delta-1} p_\delta};\ \frac{m}{p_1 p_2 p_3}, \cdots; \cdots,$$

bei denen in die Nenner alle und nur die ersten Potenzen der Primfactoren $p_1, \cdots p_\delta$ gesetzt sind. Es tritt daher der Wurzelfactor $(z-\omega)$ bei (14) nur in jedem der Polynome

$$z^m - 1;\ z^{\frac{m}{p_1}} - 1, \cdots z^{\frac{m}{p_\delta}} - 1;\ z^{\frac{m}{p_1 p_2}} - 1, \cdots z^{\frac{m}{p_{\delta-1} p_\delta}} - 1; \cdots$$

auf und (§ 294) jedesmal nur einfach; folglich enthält (14) diesen Factor, wenn man sein gesammtes Eingehen in den Zähler und in den Nenner beachtet und die zugehörige Multiplicität im ersten Falle positiv, im zweiten dagegen negativ in Anrechnung bringt,

$$(14^c) \qquad 1 - \binom{\delta}{1} + \binom{\delta}{2} - \binom{\delta}{3} + \cdots \pm \binom{\delta}{\delta} = (1-1)^\delta = 0$$

mal; $(z-\omega)$ tritt daher gar nicht auf, sondern hebt sich in (14) einfach weg. Nur wenn $\mu = m$, d. h. ω eine primitive Wurzel ist, dann wird dieser Schluss ungültig, und δ gewissermassen $= 0$; dann er-

scheint der Factor $(z - \omega)$ einmal im ersten Factor des Zählers. Somit ist $F_m(z)$ eine ganze Function, und die Gleichung $F_m(z) = 0$ liefert nur die primitiven Wurzeln und zwar jede ein einziges Mal. Gleichzeitig erkennt man, was übrigens auch unmittelbar aus (6ᵇ) hervorgeht, dass

$$\varphi(m) = m - \sum \frac{m}{p_1} + \sum \frac{m}{p_1 p_2} - \sum \frac{m}{p_1 p_2 p_3} + \cdots$$

ist.

$F_m(z) = 0$ ist reciprok, da mit ω zugleich auch $\omega^{-1} = \omega^{m-1}$ eine primitive Wurzel ist, und also neben $(z - \omega)$ auch $\left(z - \frac{1}{\omega}\right)$ als Factor in $F_m(z)$ auftritt.

Setzt man in (14ᶜ) $\varkappa$ für δ ein, wo $\varkappa$ die Anzahl der Primfactoren $p_1, p_2, \cdots$ von m angiebt, dann ist die Summe der positiven Glieder gleich der Anzahl der Factoren des Zählers, die der negativen gleich der Anzahl der Factoren des Nenners, und aus (14ᶜ) folgt also, dass Zähler und Nenner von (14) gleich viele Factoren besitzen.

§ 303. Setzen wir insbesondere $m = p \cdot q$, wobei p und q zwei von einander verschiedene Primzahlen sind, dann wird unsere Function

$$F_{pq}(z) = \frac{z^{pq} - 1}{z^p - 1} \cdot \frac{z - 1}{z^q - 1}$$

$$(15) \qquad = (1 + z^p + z^{2p} + \cdots + z^{(q-1)p})(1 - z + z^q - z^{q+1} + \cdots)$$

$$= \sum z^{\alpha p + \beta q} - \sum z^{\alpha p + \beta q + 1} \qquad (0 \leqq \alpha \leqq q - 1;\ 0 \leqq \beta).$$

Lässt sich also die ganze positive Zahl k auf $\varkappa_1$ Arten in der Form $(\alpha p + \beta q)$ und auf $\varkappa_2$ Arten in der Form $(\alpha p + \beta q + 1)$ darstellen, dann tritt in $F_{pq}(z)$ das Glied $(\varkappa_1 - \varkappa_2) z^k$ auf. Wir fragen jetzt, ob $\varkappa_1$ oder $\varkappa_2$ grösser als 1, mit anderen Worten, ob bei verschiedenen α und β

$$\alpha p + \beta q = \alpha_1 p + \beta_1 q, \qquad (0 \leqq \alpha, \alpha_1 \leqq q - 1;\ 0 \leqq \beta, \beta_1)$$

$$(\alpha - \alpha_1) p = (\beta_1 - \beta) q$$

sein kann. Da $|\alpha - \alpha_1| < (q - 1)$ ist, und da p und q relativ prim sind, so muss $\alpha = \alpha_1$, $\beta = \beta_1$ sein, d. h. $\varkappa_1$ sowie $\varkappa_2$ ist gleich 0 oder 1. Daraus ergiebt sich, dass die Glieder, welche in $F_{pq}(z)$ vorkommen, nur die positive oder die negative Einheit als Coefficienten haben können, sobald p und q von einander verschiedene Primzahlen sind.

Die obere Grenze für die Summation nach α in (15) lässt sich noch einschränken. Sind nämlich σ und τ die kleinsten positiven Zahlen, welche die unbestimmte Gleichung

$$\sigma p - \tau q = 1$$

erfüllen, dann erkennt man, dass die Forderung

$$\alpha p + \beta q = \alpha_1 p + \beta_1 q + 1 \quad \text{oder} \quad (\alpha - \alpha_1) p + (\beta - \beta_1) q = 1$$

durch passende α_1, β, β_1 stets erfüllt werden kann, sobald $\alpha \geqq \sigma$ ist; dann wird für $\varepsilon^{\alpha p + \beta q}$ stets $\varkappa_1 = \varkappa_2$ werden, und das zugehörige Glied muss verschwinden. Man braucht demnach in (15) den Werth von α nur die Zahlenreihe von 0 bis $(\sigma - 1)$ durchlaufen zu lassen. —

Der beachtenswerthe Umstand, dass F_m für $m = p \cdot q$ nur die Werthe 0, $+1$, -1 als Coefficienten der Potenzen von ε besitzt, kommt bei $m = p \cdot q \cdot r$ in Wegfall. Hier treten z. B., wie man aus den Reuschle'schen Tafeln complexer Primzahlen entnehmen kann, in $F_{105}(\varepsilon)$ die Glieder $-2\varepsilon^{41}$ und $-2\varepsilon^{7}$ auf.

§ 304. Es sollen in den folgenden Paragraphen noch einige Eigenschaften der Gleichung $F_m(\varepsilon) = 0$, welche die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln zu Wurzeln hat, abgeleitet werden. Wir setzen m in seine Primfactoren aufgelöst

$$m = p^{\mu} p_2^{\mu_2} \cdots p_{\varkappa}^{\mu_\varkappa} \qquad (p + p_2 + \cdots + p_\varkappa)$$

und können, wie gezeigt worden ist (§ 279), jede primitive m^{te} Einheitswurzel $\bar{\omega}$ in die Gestalt eines Productes

$$\bar{\omega} = \omega \omega_\tau$$

bringen, wobei ω die Reihe aller $(p^{\mu})^{\text{ten}}$ und ω_τ die Reihe aller $(p_2^{\mu_2} \cdots p_{\varkappa}^{\mu_\varkappa})^{\text{ten}}$ primitiven Einheitswurzeln durchläuft. Die Gleichung mit den Wurzeln $\bar{\omega}$ können wir demnach gemäss § 122 aus den beiden Gleichungen ableiten, durch welche ω und ω_τ geliefert werden; und zwar wird sie nach jenem Paragraphen wegen (14^b) die Form

$$\prod_{\tau} \left[\varepsilon^{p^{\mu-1}(p-1)} + \omega_\tau^{p^{\mu-1}} \varepsilon^{p^{\mu-1}(p-2)} + \cdots + \omega_\tau^{p^{\mu-1}(p-1)} \right] = 0$$

annehmen. Dies zeigt sofort, dass das Gleichungspolynom nur solche Potenzen von ε enthält, deren Exponent durch $p^{\mu-1}$ theilbar ist. Was von dem Primfactor p galt, das gilt von jedem anderen auch; also folgt: Die Gleichung, welche die primitiven $(p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots p_{\varkappa}^{\mu_\varkappa})^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln liefert, enthält in ihrem Polynome nur solche Potenzen der Unbekannten, deren Exponent durch $(p_1^{\mu_1 - 1} p_2^{\mu_2 - 1} \cdots p_{\varkappa}^{\mu_\varkappa - 1})$ theilbar ist; (vgl. (17)).

Daraus lässt sich ein weiterer Schluss ziehen. Es folgt aus dem Bewiesenen unmittelbar, dass von den elementaren, symmetrischen Functionen der m^{ten} primitiven Einheitswurzeln

$$S(\bar{\omega}_1), \quad S(\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2), \quad S(\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3), \quad \cdots$$

nur diejenigen nicht verschwinden, bei denen die Anzahl der eintretenden Factoren $\bar{\omega}$ ein Vielfaches von $(p_1^{\mu_1 - 1} p_2^{\mu_2 - 2} \cdots p_{\varkappa}^{\mu_\varkappa - 1})$ wird.

Diese Zahl wollen wir für den Augenblick mit q bezeichnen. Dann erkennt man durch die Recursionsformeln (§ 91)

$$s_\alpha = c_1 s_{\alpha-1} - c_2 s_{\alpha-2} + \cdots \pm \alpha c_\alpha \qquad (\alpha \leqq \varphi(m)),$$

$$s_\alpha = c_1 s_{\alpha-1} - c_2 s_{\alpha-2} + \cdots \pm c_\mu s_{\alpha-\mu} \qquad (\alpha \geqq \mu;\ \mu = \varphi(m)),$$

dass auch alle Potenzsummen der primitiven Wurzeln verschwinden, deren Index nicht durch q theilbar ist, weil nach den aufgeschriebenen Formeln zunächst $s_1, s_2, \cdots s_{q-1}$ verschwinden, und von den weiteren s_i nur diejenigen von Null verschieden sein können, bei denen ein früheres nicht verschwindendes s mit einem der nicht verschwindenden Coefficienten multiplicirt vorkommt. Dadurch erkennen wir: Jede Potenzsumme der primitiven Wurzeln verschwindet, bei welcher der Index nicht durch $(p_1^{\mu_1-1} p_2^{\mu_2-1} \cdots p_\varkappa^{\mu_\varkappa-1})$ theilbar ist.

§ 305. Wir wollen die numerischen Werthe von $F_m(1)$ und von $F_m(-1)$ berechnen.

Ist m gleich einer Primzahl p oder einer Primzahlpotenz p^μ, dann zeigen (14ª) und (14ᵇ) ohne Weiteres

$$F_p(1) = F_{p^\mu}(1) = p. \tag{16}$$

Enthält dagegen m mehrere verschiedene Primfactoren, so folgt zunächst aus (14) die Formel

$$F_{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}} \ldots (\varepsilon) = F_{p_1 p_2} \ldots (\varepsilon^{p_1^{\mu_1-1} p_2^{\mu_2-1}} \ldots), \tag{17}$$

und deshalb ergiebt sich für $\varepsilon = 1$ zuerst

$$F_{p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2}} \ldots (1) = F_{p_1 p_2} \ldots (1).$$

Ebenso zeigt (14) noch

$$F_{p_1 p_2 p_3} \ldots (z) = \frac{F_{p_2 p_3} \ldots (z^{p_1})}{F_{p_2 p_3} \ldots (z)}, \tag{17ª}$$

und deshalb wird

$$F_{p_1 p_2 p_3} \ldots (1) = 1.$$

Man hat also, wenn m verschiedene Primfactoren besitzt, stets

$$F_m(1) = 1. \tag{16ª}$$

Um $F_m(-1)$ zu bestimmen, betrachten wir die drei Fälle, dass entweder m ungerade ist, oder zweitens dass es den Factor 2 nur in der ersten Potenz, oder dass es endlich diesen Factor in einer höheren als der ersten Potenz enthält.

Im ersten Falle erkennt man aus (14ª), (14ᵇ), (17), (17ª), dass

$$F_m(-1) = 1 \qquad (m \text{ ungerade}) \tag{18}$$

wird. Im zweiten Falle benutzen wir die aus (14) folgende Gleichung

$$F_{2m}(\varepsilon) = \frac{F_m(z^2)}{F_m(z)} \qquad (m \text{ ungerade}) \tag{17ᵇ}$$

und ersehen daraus, dass infolge der früheren Resultate

(18ª) $F_{2p^\mu}(-1) = p$ und $F_{2m}(-1) = 1 \qquad (m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots)$

wird. Im dritten Falle folgt wegen $F_{2^\mu}(z) = z^{2^{\mu-1}} + 1$, dass

$$F_{2^\mu}(-1) = 2 \qquad (\mu > 1)$$

wird; und da bei $F_{2^\mu \cdot m}(z)$ offenbar nur gerade Potenzen von z vorkommen, so ergiebt sich endlich, dass das Resultat hier das gleiche ist, ob man $+1$ oder -1 einträgt, so dass man schliesslich

(18ᵇ) $F_{2^\mu m}(-1) = 1 \qquad (\mu > 1,\ m \text{ ungerade})$

erhält.

§ 306. Wir haben hier noch zwei an die Gleichungen (17) und (17ª) sich anschliessende andere Formeln abzuleiten. Ist q eine nicht in m enthaltene Primzahl, dann kann man bei der Berechnung von $F_{q^\alpha m}(z)$ nach (14) zuerst alle Factoren zusammenfassen, bei welchen in den Exponenten q^α als Factor eingeht, und dann die übrigen, in deren Exponenten nur $q^{\alpha-1}$ vorkommt. Man erkennt hierbei sofort die Richtigkeit der Gleichung

$$F_{q^\alpha m}(z) = \frac{F_m(z^{q^\alpha})}{F_m(z^{q^{\alpha-1}})}. \tag{18}$$

Mit Hilfe von (18) leitet man dann leicht, wenn $m = p_1^{\mu_1} p_2^{\mu_2} \cdots$ ist,

$$F_m(z) = \frac{F_{p_1}\left(z^{\frac{m}{p_1}}\right)}{F_{p_1}\left(z^{\frac{m}{p_1 p_2}}\right) F_{p_1 p_2}\left(z^{\frac{m}{p_1 p_2 p_3}}\right) F_{p_1 p_2 p_3}\left(z^{\frac{m}{p_1 \cdots p_4}}\right) \cdots} \tag{19}$$

her. Ist diese Formel nämlich für eine gewisse Anzahl von Primfactoren richtig, dann zeigt (18) unter Berücksichtigung von (17), dass sie auch noch gilt, wenn m einen Primfactor mehr annimmt; und für $m = p_1^{\mu_1}$ erkennt man wieder aus (17) die Richtigkeit. So ergiebt sich also (19) durch strenge Induction.

§ 307. Wir wollen am Schlusse noch folgendes von Kronecker aufgestellte Theorem*) beweisen: Wenn eine algebraische Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten, deren erster gleich 1 ist, nur Wurzeln vom Modul 1 besitzt, dann sind es Einheitswurzeln.

Die Gleichung möge $f_1(z) = 0$ mit den n Wurzeln $z_1, z_2, \cdots z_n$ sein. Dann bilden wir nach der früher besprochenen Methode die Gleichungen

*) J. für M. 53; S. 173: Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten.

$$\begin{aligned} f_1(z) &= 0 \text{ mit den Wurzeln } z_1, z_2, \cdots z_n, \\ f_2(z) &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad z_1^2, z_2^2, \cdots z_n^2, \\ f_3(z) &= 0 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad z_1^3, z_2^3, \cdots z_n^3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

In allen diesen Gleichungen sind die Coefficienten ebenfalls ganzzahlig, der erste derselben ist in allen gleich 1, und alle Wurzeln haben gleichfalls den Modul 1. Daraus folgt, dass die Coefficienten sämmtlich endliche obere Grenzen besitzen; denn es ist

$$\begin{aligned} &| z_1^x + z_2^x + \cdots + z_n^x | \leq n, \\ &| z_1^x z_2^x + z_1^x z_3^x + z_2^x z_3^x + \cdots | \leq \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \\ &| z_1^x z_2^x z_3^x + z_1^x z_2^x z_4^x + \cdots | \leq \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Es giebt aber nur eine endliche Anzahl von Systemen ganzer Zahlen $c_1^{(x)}, c_2^{(x)}, \cdots$, welche diesen Bedingungen genügen; diese allein können Coefficientensysteme werden; somit müssen in der beliebig weit fortsetzbaren Reihe, die wir gebildet haben,

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \cdots \quad f_x(z), \quad \cdots$$

beliebig viele Functionen mit einander übereinstimmen, so dass etwa

$$f_\alpha(z) = f_\beta(z) = f_\gamma(z) = \cdots .$$

wird. Es müssen demnach die Complexe der Wurzeln, welche zu $f_\alpha = 0$, $f_\beta = 0$, $\cdots$ gehören,

$$z_1^\alpha, z_2^\alpha, \cdots; \quad z_1^\beta, z_2^\beta, \cdots; \quad z_1^\gamma, z_2^\gamma, \cdots; \quad \cdots$$

identisch sein. Dabei braucht freilich zunächst nicht $z_1^\alpha = z_1^\beta$, $z_2^\alpha = z_2^\beta$, $\cdots$ zu werden; weil aber unendlich viele Complexe vorliegen, so muss auch einmal eine Uebereinstimmung in der Wurzelzuordnung vorhanden sein, und es muss

$$z_1^\delta = z_1^\varepsilon, \quad z_2^\delta = z_2^\varepsilon, \quad \cdots \quad z_n^\delta = z_n^\varepsilon$$

werden. Hieraus folgt dann sofort

$$z_1^{\varepsilon-\delta} = 1, \quad z_2^{\varepsilon-\delta} = 1, \quad \cdots \quad z_n^{\varepsilon-\delta} = 1;$$

dadurch ist also bewiesen, dass sämmtliche z_λ Einheitswurzeln des Grades $(\varepsilon - \delta)$ sind, wie behauptet worden war.

Achtundzwanzigste Vorlesung.

Kreistheilungsgleichung. Methode von Gauss.

§ 308. Die algebraische Behandlung des Problems, einen gegebenen Winkel α in eine vorgeschriebene Anzahl n von gleichen Theilen zu theilen, hängt von der Lösung einer Gleichung n^{ten} Grades ab, die in mannigfachen Formen aufgeschrieben werden kann. So ist, wenn man $\cos\frac{\alpha}{n} = c$ setzt, für ein ungerades n

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cos\alpha = nc - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}c^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}c^5 - \cdots$$

und für ein gerades n

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \cos\alpha = 1 - \frac{n^2}{2!}c^2 + \frac{n^2(n^2-2^2)}{4!}c^4 - \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{6!}c^6 + \cdots$$

bei bekanntem α und unbekanntem c zu lösen; wenn man ferner $\sin\frac{\alpha}{n} = s$ setzt, für ein ungerades n

$$\sin\alpha = \frac{n}{1!}s - \frac{n(n^2-1^2)}{3!}s^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{5!}s^5 - \cdots$$

und für ein gerades n

$$\sin\alpha = \sqrt{1-s^2}\left(\frac{n}{1!}s - \frac{n(n^2-2^2)}{3!}s^3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{5!}s^5 - \cdots\right);$$

endlich, wenn man $\operatorname{tang}\frac{\alpha}{n} = t$ bezeichnet, dann ist die Gleichung

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{\binom{n}{1}t - \binom{n}{3}t^3 + \binom{n}{5}t^5 - \cdots}{1 - \binom{n}{2}t^2 + \binom{n}{4}t^4 - \binom{n}{6}t^6 + \cdots}$$

für t aufzulösen. Am bequemsten aber gestaltet sich die Gleichung, von welcher die Theilung abhängt, wenn man als Unbekannte die Grösse

$$\left[\begin{smallmatrix} c & \alpha \\ s & n \end{smallmatrix}\right] = z$$

einsetzt; denn diese wird dann durch die einfache reine Gleichung bestimmt

$$z^n = \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\ \alpha\right]. \tag{1}$$

Handelt es sich insbesondere um die Theilung der ganzen Peripherie, d. h. um die Kreistheilung, so wird $\alpha = 2\pi$ und daher

$$\cos\alpha = 1, \quad \sin\alpha = 0, \quad \operatorname{tang}\alpha = 0, \quad \left[\begin{smallmatrix} c \\ s \end{smallmatrix}\ \alpha\right] = 1$$

zu setzen sein; die Gleichung (1) geht dabei in die Form

$$z^n - 1 = 0 \tag{2}$$

über, d. h. in diejenige Gleichung, deren Wurzeln wir in der vorigen Vorlesung bereits genauer untersucht haben. Wir haben dort gesehen, dass die Kenntniss einer einzigen primitiven Wurzel ω von (2) genügt, um alle Wurzeln von (2) zu bestimmen, da man ja mit ihrer Hülfe nur die Reihe

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots\ \omega^{n-1},\ \omega^n$$

zu bilden braucht. Wir sahen ferner, dass alle primitiven Wurzeln von (2) die Wurzeln einer gewissen Gleichung $F_n(z) = 0$ vom Grade $\varphi(n)$ sind, welche auf rationalem Wege aus (1) abgeleitet werden kann. Von dieser Gleichung hängt also im Wesentlichen das Problem der Kreistheilung ab; deshalb nennen wir $F_n(z) = 0$ die Kreistheilungsgleichung.

§ 309. Wir gehen zum Nachweise der Irreductibilität der Kreistheilungsgleichung über. Für den Fall, dass n eine Primzahl oder eine Primzahlpotenz ist, kann man, wie Eisenstein*) es gethan hat, die Irreductibilität von $F_n(z)$ aus der blossen Form des Polynoms leicht nachweisen.

Wir haben in § 52 gezeigt, dass ein Polynom unzerlegbar ist, wenn der Coefficient der höchsten Potenz der Variablen gleich 1, jeder der folgenden Coefficienten durch p theilbar, und der letzte zugleich durch keine höhere Potenz von p als die erste theilbar ist. Nun haben wir die folgende Function bei $n = p$ als Kreistheilungspolynom

$$F_p(z) = \frac{z^p - 1}{z - 1},$$

und daraus geht durch die Substitution $z = x + 1$ die Gestalt

$$F_p(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1) - 1} = x^{p-1} + \binom{p}{1} x^{p-2} + \binom{p}{2} x^{p-3} + \cdots + \binom{p}{2} x + p$$

hervor. Somit ist nach dem angeführten Hülfssatze $F_p(x+1)$ und deswegen auch $F_p(z)$ unzerlegbar.

Ferner ist für $n = p^\nu$

$$F_{p^\nu}(z) = \frac{z^{p^\nu} - 1}{z^{p^{\nu-1}} - 1} = z^{p^{\nu-1}(p-1)} + z^{p^{\nu-1}(p-2)} + \cdots + z^{p^{\nu-1}} + 1; \tag{3}$$

auch hier setzen wir $z = x + 1$ und erhalten durch fortgesetzte Potenzirungen der Reihe nach die Gleichungen

*) Ueber die Irreductibilität u. s. w. der Lemniscatengleichung. J. für M. 59. S. 160.

$$z^p = x^p + 1 + p\chi_1(x), \quad z^{p^2} = x^{p^2} + 1 + p\chi_2(x),$$
$$z^{p^3} = x^{p^3} + 1 + p\chi_3(x), \cdots$$

wobei $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \cdots$ ganze, ganzzahlige Functionen bezeichnen. Trägt man diese Werthe in (3) ein, dann zeigt die rechte Seite, dass eine ganze Function von x herauskommt, und der mittlere Ausdruck

$$\frac{z^{p^\nu} - 1}{z^{p^{\nu-1}} - 1} = \frac{x^{p^\nu} + p\chi(x)}{x^{p^{\nu-1}} + p\psi(x)} = x^{p^{\nu-1}(p-1)} + p\chi_0(x),$$

dass alle Coefficienten mit Ausnahme des ersten durch p theilbar sind. Die rechte Seite von (3) endlich liefert für das von x freie Glied $F_{p^\nu}(1) = p$. Folglich ist auch hier der Hülfssatz anwendbar; damit ist die Irreductibilität von $F_{p^\nu}(x+1)$ und also auch diejenige von $F_{p^\nu}(z)$ bewiesen.

§ 310. Gauss fand den ersten Beweis für die Unzerlegbarkeit von $F_p(z)$; er gründete ihn auf Eigenschaften der Einheitswurzeln*). Sehr einfache Beweise für den Fall $n = p^\nu$ stammen von Kronecker**). Wir wollen den einen hier vortragen.

Ist F_{p^ν} in zwei ganze, ganzzahlige Factoren zerlegbar (vgl. § 48)

$$F_{p^\nu}(z) = \chi(z)\psi(z),$$

dann ergiebt sich für $z = 1$ aus (3) die Relation

$$\chi(1)\psi(1) = p,$$

und deshalb können wir einen der Factoren $\chi(1)$ oder $\psi(1)$ gleich ± 1, den anderen gleich $\mp p$, also etwa

$$\chi(1) = \pm 1, \quad \psi(1) = \mp p$$

setzen. Da sich nun die Wurzeln von (3) auf die beiden Gleichungen $\chi(z) = 0$, $\psi(z) = 0$ vertheilen, so sei ϖ eine derjenigen, welche die erste dieser beiden Gleichungen befriedigen. Welche primitive $(p^\nu)^{\text{te}}$ Einheitswurzel wir dann auch unter ω verstehen, die Reihe der Potenzen

$$\omega^1, \ \omega^\alpha, \ \omega^\beta, \cdots \omega^\gamma, \tag{4}$$

in welcher $1, \alpha, \beta, \cdots \gamma$ sämmtliche zu p theilerfremde Zahlen der Reihe $1, 2, 3, \cdots p^\nu$ bezeichnen sollen, enthält unter ihren Gliedern immer ϖ, da ja (4) alle primitiven Einheitswurzeln von $F_{p^\nu}(z) = 0$ giebt. Folglich ist jedenfalls

$$\chi(\omega)\chi(\omega^\alpha)\chi(\omega^\beta)\cdots\chi(\omega^\gamma) = 0, \tag{5}$$

welche Wurzel von (3) auch unter ω verstanden wird. Da diese Wurzeln alle untereinander verschieden sind, so ist der Ausdruck

*) Werke Bd. I. S. 417.

**) J. für M. 29; S. 280 und J. de M. (2); 1.

(6) $$\chi(z)\chi(z^\alpha)\chi(z^\beta)\cdots\chi(z^\gamma)$$

für jede Wurzel der Gleichung $F_{p^\nu}(z) = 0$ gleich Null; (6) ist demnach durch $F_{p^\nu}(z)$ theilbar, d. h. es gilt die Gleichung

$$\chi(z)\chi(z^\alpha)\chi(z^\beta)\cdots\chi(z^\gamma) = \varrho(z)\cdot F_{p^\nu}(z),$$

in der $\varrho(z)$ eine ganze, ganzzahlige Function bedeutet. Setzen wir in dieser letzten Gleichung $z = 1$ und bedenken, dass die Anzahl der primitiven Wurzeln (4) gleich $p^{\nu-1}(p-1)$ ist, so folgt daraus

$$\chi(1)^{p^{\nu-1}(p-1)} = \varrho(1)\cdot p;$$

das birgt aber einen Widerspruch in sich, weil die linke Seite der Gleichung den Werth $+1$ hat. Demnach ist F_{p^ν} unzerlegbar.

§ 311. Der Beweis der Irreductibilität für den allgemeinen Fall wird am besten durch strenge Induction gegeben. So ist er in einfacher Weise z. B. von Arndt*) und im Anschlusse an dessen Beweis von Lebesgue**) geliefert worden. Wir folgen dem Beweise Arndt's.

Um eine Unterbrechung des Gedankenganges zu vermeiden, schicken wir einen Hülfssatz voraus. Ist eine ganze, ganzzahlige Function

$$f(z) = \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1} z + \alpha_n$$

vorgelegt, und bedeutet p eine Primzahl, dann gilt die Congruenz

$$f(z)^p \equiv f(z^p) \pmod{p}.$$

In der That erhält man durch Potenziren zuerst

$$f(z)^p = \alpha_0^p z^{pn} + \alpha_1^p z^{p(n-1)} + \cdots + \alpha_{n-1}^p z^p + \alpha_n^p + pg(z),$$

wobei $g(z)$ eine ganze, ganzzahlige Function bedeutet. Weiter ist nach dem bekannten Fermat'schen Satze der Zahlentheorie

$$\alpha_0^p = \alpha_0 + pA_0, \quad \alpha_1^p = \alpha_1 + pA_1, \quad \cdots \quad \alpha_n^p = \alpha_n + pA_n,$$

wenn unter $A_0, A_1, \cdots A_n$ passende ganze Zahlen verstanden werden; trägt man dies in die vorhergehende Gleichung ein, dann erhält man das oben ausgesprochene Resultat. — Natürlich folgt daraus auch durch Wiederholung desselben Satzes die Congruenz

$$f(z)^{p^\alpha} \equiv f(z^{p^\alpha}) \pmod{p}. \quad —$$

Nun sei für jede Zahl m, welche nicht mehr als k verschiedene Primfactoren enthält, die Irreductibilität von $F_m(z)$ bereits festgestellt; sie soll jetzt für $F_n(z) = F_{p^\alpha m}(z)$ bewiesen werden, wo die Primzahl p

*) J. für M. Bd. 56; S. 178: Einfacher Beweis für die Irreductibilität einer Gleichung in der Kreistheilung.

**) J. de M. (2) Bd. 4: Démonstration de l'irréductibilité de l'équation aux racines primitives de l'unité.

zu m theilerfremd ist, und m also $(k+1)$ von einander verschiedene Primfactoren enthält.

Gesetzt es wäre F_n zerlegbar, so dass wir etwa setzen können

$$F_n(z) = \chi(z)\,\psi(z) \qquad (n = p^\alpha m),$$

dann bilden wir diejenigen beiden Gleichungen

$$X(z) = 0, \quad \Psi(z) = 0,$$

deren Wurzeln die $p^{\alpha\,\text{ten}}$ Potenzen der Wurzeln von

$$\chi(z) = 0, \quad \psi(z) = 0$$

sind. Da jede primitive n^{te} Einheitswurzel ϖ als Product aus je einer $p^{\alpha\,\text{ten}}$ primitiven Einheitswurzel ω_1 und einer m^{ten} primitiven Einheitswurzel ω_2 darstellbar ist, so besitzen $X = 0$ und $\Psi = 0$ nur Wurzeln von der Form $(\omega_1\omega_2)^{p^\alpha} = \omega_2^{p^\alpha}$; und das sind sämmtlich, weil p^α zu m theilerfremd ist, primitive m^{te} Einheitswurzeln. Die Gleichungen $X = 0$, $\Psi = 0$ haben daher mit der irreductiblen Gleichung $F_m = 0$ mindestens eine und sonach alle Wurzeln ω_2 gemeinsam. Deshalb gelten für jedes ω_2 die beiden Gleichungen

$$X(\omega_2) = 0, \quad \Psi(\omega_2) = 0.$$

Wendet man nun den Hülfssatz, den wir am Anfange dieses Paragraphen aufstellten, auf χ und ψ an, so ergiebt sich, dass

$$\chi(\omega_2) \equiv X(\omega_2) \equiv 0, \quad \psi(\omega_2) \equiv \Psi(\omega_2) \equiv 0 \pmod{p}$$

ist; d. h. es werden $\chi(\omega_2)$ und $\psi(\omega_2)$ durch p theilbar, und daher

$$F_n(\omega_2) = \chi(\omega_2)\,\psi(\omega_2) \equiv p^2 f(\omega_2), \tag{7}$$

wobei $f(\omega_2)$ eine passend gewählte ganze, ganzzahlige Function von ω_2 sein wird.

Nach der Formel (19), § 306, ist ferner F_n ein Theiler von $F_p\left(z^{\frac{n}{p}}\right)$, d. h. man kann

$$\frac{z^n - 1}{z^{n:p} - 1} = z^{mp^{\alpha-1}(p-1)} + \cdots + z^{mp^{\alpha-1}} + 1 = F_n(z)\,F(z)$$

setzen, wobei wieder unter $F(z)$ eine passende ganze, ganzzahlige Function zu verstehen ist. Trägt man hier irgend eine primitive m^{te} Einheitswurzel $z = \omega_2$ ein, so ergiebt sich daraus

$$F_n(\omega_2)\,F(\omega_2) = p,$$

und wenn man dies mit (7) combinirt, dann folgt die Gleichung

$$1 = pF(\omega_2)f(\omega_2).$$

Aus dem entwickelten Producte $F(\omega_2)f(\omega_2)$ kann man vermöge $F_m(\omega_2) = 0$ alle Potenzen von ω_2 entfernen, welche den Grad von F_m

übersteigen; es bleibt eine ganzzahlige Function von ω_2 zurück, welche zu einer Gleichung von niederem Grade als $[F_m]$

$$1 = p(a_0 + a_1\omega_2 + a_2\omega_2^2 + \cdots)$$

führt. Dies gilt für jedes ω_2 und muss wegen der Irreductibilität von F_m identisch erfüllt, d. h. es muss $1 = pa_0$ sein, was unmöglich ist. Damit ist die Irreductibilität von $F_n(z)$ bewiesen.

§ 312. Die bei dem letzten Beweise verwendeten Mittel reichen zur Begründung eines allgemeineren von Kronecker*) gegebenen Irreductibilitätssatzes aus: $F_n(z)$ ist auch in demjenigen Rationalitätsbereiche irreductibel, welcher aus der Einheit und einer primitiven k^{ten} Einheitswurzel α gebildet ist, so lange k relativ prim zu n bleibt.

Wäre nämlich

$$F_n(z) = \chi(z, \alpha)\,\psi(z, \alpha),$$

und dabei der Factor $\chi(z, \alpha)$ in dem angegebenen Rationalitätsbereiche irreductibel, dann müsste die Gleichung

$$\chi(z, \alpha) = 0$$

durch eine primitive n^{te} Einheitswurzel ω befriedigt werden. Es sei nun π eine primitive $(kn)^{\text{te}}$ Einheitswurzel, dann können wir nach § 297

$$\omega = \pi^\mu, \quad \alpha = \pi^\nu$$

setzen. Trägt man das in die letzte Gleichung ein, so erkennt man, dass die beiden Gleichungen in z

$$\chi(z^\mu, z^\nu) = 0 \quad \text{und} \quad F_{kn}(z) = 0$$

eine Wurzel $z = \pi$ gemeinsam haben, und also, da F_{kn} nach dem vorigen Paragraphen im Gebiete der rationalen Zahlen irreductibel ist, dass die erste der Gleichungen durch alle Wurzeln π^τ der zweiten befriedigt wird, d. h. dass für jedes τ identisch

$$\chi(\pi^{\mu\tau}, \pi^{\nu\tau}) = 0$$

ist. Bedeutet nun m eine willkürliche zu n theilerfremde Primzahl, dann kann man, wie aus den Elementen der Zahlentheorie bekannt ist, τ so bestimmen, dass die beiden Congruenzen

$$\tau \equiv 1 \pmod{k}, \quad \tau \equiv m \pmod{n}$$

gelten. Demgemäss haben wir für jedes solche m die Gleichung

$$\chi(\pi^{\mu\tau}, \pi^{\nu\tau}) = \chi(\omega^\tau, \alpha^\tau) = \chi(\omega^m, \alpha) = 0.$$

Da aber ω^m alle Wurzeln von $F_n(z) = 0$ giebt, so ist $\chi(z, \alpha) = 0$ für alle primitiven n^{ten} Einheitswurzeln erfüllt, und $\chi(z, \alpha)$ durch $F_n(z)$

*) J. de M. Bd. 19.

theilbar. Der Annahme nach ist χ irreductibel in dem gewählten Rationalitätsbereich; folglich fällt χ bis auf einen constanten Factor mit F_n zusammen, d. h. F_n ist selbst irreductibel.

§ 313. Nachdem so die Irreductibilität festgestellt ist, gehen wir zur Auflösung der Kreistheilungsgleichung über, beschränken uns dabei aber stets auf den Fall $n = p$ und behandeln also nur die Kreistheilungsgleichung

$$z^{p-1} + z^{p-2} + z^{p-3} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0 \tag{8}$$

mit den Wurzeln

$$\omega,\ \omega^2,\ \omega^3,\ \cdots\ \omega^{p-1}, \tag{9}$$

wobei ω die Bedeutung besitzt

$$\omega = \left[\begin{matrix} c & \frac{2\varkappa\pi}{p} \\ s & \end{matrix}\right] \qquad (\varkappa < p).$$

Nun könnte man glauben, dass die algebraische Lösung von (8) vollständig durch die Angabe $z = \sqrt[p]{1}$ geliefert sei, und dass dadurch die Frage definitiv erledigt worden wäre. Aber dem ist nicht so; es handelt sich ja gerade darum, die primitiven Werthe des Ausdrucks $\sqrt[p]{1}$ von den übrigen Werthen des Symbols zu sondern, und ihre Berechnung auf die möglichst einfachen Elemente zurückzuführen. So giebt z. B. die $\sqrt[6]{1}$ unter anderen alle Wurzeln von

$$\frac{(z^6-1)(z-1)}{(z^3-1)(z^2-1)} = z^2 - z + 1,$$

allein es liefert der Ausdruck

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

die primitiven sechsten Einheitswurzeln allein und in einfachster Berechnungsart; deshalb ist die zweite Darstellung der ersteren vorzuziehen. Ebenso ist für die primitiven achten Einheitswurzeln der Werth $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ zu wählen und nicht $\sqrt[8]{1}$.

Am nächstliegenden scheint es, die Untersuchungen von § 113 zu benutzen und $z + \frac{1}{z} = u$ in die reciproke Gleichung (8) einzuführen. Dadurch wird nämlich, wenn wir $(p-1) = 2\mu$ setzen, die Gleichung des Grades 2μ auf eine solche des Grades μ zurückgeführt. Um die Form derselben zu erkennen, schreiben wir

$$\left(z^\mu + \frac{1}{z^\mu}\right) + \left(z^{\mu-1} + \frac{1}{z^{\mu-1}}\right) + \cdots + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = \varphi_\mu,$$

und erhalten als Recursionsformel (vgl. § 113) für die φ

$$\varphi_{\mu+1} = u\varphi_\mu - \varphi_{\mu-1}; \qquad (\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = u + 1).$$

Setzen wir daher weiter als erzeugende Function für die φ

$$T = \varphi_0 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \varphi_3 t^3 + \cdots,$$

so ergiebt sich daraus die Bestimmung

$$T = \frac{1+t}{1-ut+t^2} = (1+t)\sum_{n=0}^{\infty}(ut-t^2)^n$$

$$= (1+t)\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{n}(-1)^x\binom{n}{x}u^{n-x}t^{n+x},$$

oder, wenn man als Summationsbuchstaben $\mu = (n+x)$ einführt,

$$T = (1+t)\sum_{\mu=0}^{\infty}t^{\mu}\sum_{x=0}^{\frac{1}{2}\mu}(-1)^x\binom{\mu-x}{x}u^{\mu-2x}$$

$$= \sum_{\mu=0}^{\infty}t^{\mu}\left\{\sum_{x=0}^{\frac{1}{2}\mu}(-1)^x\binom{\mu-x}{x}u^{\mu-2x} + \sum_{x=0}^{\frac{1}{2}(\mu-1)}(-1)^x\binom{\mu-1-x}{x}u^{\mu-1-2x}\right\}.$$

Hieraus erhält man die explicite Form der umgewandelten Gleichung in u vom Grade $\mu = \frac{1}{2}(p-1)$ nämlich

$$\varphi_\mu(u) = \sum_{x=0}^{\frac{1}{2}\mu}(-1)^x\binom{\mu-x}{x}u^{\mu-2x} + \sum_{x=0}^{\frac{1}{2}(\mu-1)}(-1)^x\binom{\mu-1-x}{x}u^{\mu-1-2x} = 0.$$

Mit dieser Reduction sind nun aber auch die Vortheile, welche die Anwendung der Methode der reciproken Gleichungen liefert, erschöpft. Natürlich gilt die gleiche Umwandlung für ein jedes $F_m(z) = 0$ mit ungeradem m.

§ 314. Auf diesem Punkte blieb die Erkenntniss in die Natur der Kreistheilung lange Zeit hindurch stehen, bis es Gauss gelang*), durch eine eben so geniale wie einfache und glückliche Idee das Wesen unserer Gleichung (8) völlig darzulegen. Wir wollen den von Gauss gegebenen Entwickelungen folgen.

Aus der Zahlentheorie ist es bekannt, dass es für jede Primzahl p zugehörige ganze Zahlen g der Art giebt, dass die Reste bei den Divisionen der Glieder von

$$g,\ g^2,\ g^3,\ \cdots\ g^{p-1} \tag{10}$$

durch den Modul p, von ihrer Reihenfolge abgesehen, mit den Zahlen 1, 2, 3, $\cdots$ $(p-1)$ übereinstimmen, so dass also die Reihe (10) dieselben Elemente hat, wie

*) Werke I. Disquisitiones arithmeticae. Sectio VII.

$$\varkappa_1 p + 1, \quad \varkappa_2 p + 2, \quad \varkappa_3 p + 3, \quad \cdots \quad \varkappa_{p-1} p + (p-1)$$

bei passender Wahl der ganzen Zahlen $\varkappa$. Da es bei Potenzen von ω keine Werthänderung hervorruft, wenn man in den Exponenten Vielfache von p hinzufügt oder unterdrückt, so folgt, dass die Reihe der Wurzeln (9) auch dann entsteht, wenn man dem ω die Werthe (10) zu Exponenten giebt. Um die Schreibweise zu erleichtern, bezeichnen wir, wie Gauss es thut,

$$\omega^{\alpha} = [\alpha],$$

wo diese Klammer nicht mit der früher § 64 in anderer Bedeutung eingeführten zu verwechseln ist. Danach können wir die Wurzeln von (8) auch in der, viele Vorzüge bietenden Anordnung

$$[g], [g^2], [g^3], \cdots [g^{p-1}] \tag{11}$$

schreiben.

Wir zerlegen jetzt $(p-1) = e \cdot f$, nehmen für λ eine beliebige ganze Zahl und wollen die Summe der Glieder der Reihe

$$[\lambda], [\lambda g^e], [\lambda g^{2e}], \cdots [\lambda g^{(f-1)e}] \tag{12}$$

als eine f-gliedrige Periode bezeichnen. Diese Summe der f Wurzeln schreiben wir

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}]. \tag{13}$$

Ist $\lambda = 0$ oder ein Vielfaches von p, dann wird $(f, 0) = \cdots = f$, und wir wollen diese Periode als die uneigentliche Periode von f Gliedern auffassen, im Gegensatze zu den übrigen, welche schlechthin Perioden genannt werden sollen. Von solchen Perioden giebt es e, nämlich

$$\begin{aligned}
&[g] + [g^{e+1}] + [g^{2e+1}] + \cdots + [g^{(f-1)e+1}], \\
&[g^2] + [g^{e+2}] + [g^{2e+2}] + \cdots + [g^{(f-1)e+2}], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&[g^e] + [g^{2e}] + [g^{3e}] + \cdots + [g^{fe}].
\end{aligned} \tag{14}$$

Wollte man dieses Schema fortsetzen, so würde die nächste Zeile mit der ersten übereinstimmen, u. s. f.

Wir beschäftigen uns mit den wichtigsten Eigenschaften der Perioden.

I) Keine der Perioden (14) hat mit einer anderen ein Element $[\lambda]$ gemeinsam.

II) Für die Summe der Perioden (f, λ) bei $\lambda = g, g^2, \cdots g^e$ gilt die Gleichung

$$(f, g) + (f, g^2) + \cdots + (f, g^e) = -1. \tag{15}$$

III) Ersetzt man in dem Ausdrucke von (f, λ) die Wurzel $\omega = [1]$ durch $[g^e]$, dann geht die Periode in sich selbst über.

Denn dadurch verwandelt sich jedes Glied $[\alpha]$ in $[ag^{\epsilon}]$, und deshalb werden die Glieder von $[f, \lambda]$ nur cyklisch um ein Element weiter nach rechts geschoben, wenn man auf das letzte wieder das erste folgen lässt.

IV) Ersetzt man in den Perioden (14) die Wurzel $\omega = [1]$ durch $[g]$, dann werden diese Perioden cyklisch um eine Zeile nach unten geschoben.

V) Alle Perioden haben verschiedene Zahlenwerthe. Denn wäre etwa $(f, g^{\alpha}) = (f, g^{\beta})$, dann könnte man zunächst alle Glieder dadurch reduciren, dass man allen einzelnen Exponenten durch Subtraction von Vielfachen von p die kleinsten positiven Werthe giebt; 0 als Exponent kommt dabei nicht vor, wenn α und β von 0 verschieden sind. Dann könnte man die Gleichung durch ω dividiren und erhielte dadurch eine Gleichung für ω, die höchstens bis zum Grade $(p-2)$ aufsteigt. Eine solche giebt es aber wegen der Irreductibilität von (8) nicht. — Wäre $\beta = 0$, dann ergiebt sich direct das Gleiche, falls α von e verschieden ist, weil ja dann in (f, g^{α}) nicht ω^{p-1} vorkommt; aber auch $(f, g^{\epsilon}) = f$ ist unmöglich, wie man erkennt, wenn man diese Gleichung von $\omega^{p-1} + \omega^{p-2} + \cdots + \omega + 1 = 0$ subtrahirt und auf die Differenz die frühere Ueberlegung anwendet.

VI) Jede ganze, ganzzahlige Function $h(\omega)$ von ω, welche sich nicht ändert, wenn man in ihr $\omega = [1]$ durch $[g]$ ersetzt, hat einen ganzzahligen Werth. Denn zunächst ist

$$h(\omega) = \frac{1}{p}\{h([1]) + h([g]) + \cdots + h([g^{p-1}])\},$$

da alle Glieder der geschweiften Klammer der Voraussetzung nach einander gleich sind; und demnach ist $h(\omega)$ eine symmetrische Function der Wurzeln von (8), und wir können setzen

$$h(\omega) = \frac{k}{p}, \tag{16}$$

wobei k eine ganze Zahl bedeutet. $h(\omega)$ ist also sicher eine rationale Zahl. Die linke Seite hat die Form

$$\alpha_0\omega^{p-1} + \alpha_1\omega^{p-2} + \alpha_2\omega^{p-3} + \cdots + \alpha_{p-1}$$

bei ganzzahligen Coefficienten α. Subtrahirt man daher von (16) die Identität

$$\alpha_0\omega^{p-1} + \alpha_0\omega^{p-2} + \alpha_0\omega^{p-3} + \cdots + \alpha_0 = 0,$$

so müssen links alle Potenzen von ω verschwinden, und es wird ersichtlich, dass $\frac{k}{p}$ eine ganze Zahl ist, wie behauptet wurde.

VII) Jede ganze, ganzzahlige symmetrische Function der Perioden (14) ist eine ganze Zahl. Denn nach IV) gehen die

Perioden durch die Substitution $[g]$ statt $[1]$ nur Vertauschungen untereinander ein. Dadurch ändert sich eine symmetrische Function derselben nicht. Somit zeigt VI) die Richtigkeit des Satzes.

VIII) Jede ganze, ganzzahlige Function $h(\omega)$ von ω, welche sich nicht ändert, wenn man in ihr $\omega = [1]$ durch $[g^e]$ ersetzt, ist eine lineare, ganzzahlige Function der Perioden (14). Wir schreiben

$$h(\omega) = \frac{1}{f}\{h([1]) + h([g^e]) + h([g^{2e}]) + \cdots + h([g^{(f-1)e}])\},$$

wie dies der Voraussetzung nach möglich ist. Wenn nun

$$h(\omega) = \alpha_0\omega^{p-1} + \alpha_1\omega^{p-2} + \cdots + \alpha_{p-1}$$

gesetzt wird, dann hat man nach Eintragung dieser Form in die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung

$$h(\omega) = \frac{1}{f}\{\alpha_0(f, p-1) + \alpha_1(f, p-2) + \cdots + \alpha_{p-1}(f, 0)\}$$

oder, wenn man die einander gleichen Perioden zusammenfasst,

$$h(\omega) = \frac{1}{f}\{\beta_0 + \beta_1(f, g) + \beta_2(f, g^2) + \cdots + \beta_e(f, g^e)\}.$$

Jeder Coefficient der linken Seite ist eine ganze Zahl; rechts treten, da keine Periode mit einer anderen eine Potenz von ω gemeinsam hat, nur die Coefficienten $\beta_i : f$ auf; folglich sind auch diese sämmtlich ganze Zahlen. Damit ist der aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

IX) Das Product zweier Perioden (14) ist eine ganzzahlige, lineare, homogene Function sämmtlicher eigentlichen oder uneigentlichen Perioden. Wir wollen die beiden Perioden

$$(f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}],$$
$$(f, \mu) = [\mu] + [\mu g^e] + [\mu g^{2e}] + \cdots + [\mu g^{(f-1)e}]$$

mit einander multipliciren. Dies möge derart geschehen, dass zuerst je zwei untereinander stehende Glieder miteinander multiplicirt werden

$$[\lambda + \mu] + [(\lambda + \mu)g^e] + [(\lambda + \mu)g^{2e}] + \cdots,$$

und dass dann in jedem Producte μ der Reihe nach in μg^e, μg^{2e}, $\cdots$ verwandelt wird. So entstehen die weiteren Zeilen

$$[\lambda + \mu g^e] + [(\lambda + \mu g^e)g^e] + [(\lambda + \mu g^e)g^{2e}] + \cdots,$$
$$[\lambda + \mu g^{2e}] + [(\lambda + \mu g^{2e})g^e] + [(\lambda + \mu g^{2e})g^{2e}] + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jede der erhaltenen Zeilen ist die Summe der Glieder einer Periode; wir erhalten demnach die Gleichung

$$(f, \lambda)(f, \mu) = (f, \lambda + \mu) + (f, \lambda + \mu g^e) + (f, \lambda + \mu g^{2e}) + \cdots.$$

Ersetzt man hierin alle ganzen Zahlen $\lambda + \mu$, $\lambda + \mu g^e$, $\cdots$ durch ihre kleinsten positiven Reste modulo p und vereinigt dann die auftretenden gleichen Perioden, dann entsteht das behauptete Resultat

(17) $(f, \lambda)(f, \mu) = a_0(f, 0) + a_1(f, g) + a_2(f, g^2) + \cdots + a_e(f, g^e)$.

Hierin bedeuten die a ganze, positive Zahlen oder Null.

X) Jede ganze, ganzzahlige Function der Perioden (14) ist eine ganzzahlige, lineare Function sämmtlicher Perioden. Dies ergiebt sich durch fortgesetzte Anwendung des Satzes IX).

XI) Die e Perioden (14) von je f Gliedern sind die Wurzeln einer Gleichung e^{ten} Grades, deren erster Coefficient 1 ist, und deren folgende Coefficienten ganze Zahlen sind. Diese Gleichung lautet

(18) $$(z - (f, g))(z - (f, g^2)) \cdots (z - (f, g^e)) = 0;$$

da die Coefficienten symmetrische, ganzzahlige Functionen der Perioden (14) sind, so folgt aus VII), dass sie ganzzahlige Werthe haben.

XII) Die Gleichung (18) ist irreductibel. Denn wäre die linke Seite zerlegbar, dann betrachten wir denjenigen ihrer irreductiblen Factoren, welcher $(z - (f, g))$ enthält, und setzen ihn gleich Null. Nun hätte die entstehende Gleichung

(19) $H(z) = 0$ die Wurzel $z = [g] + [g^{e+1}] + \cdots$,

und folglich hätte die Gleichung

(19a) $H(\zeta^q + \zeta^{q^{e+1}} + \cdots) = 0$ die Wurzel $\zeta = \omega$.

Da aber ω eine Wurzel der irreductiblen Gleichung (8) ist, so besässe (19a) die Wurzeln $\zeta = [g]$, $[g^2]$, $\cdots$ $[g^e]$, und also (19) die Wurzeln $z = (f, g)$, (f, g^2), $\cdots$ (f, g^e), d. h. alle Wurzeln von (18); daher müsste (18) irreductibel sein, wie (19) es ist.

XIII) Bedeuten (f, λ) und (f, μ) zwei von den Perioden (14), so kann

(20) $(f, \mu) = \alpha_0 + \alpha_1(f, \lambda) + \alpha_2(f, \lambda)^2 + \cdots + \alpha_{e-1}(f, \lambda)^{e-1}$

gesetzt werden, wenn die α passend gewählte rationale Zahlen sind, d. h. jede eigentliche Periode ist eine ganze Function jeder anderen eigentlichen Periode. Denn zuerst ist wegen der Gleichung (15)

$$-1 = (f, g) + (f, g^2) + \cdots + (f, g^e);$$

dann ist weiter identisch

$$(f, \lambda) = a_{1,0} + a_{1,1}(f, g) + a_{1,2}(f, g^2) + \cdots a_{1,e}(f, g^e),$$

wenn rechts alle a gleich Null gesetzt werden, mit Ausnahme des $a_{1,\varkappa} = 1$, welches als Coefficient von $(f, \lambda) = (f, g^\varkappa)$ auftritt. Hieraus

folgt durch Potenzirung, wenn man jedesmal rechts die Formel (17) anwendet,

$$\begin{aligned}
(f,\lambda)^2 &= a_{2,0} + a_{2,1}(f,g) + a_{2,2}(f,g^2) + \cdots + a_{2,e}(f,g^e),\\
(f,\lambda)^3 &= a_{3,0} + a_{3,1}(f,g) + a_{3,2}(f,g^2) + \cdots + a_{3,e}(f,g^e),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
(f,\lambda)^{e-1} &= a_{e-1,0} + a_{e-1,1}(f,g) + a_{e-1,2}(f,g^2) + \cdots + a_{e-1,e}(f,g^e).
\end{aligned}$$

Die so erhaltenen e Gleichungen sind linear von einander unabhängig. Denn wäre das nicht der Fall, so würden ganze Zahlen $q_0, q_1, \cdots q_{n-1}$ existiren, die nicht alle verschwinden, und für welche die Gleichung

$$q_0(f,\lambda)^{e-1} + q_1(f,\lambda)^{e-2} + \cdots + q_{n-2}(f,\lambda) + q_{n-1} = 0$$

erfüllt wäre. Die Existenz einer solchen Gleichung widerspräche aber der Thatsache, dass (f,λ) nach XII) die Wurzel einer irreductiblen Gleichung e^{ten} Grades ist.

Aus der Unabhängigkeit der e linearen Gleichungen folgt, dass jedes der e Glieder (f,g), (f,g^2), $\cdots$ (f,g^e) in der Form (20) durch Auflösung des Gleichungssystems dargestellt werden kann, ohne dass die Gleichung (20) illusorisch wird. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

XIV) Die Gleichung

$$(21)\quad (f,g^2) = \beta_0 + \beta_1(f,g) + \beta_2(f,g)^2 + \cdots + \beta_{e-1}(f,g)^{e-1},$$

durch welche (f,g^2) als ganze Function von (f,g) ausgedrückt wird, bleibt richtig, wenn man die Perioden

$$(f,g),\ (f,g^2),\ (f,g^3),\ \cdots\ (f,g^e)$$

cyklisch in ihr weiterschiebt, so dass also auch für $\mu = 2, 3 \cdots$

$$(21^a)\quad (f,g^{\mu+1}) = \beta_0 + \beta_1(f,g^\mu) + \beta_2(f,g^\mu)^2 + \cdots + \beta_{e-1}(f,g^\mu)^{e-1}$$

gilt. Denn setzt man in (21) statt ω ein z, so hat die entstehende Gleichung für z die Wurzel ω und daher (vgl. XII) auch ω^g, $\cdots$. Man kann deshalb in (21) ω durch ω^g, ω^{g^2}, $\cdots$ ersetzen und kommt so auf (21^a).

XV) Die f Glieder einer jeden der e Perioden (14) sind die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten lineare, ganzzahlige Functionen der Perioden (14) sind. Diese Gleichungen lauten

$$(22)\quad \begin{aligned}
&(z - [g])\,(z - [g^{e+1}]) \cdots (z - [g^{(f-1)e+1}]) = 0,\\
&(z - [g^2])\,(z - [g^{e+2}]) \cdots (z - [g^{(f-1)e+2}]) = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;
\end{aligned}$$

die Coefficienten einer jeden sind symmetrische Functionen der Glieder der betreffenden Periode und ändern sich deshalb nicht, wenn man in

ihnen [1] durch $[g^e]$ ersetzt. Nach VIII) sind somit sämmtliche Coefficienten in jeder der Gleichungen (22) von der Form

$$c_0 + c_1(f, g) + c_2(f, g^2) + \cdots + c_e(f, g^e),$$

in welcher die $c_0, c_1, \cdots c_e$ ganze Zahlen bedeuten.

Dieser Satz giebt ein treffendes Beispiel für die in § 47 angestellten Betrachtungen über Reductibilität und Irreductibilität. Die Gleichung (8) ist im Rationalitätsbereiche, welcher aus den rationalen Zahlen besteht, unzerlegbar. Nimmt man dagegen die e Perioden (14) oder gemäss XIII) auch nur eine derselben zum Rationalitätsbereiche hinzu, so wird (8) zerlegbar, derart, dass die linken Seiten der Gleichungen (22) die einzelnen Factoren werden, in welche das Polynom von (8) zerfällt.

XVI) In dem aus den rationalen Zahlen und einer der Perioden (14) gebildeten Rationalitätsbereiche ist jede der Gleichungen (22) irreductibel. Wäre $H(z)$ nämlich ein irreductibler Theiler der ersten Gleichung (22) und zwar derjenige, welcher den Factor $(z - [g])$ enthält, so könnten wir, mit Andeutung des Rationalitätsbereiches der Coefficienten,

$$H([g]; (f, g), (f, g^2), \cdots (f, g^e)) = 0$$

schreiben. Setzt man hierin sowohl bei $[g]$ als bei den Perioden z für ω ein, so entsteht eine Gleichung in z mit rationalen Coefficienten, welche die Wurzel $z = \omega$ besitzt und deswegen auch die Wurzeln $z = [g^e], [g^{2e}], \cdots$. Daher ist gleichfalls

$$H([g^{e+1}]; (f, g^{e+1}), (f, g^{e+2}), \cdots (f, g^{2e}))$$
$$= H([g^{e+1}]; (f, g), (f, g^2), \cdots (f, g^e)) = 0,$$

d. h. $H(z) = 0$ hat auch die Wurzel $[g^{e+1}]$ und ebenso $[g^{2e+1}], \cdots$. Der irreductible Factor $H(z)$ fällt sonach mit dem Gleichungspolynom selbst zusammen. Folglich ist die erste, und ebenso jede folgende der Gleichungen (22) irreductibel.

§ 315. Die abgeleiteten Resultate zeigen: Die Lösung der Gleichung (8) kann folgendermassen bewerkstelligt werden. Man bestimmt eine Wurzel der Gleichung (18) vom Grade e. Dann sind wegen (20) alle ihre Wurzeln rational aus dieser Einen ableitbar, und (8) zerfällt in die Gleichungen (22). Bestimmt man eine Wurzel irgend einer von diesen Gleichungen f^{ten} Grades, dann ist dies eine primitive Wurzel von (8), und ihre Potenzen ergeben die übrigen Wurzeln von (8). Hiermit ist der erste Schritt zur Zerlegung der Auflösung von (8) in ihre einfachsten Elemente geliefert.

§ 316. Gesetzt, man könnte f weiter in zwei Factoren zerlegen $f = e'f'$, dann bilden wir $e \cdot e'$ Perioden von je f' Summanden, nämlich

$$
\begin{aligned}
&[g] + [g^{ee'+1}] + \cdots + [g^{(f'-1)ee'+1}] = (f', g),\\
&[g^2] + [g^{ee'+2}] + \cdots + [g^{(f'-1)ee'+2}] = (f', g^2),\\
&\cdots\cdots\cdots

§ 317. Die abgeleiteten Resultate setzen uns in die Lage, jetzt den zweiten Theil der Lösungsvorschrift aus § 315, welcher die Auflösung einer Gleichung f^{ten} Grades forderte, weiter zu vereinfachen. Ist die Gleichung (18) vom Grade e aufgelöst, und sind dadurch die Perioden (14) bekannt geworden, dann kann man diese in den Rationalitätsbereich aufnehmen. Die e Gleichungen (24) des Grades e' haben Coefficienten, welche diesem erweiterten Rationalitätsbereiche angehören. Hat man eine der Gleichungen (24) aufgelöst, dann lassen sich alle $e.e'$ Perioden (23) von je f' Gliedern rational darstellen (XIII), und die Lösung einer Gleichung f'^{ten} Grades vollendet die Lösung von (8). Es sind demnach die Wurzeln einer Gleichung e^{ten}, einer solchen e'^{ten} und einer solchen f'^{ten} Grades zu bestimmen.

Hierdurch sind wir zu der nachstehenden, von Gauss abgeleiteten Auflösungsregel gelangt. Es sei, in seine Primfactoren zerlegt, $(p-1) = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma \cdots \zeta$, und es möge

$$\frac{p-1}{\alpha} = \beta \cdot \gamma \cdots \zeta = a, \quad \frac{p-1}{\alpha\beta} = \gamma \cdots \zeta = b, \quad \cdots$$

gesetzt werden. Dann vertheilen wir zunächst die $(p-1)$ Wurzeln von (8) in α Perioden von je a Gliedern, diese einzeln wieder in β Perioden von je b Gliedern u. s. f. Die Auflösung einer Gleichung vom α^{ten} Grade giebt uns die Werthe der α Perioden; ja man braucht sogar nur eine beliebige der Wurzeln dieser Gleichung zu besitzen, um alle rational darstellen zu können. Wir dürfen diese Wurzel gleich

$$(a, 1) = [1] + [g^{\alpha}] + \cdots [g^{(\alpha-1)\alpha}]$$

setzen. Denn um diese Festsetzung zu rechtfertigen, brauchen wir nur unter ω eine von denjenigen Wurzeln von (8) zu verstehen, welche unter den a Gliedern der rechten Seite auftreten, während vor dieser Annahme die Wahl von ω unter den primitiven p^{ten} Wurzeln der Einheit noch eine völlig willkürliche war. Ist nun $(a, 1)$ bekannt, dann liefert eine rationale Rechnung nach § 314, XIII) die Werthe aller übrigen Perioden als ganze, ganzzahlige Functionen von $(a, 1)$. Hierdurch sind die Coefficienten aller αb Gleichungen β^{ten} Grades bestimmt, von denen die β^{ten} Perioden von je b Gliedern abhängen. Von einer derselben suchen wir eine beliebige Wurzel, z. B. von derjenigen, welche $(b, 1)$ enthalten muss, und setzen

$$(b, 1) = [1] + [g^{\alpha\beta}] + \cdots + [g^{(b-1)\alpha\beta}]$$

dieser Wurzel gleich. Das ist erlaubt, wenn wir nur unter ω eine von denjenigen Wurzeln von (8) verstehen, welche unter den b Gliedern der rechten Seite der letzten Gleichung auftreten. Dadurch ist also die

Willkür in der Wahl von ω noch weiter beschränkt. Ist $(b, 1)$ bekannt, dann liefert § 314, XIII) alle übrigen b-gliedrigen Perioden. In derselben Weise geht man fort, bis die Auflösung einer Gleichung ζ^{ten} Grades zu der Feststellung von $\omega = [1]$ und damit zum Abschlusse der Lösung von (8) führt.

§ 318. Das Beispiel $p = 17$ möge diese Vorschriften erläutern. Dabei benutzen wir $g = 3$. Es wird nicht nöthig sein, neben die fertigen Resultate noch besondere Erklärungen zu setzen.

$\lambda =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$g^\lambda \equiv$	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

$$(8,1) = [1] + [9] + [13] + [15] + [16] + [8] + [4] + [2],$$
$$(8,3) = [3] + [10] + [5] + [11] + [14] + [7] + [12] + [6];$$
$$(8,1) + (8,3) = -1,$$
$$(8,1) \cdot (8,3) = 4\,\{(8,1) + (8,3\} = -4.$$

Die Gleichung, welche (8,1) und (8,3) zu Wurzeln hat, lautet

$$z^2 + z - 4 = 0,$$

und wir setzen, indem wir die numerischen Werthe bis auf sieben Dezimalen angeben,

$$(8,1) = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{17}) = 1{,}5615528.$$

Ferner ist

$$(4,1) = [1] + [13] + [16] + [4]; \quad (4,3) = [3] + [5] + [14] + [12],$$
$$(4,9) = [9] + [15] + [8] + [2]; \quad (4,10) = [10] + [11] + [7] + [6];$$
$$(4,1) + (4,9) = (8,1),$$
$$(4,1) \cdot (4,9) = (8,1) + (8,3) = -1.$$

Die Gleichung, welche (4,1) und (4,9) zu Wurzeln hat, lautet

$$z^2 - (8,1)\,z - 1 = 0,$$

und wir setzen

$$(4,1) = \tfrac{1}{2}[(8,1) + \sqrt{(8,1)^2 + 4}] = 2{,}0494812.$$

Aus den Gleichungen

$$-1 - (4,1) = (4,3) + (4,9) + (4,10),$$
$$(4,1)^2 - 4 = 2(4,3) + (4,9),$$
$$(4,1)^3 - 9(4,1) = (4,3) + 3(4,9) + 3(4,10)$$

folgt

$$(4,3) = -\tfrac{1}{2}(4,1)^3 + 3(4,1) - \tfrac{3}{2},$$
$$(4,9) = (4,1)^3 + (4,1)^2 - 6(4,1) - 1,$$
$$(4,10) = -\tfrac{1}{2}(4,1)^3 - (4,1)^2 + 2(4,1) + \tfrac{3}{2}.$$

Ferner wird

$$(2,1) = [1] + [16]; \quad (2,3) = [3] + [14],$$
$$(2,13) = [13] + [4]; \quad (2,5) = [5] + [12],$$
$$(2,9) = [9] + [8]; \quad (2,10) = [10] + [7],$$
$$(2,15) = [15] + [2]; \quad (2,11) = [11] + [6].$$
$$(2,1) + (2,13) = (4,1),$$
$$(2,1) \cdot (2,13) = (4,3).$$

Die Gleichung mit den Wurzeln (2,1) und (2,13) wird also

$$z^2 - (4,1)z + (4,3) = 0,$$

und wir können

$$(2,1) = \tfrac{1}{2}\{(4,1) + \sqrt{(4,1)^2 - 4\cdot(4,3)}\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\{(4,1) + \sqrt{2(4,1)^3 + (4,1)^2 - 12(4,1) + 6}\}$$
$$= 1{,}8649445$$

setzen. Aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
-(2,1)-1 &= (2,13)+(2,9)+(2,15)+(2,3)+(2,5)+(2,10)+(2,11),\\
(2,1)^2-2 &= +(2,15),\\
(2,1)^3-3(2,1) &= +(2,3),\\
(2,1)^4-6 &= (2,13)+4(2,15),\\
(2,1)^5-10(2,1) &= +5(2,3)+(2,5),\\
(2,1)^6-20 &= 6(2,13)+15(2,15)+2(2,11),\\
(2,1)^7-35(2,1) &= +21(2,3)+7(2,5)+(2,10)
\end{aligned}$$

folgt

$$(2,15) = (2,1)^2 - 2, \quad (2,13) = (2,1)^4 - 4(2,1)^2 + 2,$$
$$(2,11) = (2,1)^6 - 6(2,1)^4 + 9(2,1)^2 - 2,$$
$$(2,3) = (2,1)^3 - 3(2,1), \quad (2,5) = (2,1)^5 - 5(2,1)^3 + 5(2,1),$$
$$(2,10) = (2,1)^7 - 7(2,1)^5 + 14(2,1)^3 - 7(2,1),$$
$$(2,9) = -(2,1)^7 - (2,1)^6 + 6(2,1)^5 - 10(2,1)^3 - 6(2,1)^2 + 4(2,1) + 1.$$

Endlich haben wir

$$[1] + [16] = (2,1),$$
$$[1] \cdot [16] = 1;$$

die Gleichung mit den Wurzeln [1] und [16] wird

$$z^2 - (2,1)z + 1 = 0$$

und wir setzen

$$[1] = \tfrac{1}{2}\{(2,1) + \sqrt{(2,1)^2 - 4}\}$$
$$= 0{,}9324722 + i\cdot 0{,}3612417.$$

Hieraus folgen die weiteren Wurzeln der Kreistheilungsgleichung durch Potenzirung.

§ 319. Wir wollen noch zwei Bemerkungen an dieses Beispiel knüpfen.

Da $(p-1)$ stets eine gerade Zahl ist, so wird einer ihrer Factoren $\alpha, \beta, \gamma, \cdots \zeta$ gleich 2. Setzen wir einen solchen bei unserer Auflösungsmethode an die letzte Stelle, dann ist jede der voraufgehenden Perioden aus einer Anzahl von Perioden $(2, \lambda) = [\lambda] + \left[\lambda g^{\frac{1}{2}(p-1)}\right]$ zusammengesetzt. Nun lässt $g^{\frac{1}{2}(p-1)}$ durch p dividirt den Rest (-1), (vgl. § 325), also ist

$$(2, \lambda) = [\lambda] + [-\lambda]$$
$$= \left[{}^{c}_{s}\frac{2\lambda\pi}{p}\right] + \left[{}^{c}_{s} - \frac{2\lambda\pi}{p}\right] = 2\cos\frac{2\lambda\pi}{p}$$

eine reelle Grösse, und das Gleiche gilt deswegen von der Summe solcher Grössen, d. h. von allen voraufgehenden Perioden. Die getroffene Anordnung gewährt demnach den Vortheil, dass alle Berechnungen bis zur letzten exclus. im Gebiete der reellen Grössen durchführbar sind, dass die complexen Grössen erst bei der Ausführung der letzten Operation auftreten, und bei der Beschränkung auf die Berechnung der Winkelfunctionen überhaupt vermieden werden können. —

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf den Fall, dass $(p-1)$ eine Potenz von 2 ist. Tritt dies ein, dann erfordert die Lösung jeder Gleichung nur die Ausziehung einer Quadratwurzel, und es ist daher möglich, durch geometrische Constructionen mit Hülfe von Zirkel und Lineal die Bestimmung der Wurzeln durchzuführen. Hierbei wird man auch nur bis zu der Periode $(2,1) = 2\cos\frac{2\pi}{p}$ gehen und erlangt dadurch die Theilung der gesammten Kreisperipherie in p gleiche Theile. Die niedrigsten derartigen Zahlen p sind 3, 5, 17, 257, 65537, ···. Für den Fall $p = 17$ z. B. würde $\cos\frac{2\pi}{p}$ nach § 318 den Werth

$$-\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{16}\sqrt{17} + \tfrac{1}{16}(34 - 2\sqrt{17})^{\frac{1}{2}}$$
$$+ \tfrac{1}{8}[17 + 3\sqrt{17} - (34 - 2\sqrt{17})^{\frac{1}{2}} - 2(34 + 2\sqrt{17})^{\frac{1}{2}}]^{\frac{1}{2}}$$

erhalten; die Construction selbst schliesst sich aber geschickter an die Auflösung der einzelnen quadratischen Gleichungen an*).

Damit $2^m + 1$ eine Primzahl werde, muss, wie sich leicht beweisen lässt, m eine Potenz von 2 sein. Denn hätte m einen ungeraden

*) Vgl. Bachmann: Die Lehre von der Kreistheilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Leipzig, Teubner. 1872.

von 1 verschiedenen Factor μ, dann wäre bei $m = \mu \cdot \mu_1$ die Summe $2^m + 1$ durch $2^{\mu_1} + 1$ theilbar und also gegen die Annahme keine Primzahl. Es kommen sonach für die geometrische Construction der Kreistheilung nur Zahlen $p = 2^{2^\varkappa} + 1$ in Betracht. Die oben angeführten Zahlen entsprechen den Werthen $\varkappa = 0, 1, 2, 3, 4$; aber bei $\varkappa = 5$ ist $2^{2^\varkappa} + 1$ keine Primzahl mehr, wie Euler gezeigt hat.

Neunundzwanzigste Vorlesung.

Kreistheilungsgleichung. Methode von Lagrange und Jacobi.

§ 320. Es war dem Scharfsinne von Gauss nicht entgangen, dass die Gleichungen, durch welche Perioden geringerer Gliederanzahl aus solchen höherer Gliederanzahl berechnet werden, sich auf reine Gleichungen reduciren lassen (Disq. arith. § 359). Diese Eigenschaft sowie weitere Erkenntniss der Natur jener Gleichungen zeigt sich am einfachsten bei der Verwendung einer von Lagrange angegebenen Lösungsmethode, die dann später von Jacobi in wesentlichen Stücken ergänzt worden ist*). Lagrange benutzt eine gewisse lineare Function der Einheitswurzeln, ähnlich wie er es bei den Gleichungen dritten und vierten Grades mit Erfolg gethan hatte. Diese Function führt hier wie im allgemeinen Falle den Namen der Lagrange'schen Resolvente.

§ 321. Wir haben in § 313 die f-gliedrigen Perioden durch

$$(1) \qquad (f, \lambda) = [\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}]$$

definirt. Jetzt verstehen wir unter α irgend eine f^{te} Einheitswurzel und setzen als Lagrange'sche Resolvente an:

$$(2) \quad (f, \lambda; \alpha) = [\lambda] + [\lambda g^e]\alpha + [\lambda g^{2e}]\alpha^2 + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}]\alpha^{f-1};$$

es ist also insbesondere $(f, \lambda; 1) = (f, \lambda)$. Wir leiten zunächst eine fundamentale Eigenschaft von (2) ab. Aus der Gleichung

$$(3) \qquad \begin{aligned} (f, \lambda g^e; \alpha) &= [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}]\alpha + \cdots + [\lambda g^{fe}]\alpha^{f-1} \\ &= \alpha^{-1}(f, \lambda; \alpha) \end{aligned}$$

folgt durch Potenzirung

$$(4) \qquad (f, \lambda g^e; \alpha)^f = (f, \lambda; \alpha)^f,$$

d. h. der Ausdruck $(f, \lambda; \alpha)^f$ ändert sich nicht, wenn man in

---

*) Lagrange: Œuvres Bd. 8; notes XIII, XIV. Jacobi: Werke Bd. 6. S. 254.

ihm [1] durch $[g^e]$ ersetzt. Er ist also nach § 314, VIII) eine lineare, ganzzahlige Function der e Perioden

$$(5) \qquad (f, g),\ (f, g^2),\ \cdots\ (f, g^e)$$

und daher, wenn diese Perioden bekannt sind, selbst rational darstellbar. Wir wollen den Ausdruck (4) durch T bezeichnen. T ist von Null verschieden. Denn wenn $(f, \lambda; \alpha) = 0$ wäre, dann könnte man in (2) zunächst alle Exponenten λ, λg^e, $\cdots$ von ω durch ihre kleinsten positiven Reste mod. p ersetzen und die so umgeformte Function durch ω dividiren; dadurch würde ein Ausdruck entstehen, der eine ganze Function von ω höchstens vom Grade $(p-2)$ wäre, dessen Coefficienten rationale Functionen von α würden, und der den Werth 0 besässe. Das ist jedoch nach § 312 nicht möglich, da f gegen $p = e \cdot f + 1$ relativ prim ist, und also die Kreistheilungsgleichung auch in dem erweiterten, aus 1 und α gebildeten Rationalitätsbereiche irreductibel bleibt.

Erhebt man jetzt einmal (3) in die Potenz mit den Exponenten $(-\varkappa)$ und ersetzt andererseits in (3) die Wurzel α durch $\alpha^\varkappa$, so folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}(f, \lambda g^e; \alpha)^{-\varkappa} &= \alpha^\varkappa (f, \lambda; \alpha)^{-\varkappa},\\ (f, \lambda g^e; \alpha^\varkappa) &= \alpha^{-\varkappa} (f, \lambda; \alpha^\varkappa),\end{aligned}$$

und durch Multiplication beider Gleichungen entsteht

$$(6) \qquad (f, \lambda g^e; \alpha)^{-\varkappa} (f, \lambda g^e; \alpha^\varkappa) = (f, \lambda; \alpha)^{-\varkappa} (f, \lambda; \alpha^\varkappa),$$

woraus ersichtlich ist, dass die rechte Seite sich bei der Einführung von $[g^e]$ an die Stelle von [1] nicht ändert. Nach § 314, VIII) ist

$$(7) \qquad (f, \lambda; \alpha^\varkappa)\,(f, \lambda; \alpha)^{-\varkappa} = T_\varkappa$$

rational durch die Perioden (5) darstellbar.

Man hat also gemäss (4) und (7), wenn α jetzt eine primitive f^{te} Einheitswurzel bedeutet,

$$\begin{aligned}
&[\lambda] + [\lambda g^e] + [\lambda g^{2e}] + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}] = (f, \lambda),\\
&[\lambda] + [\lambda g^e]\,\alpha + [\lambda g^{2e}]\,\alpha^2 + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}]\,\alpha^{f-1} = \sqrt[f]{T},\\
&[\lambda] + [\lambda g^e]\,\alpha^2 + [\lambda g^{2e}]\,\alpha^4 + \cdots + [\lambda g^{(f-1)e}]\,\alpha^{2(f-1)} = T_2 \sqrt[f]{T^2},\\
&\cdots\cdots\cdots

$$
\begin{aligned}
f\cdot[\lambda] &= (f,\lambda) + \sqrt[f]{T} + T_2\sqrt[f]{T^2} + \cdots + T_{f-1}\sqrt[f]{T^{f-1}},\\
(8)\quad f\cdot[\lambda g^e] &= (f,\lambda) + \alpha^{-1}\sqrt[f]{T} + \alpha^{-2}T_2\sqrt[f]{T^2} + \cdots + \alpha^{-f+1}T_{f-1}\sqrt[f]{T^{f-1}},\\
f\cdot[\lambda g^{2e}] &= (f,\lambda) + \alpha^{-2}\sqrt[f]{T} + \alpha^{-4}T_2\sqrt[f]{T^2} + \cdots + \alpha^{-2f+2}T_{f-1}\sqrt[f]{T^{f-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

und erkennt daraus, dass wenn die e Perioden von je f Gliedern bekannt sind, die einzelnen p^{ten} Einheitswurzeln nach Ausziehung der f^{ten} Wurzel aus einer bekannten Grösse T unter Benutzung einer primitiven f^{ten} Einheitswurzel α gebildet werden können.

§ 322. Ist nun wieder, wie in § 316, die Zahl $f = e'\cdot f'$, und verstehen wir unter β eine e'^{te} Wurzel der Einheit, dann können wir diese in (2) statt α eintragen. Dabei wird

$$
\begin{aligned}
(f,\lambda;\beta) &= [\lambda] + [\lambda g^e]\beta + [\lambda g^{2e}]\beta^2 + \cdots + [\lambda g^{(e'-1)e}]\beta^{e'-1}\\
&\quad + [\lambda g^{e'e}] + [\lambda g^{e'e+e}]\beta + [\lambda g^{e'e+2e}]\beta^2 + \cdots + [\lambda g^{(2e'-1)e}]\beta^{e'-1}\\
(9)\qquad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&= (f',\lambda) + (f',\lambda g^e)\beta + \cdots + (f',\lambda g^{(e'-1)e})\beta^{e'-1}.
\end{aligned}
$$

An die Stelle von (3) und (4) treten die Gleichungen

$$(10)\qquad (f,\lambda g^e;\beta) = \beta^{-1}(f,\lambda;\beta),$$

$$(11)\qquad (f,\lambda g^e;\beta)^{e'} = (f,\lambda;\beta)^{e'},$$

von denen die zweite zeigt, dass $(f,\lambda;\beta)^{e'} = T$ eine lineare, ganzzahlige Function der Perioden (5) und daher mit diesen selbst bekannt ist. T ist aus den oben dargelegten Gründen von Null verschieden. An die Stelle von (6) tritt

$$(f,\lambda g^e;\beta)^{-x}(f,\lambda g^e;\beta^x) = (f,\lambda;\beta)^{-x}(f,\lambda;\beta^x),$$

und deshalb ist

$$(12)\qquad (f,\lambda;\beta^x)(f,\lambda;\beta)^{-x} = T_x$$

rational durch die Perioden (5) darstellbar. Auf Grund von (11) und (12) stellen wir jetzt wieder, wenn nun β eine primitive e'^{te} Einheitswurzel bezeichnet, das System von Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(f',\lambda) + (f',\lambda g^e) + \cdots + (f',\lambda g^{(e'-1)e}) = (f,\lambda),\\
&(f',\lambda) + (f',\lambda g^e)\beta + \cdots + (f',\lambda g^{(e'-1)e})\beta^{e'-1} = \sqrt[e']{T},\\
&(f',\lambda) + (f',\lambda g^e)\beta^2 + \cdots + (f',\lambda g^{(e'-1)e})\beta^{2(e'-1)} = T_2\sqrt[e']{T^2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(f',\lambda) + (f',\lambda g^e)\beta^{e'-1} + \cdots + (f',\lambda g^{(e'-1)e})\beta^{(e'-1)^2} = T_{e'-1}\sqrt[e']{T^{e'-1}}
\end{aligned}
$$

auf, dessen Lösungen

$$
\begin{aligned}
e'\cdot(f'\lambda) &= (f,\lambda) + \sqrt[e']{T} + T_2\sqrt[e']{T^2} + \cdots + T_{e'-1}\sqrt[e']{T^{e'-1}},\\
e'\cdot(f'\lambda g^{e}) &= (f,\lambda) + \beta^{-1}\sqrt[e']{T} + \beta^{-2}T_2\sqrt[e']{T^2} + \cdots + \beta^{-e'+1}T_{e'-1}\sqrt[e']{T^{e'-1}},\\
e'\cdot(f',\lambda g^{2e}) &= (f,\lambda) + \beta^{-2}\sqrt[e']{T} + \beta^{-4}T_2\sqrt[e']{T^2} + \cdots + \beta^{-2e'+2}T_{e'-1}\sqrt[e']{T^{e'-1}},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{13}
$$

uns zeigen, dass wenn die e Perioden von je f Gliedern bekannt sind, die ee' Perioden von je f' Gliedern nach Ausziehung der e'^{ten} Wurzel aus einer bekannten Grösse T unter Benutzung einer primitiven e'^{ten} Einheitswurzel β gebildet werden können.

Nimmt man in (13) $e = 1$ und also $f = p - 1$, so erkennt man, wie direct, ohne Vermittelung zwischenliegender Perioden, der Uebergang von der Kreistheilungsgleichung zu irgend welchen Perioden gemacht werden kann.

§ 323. T wird im Allgemeinen einen complexen Werth haben, und deshalb kann

$$(f, \lambda; \beta)^{e'} = R\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\varphi \tag{14}$$

gesetzt werden, wobei R und φ als bekannt anzusehen sind. Das ergiebt

$$(f, \lambda; \beta) = \sqrt[e']{T} = \sqrt[e']{R}\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}\frac{\varphi + 2k\pi}{e'}.$$

Ersetzt man in (14) λ durch $-\lambda$ und β durch β^{-1}, dann entsteht der conjugirt complexe Werth zu $(f, \lambda; \beta)$, und daher wird

$$(f, -\lambda; \beta^{-1})^{e'} = R\begin{bmatrix} c \\ s \end{bmatrix}-\varphi,$$

$$\{(f, \lambda; \beta)(f, -\lambda; \beta^{-1})\}^{e'} = R^2,$$

oder weil $g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$ ist,

$$\{(f, \lambda; \beta)(f, \lambda g^{\frac{p-1}{2}}; \beta^{-1})\}^{e'} = R^2. \tag{15}$$

Nun erkennen wir aus (10), dass

$$(f, \lambda g^{e}; \beta) = \beta^{-1}(f, \lambda; \beta),$$

$$(f, \lambda g^{\frac{p-1}{2}+e}; \beta^{-1}) = \beta^{+1}(f, \lambda g^{\frac{p-1}{2}}; \beta^{-1})$$

wird. Bilden wir das Product beider Gleichungen, so wird es klar, dass die Klammergrösse auf der linken Seite von (15) bei der Substitution von $[g^{e}]$ statt $[1]$ sich nicht ändert. Sie ist demnach als ganze, lineare, ganzzahlige Function der Perioden (5) darstellbar. Bezeichnen wir sie mit U, so folgt aus (15)

$$U^{e'} = R^{f}, \quad \sqrt[e']{R} = \sqrt[f]{U};$$
$$(f, \lambda; \beta) = \sqrt[f]{U}\left[_{s}^{c} \frac{\varphi + 2k\pi}{e'}\right],$$

d. h. die Gleichung e'^{ten} Grades, welche von den e Perioden zu je f Gliedern zu den ee' Perioden von je f' Gliedern führt, kann dadurch aufgelöst werden, dass man eine primitive Wurzel der reinen Gleichung $\varepsilon^{e'} = 1$ bestimmt, einen Winkel, der dann construirt werden kann, in e' gleiche Theile theilt und aus einer bekannten Grösse die Quadratwurzel zieht.

§ 324. Von besonderem Interesse ist der Fall, in welchem man mit Hülfe der soeben dargelegten Methode direct von der Kreistheilungsgleichung zu den Wurzeln $[1]$, $[g]$, $\cdots$ übergeht, der Fall also, in welchem $e = 1$, $f = p - 1$; $e' = p - 1$, $f' = 1$ genommen wird. Setzen wir dabei der Bequemlichkeit halber $\lambda = 1$, so wäre, wenn die auftretende $(p-1)^{\text{te}}$ Einheitswurzel wieder mit α bezeichnet wird,

$$\begin{aligned} U &= (p-1, 1; \alpha)\,(p-1, -1; \alpha^{-1}) \\ &= \{[1] + [g]\alpha + [g^2]\alpha^2 + \cdots + [g^{p-2}]\alpha^{p-2}\} \\ &\quad \cdot \{[-1] + [-g]\alpha^{-1} + [-g^2]\alpha^{-2} + \cdots + [-g^{p-2}]\alpha^{-p+2}\} \end{aligned}$$

zu berechnen. In dem Producte fassen wir alle Glieder zusammen, welche die gleiche Potenz von α enthalten, und bekommen dabei

$$\begin{aligned} U = {} & 1 + 1 + 1 + \cdots + 1\} \\ & + \alpha\{[g-1] + [g(g-1)] + [g^2(g-1)] + \cdots + [g^{p-2}(g-1)]\} \\ & + \alpha^2\{[g^2-1] + [g(g^2-1)] + [g^2(g^2-1)] + \cdots + [g^{p-2}(g^2-1)]\} \\ & \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & + \alpha^{p-2}\{[g^{p-2}-1] + [g(g^{p-2}-1)] + \cdots\}. \end{aligned}$$

Keine der Grössen $(g-1)$, (g^2-1), $\cdots$ $(g^{p-2}-1)$ ist congruent 0 modulo p, und daher umfasst jede der zugehörigen geschweiften Klammern alle primitiven p^{ten} Einheitswurzeln; deshalb hat eine jede den Werth (-1), und so ergiebt sich

$$\begin{aligned} U &= (p-1) + (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-2})(-1) \\ &= p - (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{p-2}) = p. \end{aligned}$$

Die Kreistheilungsgleichung kann also dadurch aufgelöst werden, dass man eine primitive Wurzel der reinen Gleichung $\varepsilon^{p-1} = 1$ bestimmt, einen Winkel, der dann construirt werden kann, in $(p-1)$ gleiche Theile theilt und aus der Grösse p die Quadratwurzel zieht.

§ 325. Während wir in dem letzten Paragraphen von der Kreistheilungsgleichung direct zu den Wurzeln herabstiegen, wollen wir jetzt versuchen, den kleinsten Schritt zu thun, der in dieser Richtung möglich ist, nämlich, zu den beiden Perioden von $\frac{p-1}{2}$ Gliedern überzugehen. Wir bezeichnen sie durch

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= [g^0] + [g^2] + [g^4] + \cdots + [g^{p-3}], \\ \varphi_1 &= [g^1] + [g^3] + [g^5] + \cdots + [g^{p-2}] \end{aligned} \tag{16}$$

und erhalten sofort für ihre Summe

$$\varphi_0 + \varphi_1 = -1. \tag{17}$$

Das Product der beiden Perioden tritt zunächst in der Form

$$\varphi_0\varphi_1 = \left(\tfrac{p-1}{2}, g+1\right) + \left(\tfrac{p-1}{2}, g^3+1\right) + \cdots + \left(\tfrac{p-1}{2}, g^{p-2}+1\right)$$

auf, und die Summanden der rechten Seite sind dabei von dreierlei Art. Entweder ist ein Summand eine uneigentliche Periode und hat dann den Werth $\frac{p-1}{2}$, oder er ist gleich φ_0, oder gleich φ_1. Man erhält, wenn diese Fälle bezw. m_0, m_1, m_2 mal eintreten

$$\varphi_0\varphi_1 = m_0\tfrac{p-1}{2} + m_1\varphi_0 + m_2\varphi_1. \tag{18}$$

Aus unserer allgemeinen Theorie erhellt aber, dass die rechte Seite eine ganze Zahl wird, und da man mit Hülfe von (17)

$$\begin{aligned} \varphi_0\varphi_1 &= m_0\tfrac{p-1}{2} + m_1\varphi_0 - m_2(1+\varphi_0) \\ &= m_0\tfrac{p-1}{2} - m_2 + (m_1 - m_2)\varphi_0 \end{aligned}$$

schreiben kann, so muss φ_0, welches einer irreductiblen Gleichung zweiten Grades genügt, hierbei verschwinden, d. h. es muss $m_1 = m_2$ werden. Ferner muss in (18) die Summe der drei m gleich $\frac{p-1}{2}$ sein, und deshalb geht (18) in

$$\begin{aligned} \varphi_0\varphi_1 &= m_0\tfrac{p-1}{2} + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{p-1}{2} - m_0\right)(\varphi_0 + \varphi_1) \\ &= m_0\tfrac{p-1}{2} - \tfrac{p-1}{4} + \tfrac{m_0}{2} \\ &= m_0\tfrac{p}{2} - \tfrac{p-1}{4} \end{aligned} \tag{19}$$

über. Zur vollständigen Bestimmung des gesuchten Products brauchen wir also nur noch m_0 ausfindig zu machen, d. h. festzustellen, wie viele der Perioden $\left(\frac{p-1}{2}, g^{2\varkappa+1}+1\right)$ den Werth $\frac{p-1}{2}$ annehmen können. Dies geschieht stets dann und nur dann, wenn $g^{2\varkappa+1}+1$ durch p theilbar wird. Nun folgt aus der Definition von g

$$g^{p-1} - 1 = \left(g^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)\left(g^{\frac{p-1}{2}} + 1\right) \equiv 0 \pmod{p},$$

und da keine frühere Potenz von g als die $(p-1)^{te}$ durch p getheilt den Rest 0 lässt, so ist

$$g^{\frac{p-1}{2}} + 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

da ferner alle Potenzen von g mit den Exponenten $0, 1, \cdots (p-2)$ unter einander incongruent sind, so ist auch $\alpha = \frac{p-1}{2}$ der einzige Exponent, für den $g^\alpha + 1 \equiv 0$ wird. Daraus ist ersichtlich, dass nur, wenn die Gleichung $2\varkappa + 1 = \frac{p-1}{2}$ stattfinden kann, der Fall $\left(\frac{p-1}{2}, g^{2\varkappa+1} + 1\right) = \frac{p-1}{2}$ vorkommt. Das geschieht also für ein $p = 4\mu + 3$ ein einziges Mal, d. h. dafür ist $m_0 = 1$; und für ein $p = 4\mu + 1$ gar nicht, d. h. dann wird $m_0 = 0$. Also liefert (19) für diese beiden Fälle die Werthe

$$\varphi_0\varphi_1 = -\frac{p-1}{4} \quad \text{(wenn } p = 4\mu + 1 \text{ ist)},$$

$$\varphi_0\varphi_1 = +\frac{p+1}{4} \quad \text{(wenn } p = 4\mu + 3 \text{ ist)};$$

diese beiden Resultate können wir in die eine Gleichung

$$\varphi_0\varphi_1 = \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\right) \tag{20}$$

zusammenfassen.

Die beiden Gleichungen (17) und (20) zeigen also, dass φ_0 und φ_1 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$z^2 + z + \frac{1}{4}\left(1 - (-1)^{\frac{p-1}{2}} p\right) = 0 \tag{21}$$

sind, und dass sie daher die Werthe

$$\frac{1}{2}\left(-1 + \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\left(-1 - \sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}\right)$$

besitzen. Die Frage aber, welcher der beiden Ausdrücke den Werth von φ_0 liefert, ist nicht leicht zu entscheiden. Wir müssen darauf verzichten, die hierauf bezüglichen Untersuchungen vorzutragen.

§ 326. Aus diesen Ergebnissen können wir einen höchst merkwürdigen arithmetischen Satz ableiten. Setzen wir

$$h_0(z) = (z - [g^0])(z - [g^2]) \cdots (z - [g^{p-3}]),$$
$$h_1(z) = (z - [g^1])(z - [g^3]) \cdots (z - [g^{p-2}]),$$

so zeigt uns § 314, XV) dass die Coefficienten jedes der beiden Ausdrücke von der Form

$$c_0 + c_1\varphi_0 + c_2\varphi_1$$

sind; wir können somit die Polynome selbst in ähnliche Form bringen, und also für den ersten Ausdruck etwa

$$h_0(z) = R(z) + S(z)\,\varphi_0 + T(z)\,\varphi_1$$

schreiben, wobei R, S, T ganze, ganzzahlige Functionen von z bedeuten. Ersetzt man nun hierin die Wurzel [1] durch $[g]$, so gehen $h_0(z)$, φ_0 und φ_1 bezw. in $h_1(z)$, φ_1 und φ_0 über. Folglich wird

$$h_1(z) = R(z) + S(z)\varphi_1 + T(z)\,\varphi_0.$$

Nun liefert $h_0(z)\,h_1(z)$ offenbar das Polynom der Kreistheilungsgleichung $F_p(z)$; das Product der rechten Seiten unserer beiden letzten Gleichungen wird gleich

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\Big((2R-S-T) + (S-T)\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p}\Big)\\
&\cdot\tfrac{1}{2}\Big((2R-S-T) - (S-T)\sqrt{(-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p}\Big)\\
&= \tfrac{1}{4}\Big[(2R-S-T)^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p\,(S-T)^2\Big],
\end{aligned}$$

und wenn wir also zur Abkürzung

$$2R-S-T = X,\quad S-T = Y$$

setzen, so erhalten wir die Darstellung für das Vierfache des Kreistheilungspolynoms

$$4F_p(z) = 4\,\frac{z^p-1}{z-1} = X(z)^2 - (-1)^{\frac{p-1}{2}}\,p\,Y(z)^2. \tag{22}$$

Für $p = 17$ wird die Gleichung, welche die Wurzeln der Periode $(8, [g^0])$ liefert,

$$\begin{aligned}
z^8 - \varphi_0 z^7 + (4+\varphi_0+2\varphi_1)z^6 - (4\varphi_0+3\varphi_1)z^5 + (6+3\varphi_0+5\varphi_1)z^4\\
-(4\varphi_0+3\varphi_1)z^3 + (4+\varphi_0+2\varphi_1)z^2 - \varphi_0 z + 1 = 0,
\end{aligned}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
R &= z^8 + 4z^6 + 6z^4 + 4z^2 + 1,\\
S &= -z^7 + z^6 - 4z^5 + 3z^4 - 4z^3 + z^2 - z,\\
T &= 2z^6 - 3z^5 + 5z^4 - 3z^3 + 2z^2.
\end{aligned}$$

Dies führt dann endlich zu den Schlussresultaten

$$\begin{aligned}
X(z) &= 2z^8 + z^7 + 5z^6 + 7z^5 + 4z^4 + 7z^3 + 5z^2 + z + 2,\\
Y(z) &= z^7 + z^6 + z^5 + 2z^4 + z^3 + z^2 + z;\\
4\,\frac{z^{17}-1}{z-1} &= X(z)^2 - 17\,Y(z)^2.
\end{aligned}$$

Namen- und Sachregister.

(Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.)

Abbildung 16.
Ableitung 21.
— eines Products 22.
— einer Summe 21.
Absoluter Betrag 10.
Addition 1.
— complexer Grössen 4. 11.
Adjungirte quadratische Form 183.
Algorithmus d. gemeins. Theilers 64ff.
— zur Wurzelberechnung 300.
— — für alle Wurzeln 308.
Algorithmen, die sich ergänzen 305.
Amplitude complexer Grössen 10.
Anzahl reeller Wurzeln 208ff. 217ff. 230ff. 238ff.
Arndt 362.
Associatives Gesetz 1.
Austrittspunkte 268.

Bachmann 377.
Baltzer 158.
Bernoulli, D. 290ff.
Bézout 178.
Bézoutiante 158. 269.
Bézout'sche Resultante 157.
Biehler 225. 236. 239.
Biquadratische Gleichung 341ff.
— — Euler'sche Lösung 341.
— — Descartes'sche Lösung 342.
— — Lagrange'sche Lösung 343.
— — Wurzeldiscussion 246. 344.
Bonnet 236.
Borchardt 2. 93. 254.
Burnside 205.

Catalan 225.
Cauchy 37. 249. 272.
— Existenzbeweis 26. 31.
— Interpolation 43.
— Umkreisungssatz 35. 257.
— Wurzelgrenze 203.
Cayley'sche Resultante 158.
Cohn 290.
Colombier 236.
Commutatives Gesetz 1.
Complexe Grössen 1ff. 3.
— geometrische Darstellung 10.
Conjugirt complexe Grössen 13.
Conjugirte Functionen 14.
Convergenz von Näherungsalgorithmen 302. 304.
Cubische Gleichung 334ff.
— Euler'sche Lösung 335.
— irreducibler Fall 338.
— goniometrische Lösung 338.
— Lagrange'sche Lösung 339.
— Tschirnhausen'sche Lösung 334.
— Wurzeldiscussion 245. 337.

Darboux 260.
Dedekind 8.
Definite quadratische Form 197.
Descartes 233. 342.
— Regel 219. 222.
Determinante quadrat. Form 182.
Differentialgl. für Discriminanten 180.
— für Resultanten 163.
— für symmetr. Funct. 133ff.
Discriminanten 177ff.
— Differentialgl. für sie 180.
Distributives Gesetz 3.
Division 3.
Divisor von Null verschieden 3.
Doppelwurzel 17. 181.

Einheiten 3.
Einheitswurzeln 345.
— Darstellung, goniometrische 352.
— nicht-primitive 347.
— primitive 347.
— — ihre Anzahl 350.
— — ihre Gleichung 353.
— Zugehörigkeit z. Exponenten 347. 351.
Eintrittspunkte 268.
Eintypige symmetr. Funct. 97.
Eisenstein's Irreductibilit.-Theorem 56. 360.
Elementare symmetr. Funct. 96.
Encke 294.
Euklid'scher Algor. d. Theiler 64ff.
Euler 180. 290. 298. 341. 378.
— Identitäten 41.
— Resultantendarstellung 152.
Excess 254.

Faà di Bruno 133.
Faure 225.
Folge (Zeichen-) 216.
Folgen-Folge 227.
Folgen-Wechsel 227.
Fouret 212.
Fourier 216. 233. 290.
Frobenius 197.
Function, ganze 15.
— rationale, d. Wurzeln 113ff.
— ϱ-werthige 114.
— symmetrische 96ff. 113ff.
— Zerlegung 39.
Fundamentalsystem 109.

Ganze Function 15.
Gauss 28. 52. 104. 106. 173. 222. 359. 361. 366. 378.
Gauss'sche Darstellung symmetr. Funct. 104. 110.
— Kreistheilung 359ff.
Gauss'scher Wurzelexistenzbeweis 28.
Gauss'sche Zerlegung ganzer Funct. 52.
Gemeinsamer Theiler 65ff.
Geometrische Reihe 91.
Gewicht eines Gliedes 107.
Gleichung, algebraische 15.
— dritten Grades (siehe: cubische Gl.).
— fünften Grades; Reduction 124ff.
— Kreistheilungs- 359ff.
— reciproke 119.
— vierten Grades (s.: biquadrat. Gl.).
— d. Wurzeldifferenzquadrate 128. 324. 328.
— zweiten Grades (s.: quadratische Gl.).
Gleichungspolynom 15.
Goniometrische Lösung cubischer Gleichungen 338.
Gordan 159.
— Wurzelexistenzbeweis 173.
Grad einer Gleichung 15.
Grenzen f. d. Wurzeln 20. 201ff.
Grenzpunkte bei Näherungsalgorithmen 305.

Hermite 213. 225. 261.
— Theorem 269.

Indefinite quadratische Formen 197.
Interpolationsformel, Cauchy 43.
— Lagrange 39.
— Newton 50.
Invariante e. quadrat. Form 182.
Irreductibilität 51ff.
— der Kreistheilungsgleichung 360.
— der Resultante 169.
Isenkrahe 301.
Isobarische Function 107.
Iterirung 314ff.
— allgemeine Eigenschaften 316.
— gebrochener linearer Funct. 319.
— gebrochener rationaler Funct. 321.

Jacobi 43. 46. 157. 194. 196. 270. 378.
Jerrard 125.

Kerschensteiner 159.
Kettenbrüche 329.
Königsberger's Theorem über irreductible Functionen 61.
Kreispolygone, reguläre 377.
Kreistheilungsgleichung 359ff.
— Auflösung nach Gauss 365ff.
— Auflösung nach Lagrange 376ff.
— Irreductibilitätsbeweise 360.
— Zerfällung in Factoren 372.
Kronecker 48. 55. 78. 268. 273. 357. 361. 364.

Lagrange 54. 272. 290. 323ff. 331. 339. 343. 378ff.
— Interpolationsformel 39.
— Lösung der Kreistheilungsgleichung 378ff.
— Lösung numerischer Gleichungen 328.
Lagrange'sche Resolvente 378.
Laguerre 205.
Laplace 44.
Lebesgue 362.
Legendre's Polynom 210.
Lineare gebrochene Function 319.
Longchamps 205.

Mandl 55.
Mathieu 281.
Mittelwerthsätze 214ff.
Modul complexer Grössen 10.
Moigno 254.
Multiplicität von Wurzeln 18. 38. 72.

Newton 277. 278.
Newton's Formeln d. Potenzsummen 98.
— Interpolationsformel 50.
— Näherungsmethode 282ff. 309ff. 314.
— Regel 233.
— Regel, vervollständigte 234.
Nicht-primitive Einheitswurzeln 347.
Noether 157.
Nullstellen 17.

Ordnung einer Recursionsformel 88.
Orthogonale Substitution 198.

Panton 205.
Partialbrüche 42. 73.
Partielle Differentialgleichungen für Discriminanten 180.
— — für Resultanten 163.
— — für symmetr. Functionen 133ff.
Perioden für primitive Einheitswurzeln 637.
Polygone, reguläre 377.
Polynom einer Gleichung 15.
Potenzsummen; independente Darstellung 98.

[illegible] Formen [illegible]
[illegible] Formen [illegible]
[illegible] Einheitswurzeln [illegible]
[illegible] 12.
[illegible] Einheitswurzeln [illegible]
[illegible] 50
[illegible] 13.
[illegible] Wurzeldifferenzquadrate [illegible]

Quadratische Formen [illegible]
[illegible]
[illegible] 197
[illegible] 182
[illegible] 197
[illegible] 182
[illegible] 185
[illegible]
[illegible] 197
[illegible] 197
[illegible] Trägheitsgesetz [illegible]
Transformation [illegible]
[illegible] Quadrate [illegible]
Quadratische Gleichungen, Lösung [illegible]
Wurzeldiscussion [illegible]

Rang quadratischer Formen [illegible]
[illegible] 71. [illegible] 72.
[illegible] Gleichungen [illegible] 65.
[illegible] Potenzsummen [illegible]
[illegible]
[illegible] 48 ff.
[illegible] 48 ff.
[illegible]
[illegible]
[illegible] 42 ff.
[illegible]
[illegible] 157
[illegible]
[illegible]
[illegible] Gleichungswurzeln 150
[illegible]
[illegible] Differentialgleichung 163.
[illegible]
[illegible] 100 ff.

[illegible] quadratischer Formen 197.
[illegible] 21.
[illegible] quadratischer Formen 197.
Sturm 238. 252. 253.
Sturmischer Satz 240.
— — aus dem Cauchy'schen Umgreifungssatze 257.
Substitution 96.
Subtraction 5
Sylvester 127. 158. 182. 199. 213. 225. 239. 233. 252. 254.
Sylvester's Trägheitsgesetz 194.
Symmetrische Functionen 96 ff.
— — Ontypige 97.
— — Elementare 96.
— — rationale Functionen 112.

Tauber 210.
Theiler, grösster gemeinsamer 64 ff.
Trägheitsgesetz quadratischer Formen 194.
Transformation der Gleichungen 113 ff.
— der quadratischen Formen 183.
Trennung der Wurzeln 271 ff.
Schirmhausen-Transformation 119. 125. 134. 142.

Umschlingung des Nullpunktes 38.

Vielfache Wurzeln 18. 38. 72. 181.
Vincent 131.

Waring 190. 272. 324.
Waring's Formel f. Potenzsummen 100.
Wechsel der Zeichen 216.
Wechsel-Folge 227
Wechsel-Wechsel 227.
Weierstrass 5.
Wurzel 7.
— Anzahl (reeller) 208. 217. 230. 238.
Wurzelexistenzbeweis 26 ff.
Wurzelpunkt 17.

Zeichenfolge 216.
Zeichenwechsel 216.
Zerlegung ganzer Functionen in lineare Factoren 18.
— — — nurreductible Factoren 51. 71.
— rationaler Functionen in Partialbrüche 42. 73.

Potenzsummen; Newton'sche Formeln 98.
— Waring'sche Formeln 100.
— für primitive Einheitswurzeln 356.
Poulain 211. 212.
Primitive Einheitswurzeln 347.
— — Anzahl 350.
— — Gleichung 353.
Product der Wurzeldifferenzquadrate 129.

Quadratische Formen 182ff.
— — adjungirte 183.
— — definite 197.
— — Determinante 182.
— — indefinite 197.
— — Invariante 182.
— — Rang 185.
— — reciproke 183.
— — Signatur 197.
— — Species 197.
— — Trägheitsgesetz 195.
— — Transformation 183.
— — Verwandlung in Quadrate 190.
Quadratische Gleichungen, Lösung 334.
— — Wurzeldiscussion 244.

Rang quadratischer Formen 185.
Rationalitätsbereich 51. 52. 372.
Reciproke Gleichungen 119. 365.
Recursionsformeln f. Potenzsummen 97. 98.
— f. Reihen 76. 88ff.
Recurrirende Reihen 86ff.
Reductibilität 51.
Resolvente 378.
Resultante 149ff. 162ff.
— Darstellung 150ff.
— — nach Bézout 157.
— — nach Cayley 158.
— — nach Euler 158.
— — durch Gleichungswurzeln 150.
— Eigenschaften 162ff.
— Partielle Differentialgleichung 163.
Reuschle 355.
Rolle's Satz 201. 208.
— — Anwendungen 209ff.
Runge 55.

Sancery 300.
Scheibner 157.
Schröder 300.
Signatur quadratischer Formen 197.
Signum 21.
Species quadratischer Formen 197.
Sturm 238. 252. 253.
Sturm'scher Satz 240.
— — aus dem Cauchy'schen Umkreisungssatze 257.
Substitution 96.
Subtraction 3.
Sylvester 127. 158. 182. 199. 213. 225. 230. 233. 252. 254.
Sylvester's Trägheitsgesetz 194.
Symmetrische Functionen 96ff.
— — eintypige 97.
— — elementare 96.
— — rationale Functionen 112.

Tauber 310.
Theiler, grösster gemeinsamer 64ff.
Trägheitsgesetz quadratischer Formen 194.
Transformation der Gleichungen 113ff.
— der quadratischen Formen 183.
Trennung der Wurzeln 271ff.
Tschirnhausen-Transformation 119. 125. 334. 341.

Umschlingung des Nullpunktes 38.

Vielfache Wurzeln 18. 38. 72. 181.
Vincent 331.

Waring 100. 272. 324.
Waring's Formel f. Potenzsummen 100.
Wechsel der Zeichen 216.
Wechsel-Folge 227.
Wechsel-Wechsel 227.
Weierstrass 8.
Wurzel 17.
— Anzahl (reeller) 208. 217. 230. 238.
Wurzelexistenzbeweis 26ff.
Wurzelpunkt 17.

Zeichenfolge 216.
Zeichenwechsel 216.
Zerlegung ganzer Functionen in lineare Factoren 18.
— — — in irreductible Factoren 51. 71.
— rationaler Functionen in Partialbrüche 42. 73.